# CORRIGÉ – CHAPITRE 3, Argumenter

## Exercice 1

**a)** $\left(\frac{1}{a}\right)^3$ est le cube de l'inverse de *a*.

**b)** $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est le quotient de deux racines.

**c)** $a^2-b^2$ est la différence de deux carrés.

**d)** $a \cdot b+c \cdot d$ est la somme de deux produits.

## Exercice 2

**a)** $17n$ ; $17(n+1)$ ; $17(n+2)$ avec $n \in \mathbb{N}$. On peut aussi répondre : $17n$ ; $17n+17$ ; $17n+34$

**b)** $(2x+3)^2$ avec $x \in \mathbb{N}$

**c)** $(2x-5)^2-(x+3)^2$ avec $x \in \mathbb{N}$

**d)** $4 \cdot (100 \cdot 1+2n)$ avec $n \in \mathbb{N}$

**e)** $(2n)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$

## Exercice 3

**a)** Le dernier chiffre est 5 ou 0, car le chiffre est un multiple de 5. Comme la somme des trois chiffres donne 21, le dernier chiffre est 5 (il n'est pas possible d'obtenir 21 en sommant deux chiffres).

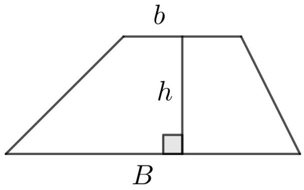
La somme des deux premiers chiffres donne $21-5=16$. On a donc les possibilités suivantes : 975 ; 885 ; 795

**b)** Dans la division euclidienne par 5, le reste peut être 0, 1, 2, 3 ou 4. Comme le reste et le quotient sont égaux, on obtient les nombres suivants :

$r=0, q=0 \Rightarrow 5q+r=0$
$r=1, q=1 \Rightarrow 5q+6=0$
$r=2, q=2 \Rightarrow 5q+12=0$
$r=3, q=3 \Rightarrow 5q+18=0$
$r=4, q=4 \Rightarrow 5q+24=0$

**Exercice 4**

On fait un schéma :




On a $2b=B$ et $b=h$.

$$A=\frac{b+B}{2}h \overset{2b=B}{\underset{b=h}{=}} \frac{b+2b}{2}b=\frac{3b}{2}b=\frac{3b^2}{2}$$

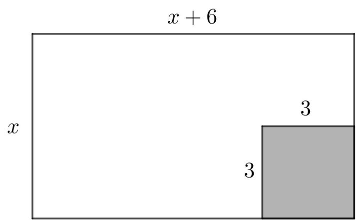
**Exercice 5**

On a $A=L\cdot l \Leftrightarrow L=\frac{A}{l}$. Ici, on a $A=4a^2+8a$ et $l=2a$ donc :

$$L=\frac{A}{l}=\frac{4a^2+8a}{2a}\overset{\text{mise en év.}}{=}\frac{2a(2a+4)}{2a}=2a+4$$

**Exercice 6**

On fait un schéma :




$A=A_{\text{rectangle}}-A_{\text{carré}}=x(x+6)-3^2=x^2+6x-9.$

Comme l'aire dépend de la variable $x$, on notera $A(x)=x^2+6x-9$.

**Exercice 7**

**Exercice 8**

**a)** La somme de 8 et de la somme de 2 et $x$.

**b)** La différence entre 8 et la somme de 2 et $x$.

**c)** La différence entre 8 et la différence entre 2 et $x$.

**d)** Le produit entre 8 et la somme de 2 et $x$.

**e)** Le produit entre 8 et la différence entre 2 et $x$.

**f)** Le produit entre 8 et le double de $x$.

**g)** La différence entre 8 et le double de $x$.

**h)** La différence entre le produit de 8 avec $x$ et le double de $x$.

**i)** Le produit entre 8 et l'opposé du double de $x$.

**j)** Le produit entre le produit de 8 et $x$ et l'opposé du double de $x$.

## Exercice 9

**a)** $V(x)=x^3$

**b)** $A(x)=6x^2$ car il y a 6 faces.

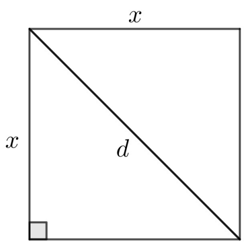
**c)** $L(x)=12x$ car il y a 12 arêtes.

**d)** Une face est un carré de côté *x*.

Par le théorème de Pythagore, on a donc :

$x^2+x^2=d^2 \Leftrightarrow 2x^2=d^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2}=d \Leftrightarrow \sqrt{2}x=d$.

Ainsi, $d(x)=\sqrt{2}x$.




## Exercice 10

**a)** 1re figure : $A=\underbrace{8(2+a)}_{\text{produit}}=\underbrace{8\cdot 2+8a}_{\text{somme}}=16+8a$

2e figure : $A=\underbrace{(a+4)(b+1)}_{\text{produit}}=\underbrace{ab+a+4b+4}_{\text{somme}}$

**b)** 1re figure : $a\geq 0$ car il s'agit d'une longueur.

2e figure : $a\geq 0$, $b\geq 0$ car il s'agit de longueurs.

**c)** Oui, il s'agit de schémas.

## Exercice 11

**a)** Programme A :
$$\begin{array}{r}4\Rightarrow(4\cdot 2-8)(4+3)=0\\ -1\Rightarrow(-1\cdot 2-8)(-1+3)=-20\\ 0\Rightarrow(0\cdot 2-8)(0+3)=-24\end{array}$$

Programme B :
$$\begin{array}{r}4\Rightarrow\left(4^2-(4+12)\right)\cdot 2=0\\ -1\Rightarrow\left((-1)^2-(-1+12)\right)\cdot 2=-20\\ 0\Rightarrow\left(0^2-(0+12)\right)\cdot 2=-24\end{array}$$

**b)** On peut faire la conjecture suivante : «Si *n* est un nombre quelconque, alors les deux programmes donnent toujours le même résultat.»

**c)** Par calcul direct, on a :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Programme A:} & (2n-8)(n+3)=2n^2+6n-8n-24=2n^2-2n-24\\ \text{Programme B:} & \left(n^2-(n+12)\right)\cdot 2=2\left(n^2-n-12\right)=2n^2-2n-24\end{array}\right\}=$$

## Exercice 12

**a)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $n+3$ est pair.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=2$ :

On a bien $2\in\mathbb{N}$ mais $2+3=5$ n'est pas pair (car $5=2k \Leftrightarrow k=\frac{5}{2} \Leftrightarrow k\notin\mathbb{N}$).

**b)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $5n+2$ est un multiple de 3.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=0$ :

On a bien $0\in\mathbb{N}$ mais $5\cdot 0+2=2$ n'est pas un multiple de 3 (car $2=3k \Leftrightarrow k=\frac{2}{3} \Leftrightarrow k\notin\mathbb{N}$).

**c)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $3n+3$ se termine par 3.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=1$ :

On a bien $1\in\mathbb{N}$ mais $3\cdot 1+3=6$ ne se termine pas par 3.

**d)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $3n+3$ est un multiple de 3.

Vraie, démonstration :

- $3n+3=3(n+1)$ *[mise en évidence]*
- on pose $k=n+1$ et on a $k\in\mathbb{N}$ *[car n est un entier par hypothèse]*
- on a donc $3n+3=3(n+1)\overset{k=n+1}{=}3k$ avec $k\in\mathbb{N}$
- $3n+3$ peut donc s'écrire sous la forme $3k$ avec $k\in\mathbb{N}$, $3n+3$ est donc est un multiple de 3 *[par déf. de "multiple de 3"]*

**e)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $n+4$ est pair.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=1$ :

On a bien $1\in\mathbb{N}$ mais $1+4=5$ n'est pas pair (car $5=2k \Leftrightarrow k=\frac{5}{2} \Leftrightarrow k\notin\mathbb{N}$).

**f)** Si $n>4$, alors $n^2-4$ n'est pas un nombre premier.

Vraie, démonstration :

- $n^2-4=(n-2)(n+2)$ *[factorisation à l'aide de la 3e identité remarquable]*
- on constate que $n^2-4$ peut s'écrire sous la forme d'un produit et ne peut donc pas premier.

## Exercice 13

**a)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $S=n+(n+1)+(n+2)$ est un multiple de 3.

Vraie, démonstration :

- $S=n+(n+1)+(n+2)$ *[par déf. de "consécutifs"]*
- $n+(n+1)+(n+2)=3n+3$ *[réduire]*
- $3n+3=3(n+1)$ *[mise en évidence]*

- on pose $k=n+1$ et on a $k\in\mathbb{N}$ *[car n est un entier par hypothèse]*
- on a donc $3(n+1)\overset{k=n+1}{=}3k$ avec $k\in\mathbb{N}$
- ainsi $S=3k$ avec $k\in\mathbb{N}$, $S$ est donc est un multiple de 3 *[par déf. de "multiple de 3"]*

**b)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $S=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$ est un multiple de 5.

Vraie, démonstration :

- $S=n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$ *[par déf. de "consécutifs"]*
- $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$ *[réduire]*
- $5n+10=5(n+2)$ *[mise en évidence]*
- on pose $k=n+2$ et on a $k\in\mathbb{N}$ *[car n est un entier par hypothèse]*
- on a donc $5(n+2)\overset{k=n+2}{=}5k$ avec $k\in\mathbb{N}$
- ainsi $S=5k$ avec $k\in\mathbb{N}$, $S$ est donc est un multiple de 5 *[par déf. de "multiple"]*

**c)** Si $n$ est pair et $p$ premier impair, alors $S=n+p$ est premier.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=2,\quad p=7$ :

2 est bien pair et 7 premier mais $S=2+7=9$ n'est pas premier (car $9=3\cdot 3$).

**d)** Si $n$ est un multiple de 9 et de 12, alors $n$ est un multiple de 108.

Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=36$ :

36 est bien un multiple de 9 (car $36=9\cdot 4$) et de 12 (car $36=12\cdot 3$) mais 36 n'est pas un multiple de 108 (car $36k=108$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$).

**e)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $D=(3n+1)^2-(3n-1)^2$ est divisible par 12.

Vraie, démonstration :

- $D=(3n+1)^2-(3n-1)^2$ *[par hypothèse et déf. de "multiple"]*
- $(3n+1)^2-(3n-1)^2=9n^2+6n+1-(9n^2-6n+1)$ *[identités remarquables 1 et 2]*
- $9n^2+6n+1-(9n^2-6n+1)=12n$ *[réduire]*
- ainsi $D=12n$ avec $n\in\mathbb{N}$ (*[par hyp]*), $D$ est donc est un multiple de 12 *[par déf. de "multiple"]*

## Exercice 14

**a)** La conjecture est vraie, démonstration par calcul direct :

$(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1)\overset{\text{distributivité}}{=}$
$x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1-(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1)\overset{\text{réduire}}{=}$
$x^{11}-1$ ✔

**b)** On pose $x=101$ et on applique le point a).

$$101^{11}-1\overset{a)}{=}(101-1)(101^{10}+101^{9}+...+101+1)=100\cdot\underbrace{(101^{10}+101^{9}+...+101+1)}_{=k\in\mathbb{N}}=100k$$

Donc $101^{11}-1$ est bien un multiple de 100 par définition de "multiple de 100" car il peut s'écrire sous la forme $100k$ avec $k\in\mathbb{N}$.

## Exercice 15

**a)** Si $n\in\mathbb{N}$, alors $D=(2n+2)^2-(2n)^2$ est un multiple de 4.

Vraie, démonstration :

- $D=(2n+2)^2-(2n)^2$ *[par hypothèse et déf. de "pair" et de "consécutifs"]*
- $(2n+2)^2-(2n)^2=4n^2+8n+4-4n^2$ *[identité remarquable 1 et propriété puissance]*
- $4n^2+8n+4-4n^2=8n+4$ *[réduire]*
- $8n+4=4(2n+1)$ *[mise en évidence]*
- on pose $k=2n+1$ et on a $k\in\mathbb{N}$ *[car n est un entier par hypothèse]*
- on a donc $4(n+1)=4k$ avec $k\in\mathbb{N}$
- ainsi $D=4k$ avec $k\in\mathbb{N}$, $D$ est donc est un multiple de 4 *[par déf. de "multiple"]*

## Exercice 16

On calcule quelques valeurs pour trouver une conjecture :

$$\left.\begin{array}{l} n=-2 \ :\ n^3-n=(-2)^3-(-2)=-6 \\ n=-1 \ :\ n^3-n=(-1)^3-(-1)=0 \\ n=0 \ :\ n^3-n=0^3-0=0 \\ n=1 \ :\ n^3-n=1^3-1=0 \\ n=2 \ :\ n^3-n=2^3-2=6 \\ n=5 \ :\ n^3-n=5^3-5=120 \\ n=9 \ :\ n^3-n=9^3-9=720 \end{array}\right\} \text{On observe qu'il s'agit de multiple de 3.}$$

On pose donc la conjecture suivante : «Si $n\in\mathbb{Z}$, alors $n^3-n$ est un multiple de 3.»

Démonstration :

- $n^3-n=n(n^2-1)$ *[mise en évidence]*
- $n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$ *[factorisation à l'aide de la 3e identité remarquable]*
- Comme $n$ est un entier *[par hypothèse]*, $n-1$, $n$ et $n+1$ sont trois entiers consécutifs *[par déf. de "consécutifs"]*. Un des trois nombres est donc divisible par 3 (il est possible de montrer par récurrence cette dernière affirmation).
- Le produit $n(n-1)(n+1)$ est donc aussi divisible par 3.

**Exercice 17**

La conjecture est vraie, démonstration par calcul direct :

$C \overset{\text{par hyp.}}{=} (n-1)(n+1)+1 \overset{\text{id. n°3}}{=} n^2-1+1 \overset{\text{réduire}}{=} n^2$

**Exercice 18**

**a)** On calcule les valeurs pour trouver une conjecture :

$$\left.\begin{array}{c} 1^2-0^2=1 \\ 2^2-1^2=3 \\ 3^2-2^2=5 \\ 4^2-3^2=7 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{On observe qu'il s'agit de nombres impairs.}$$

Conjecture : «Si $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)^2-n^2$ est impair.». Démonstration :

- $C=(n+1)^2-n^2$ *[par hypothèse]*
- $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2$ *[identité remarquable n°1]*
- $n^2+2n+1-n^2=2n+1$ *[réduire]*
- ainsi $C=2n+1$ avec $n \in \mathbb{N}$ *[par hyp]*, $C$ est donc est impair *[par déf. de "impair"]*

**b)** On calcule les valeurs pour trouver une conjecture :

$$\left.\begin{array}{c} 3^2-1=8 \\ 5^2-1=24 \\ 7^2-1=48 \\ 9^2-1=80 \\ \ldots \end{array}\right\} \text{On observe qu'il s'agit de multiple de 8.}$$

Conjecture : «Si $n$ est un entier impair, alors $n^2-1$ est un multiple de 8.». Démonstration :

1re partie :

- $C=n^2-1$ *[par hypothèse]*
- $n^2-1=(2k+1)^2-1$ car $n=2k+1$ *[par hypothèse et déf. de "impair"]*
- $(2k+1)^2-1=4k^2+4k+1-1$ *[identité remarquable n°1]*
- $4k^2+4k+1-1=4k^2+4k$ *[réduire]*
- $4k^2+4k=4k(k+1)$ *[mise en évidence]*
- on pose $m=k(k+1)$ et on a $m \in \mathbb{N}$ *[car k est un entier par hypothèse]*
- on a donc $4k(k+1)=4m$ avec $m \in \mathbb{N}$
- ainsi $C=4m$ avec $m \in \mathbb{N}$, $C$ est donc est un multiple de 4 *[par déf. de "multiple"]*

2e partie :

- On a $m=k(k+1)$ avec $k\in\mathbb{N}$.
- Comme $k$ est un entier *[par hypothèse]*, $k$ et $k+1$ sont deux entiers consécutifs *[par déf. de "consécutifs"]*. Un des deux nombres est donc pair.
- Le produit $m=k(k+1)$ est donc aussi pair et peut donc s'écrire $m=2p$ avec $p\in\mathbb{N}$.

3e partie :

- On met ensemble les deux premières parties.
- $C=4m=4\cdot 2p=8p$ avec $p\in\mathbb{N}$. $C$ est donc est un multiple de 8 *[par déf. de "multiple"]*

**c)** On calcule les valeurs pour trouver une conjecture :

$$\left.\begin{array}{c} 2^2+3^2+6^2=49=7^2 \\ 3^2+4^2+12^2=169=13^2 \\ 4^2+5^2+20^2=441=21^2 \\ \dots \end{array}\right\}$$

Conjecture : «Si $n$ est un entier impair, alors $n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2=(n(n+1)+1)^2$.

Démonstration par calcul direct on a pour le membre de gauche :

$n^2+(n+1)^2+(n(n+1))^2 \underset{\text{prop. puiss}}{\overset{\text{id. n°1}}{=}} n^2+(n^2+2n+1)+n^2(n+1)^2 \overset{\text{id. n°1}}{=}$
$n^2+(n^2+2n+1)+n^2(n^2+2n+1) \overset{\text{distributivité}}{=} n^2+n^2+2n+1+(n^4+2n^3+n^2) \overset{\text{réduire}}{=} n^4+2n^3+3n^2+2n+1$

et pour le membre de droite :

$(\underbrace{n(n+1)}_{=a}+\underbrace{1}_{=b})^2 \overset{\text{id. n°1}}{=} \underbrace{(n(n+1))^2}_{=a^2}+\underbrace{2n(n+1)}_{=2ab}+\underbrace{1}_{=b^2} \overset{\text{id. n°1, prop.puiss}}{=} n^2(n^2+2n+1)+2n^2+2n+1 \overset{\text{distribuer, réduire}}{=}$
$n^4+2n^3+3n^2+2n+1$ ✔

## Exercice 19

**a)** Si $\underbrace{\text{on a un corbeau}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{il possède la propriété "noir".}}_{\text{conclusion}}$

S'il $\underbrace{\text{pleut}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{mon jardin est mouillé.}}_{\text{conclusion}}$

Si $\underbrace{\text{on est Suisse}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{on a la propriété "aimer le chocolat".}}_{\text{conclusion}}$

**b)** Voir ci-dessus.

**c)** Si on observe la propriété "noir", alors il s'agit d'un corbeau.

Si mon jardin est mouillé, alors il pleut.

Si on a la propriété "aimer le chocolat", alors on est Suisse.

**d)** Si on n'observe pas la propriété "noir", alors il ne s'agit pas d'un corbeau.

Si mon jardin n'est mouillé, alors il ne pleut pas.

Si on n'a pas la propriété "aimer le chocolat", alors on n'est pas Suisse.

**e)** Si les implications sont vraies alors les contraposées sont aussi vraies.

Si les implications sont vraies alors les réciproques peuvent être vraies ou fausses.

## Exercice 20

**a)** Il s'agit de la contraposée (permuter hypothèse et conclusion + négation).

**b)** Il s'agit de la réciproque (permuter hypothèse et conclusion).

## Exercice 21

**a)** Réciproque : $x^3 < y^3 \Rightarrow x < y$ Contraposée : $x^3 \geq y^3 \Rightarrow x \geq y$

**b)** Réciproque : $x < 1 \Rightarrow x^2 < x$ Contraposée : $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x$

**c)** Réciproque : $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$ Contraposée : $x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

## Exercice 22

On teste la conjecture avec différentes valeurs de $n$ :

$n=0 \Rightarrow 0^2+0+131=131$ est bien un nombre premier.

$n=1 \Rightarrow 1^2+1+131=133$ n'est pas un nombre premier car $133=7\cdot 19$.

La conjecture est fausse car $n=1$ est un contre-exemple.

On peut observer (sans rien calculer) que $n=131$ est aussi un contre-exemple :

$n=131 \Rightarrow 131^2+131+131 \overset{\text{mise en év.}}{=} 131\cdot(131+1+1)=131\cdot(133)=131\cdot 133$ n'est pas premier.

## Exercice 23

**a)** Par définition de *"impair"* et de *"consécutifs"*, il s'agit de résoudre :

$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=66$ avec $k\in\mathbb{N}$.

On a $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=66 \overset{\text{réduire}}{\Leftrightarrow} 6k+9=66 \overset{-9}{\Leftrightarrow} 6k=57 \overset{:57}{\Leftrightarrow} k=\frac{57}{6}\notin\mathbb{N}$ et donc il est impossible de trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est 66.

**b)** On procède comme en a) et on a :

$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+(2k+9)=405 \overset{\text{réduire}}{\Leftrightarrow} 10k+25=405 \overset{-25}{\Leftrightarrow} 10k=380 \overset{:10}{\Leftrightarrow}$ $k=38\in\mathbb{N}$

$k$ est bien un entier et on a bien :

$(2\cdot 38+1)+(2\cdot 38+3)+(2\cdot 38+5)+(2\cdot 38+7)+(2\cdot 38+9)=77+79+81+83+85=405$

**Exercice 24**

**a)** Si *n* est un multiple de 10, alors *n* est un multiple de 30.

**b)** Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $n=20$ :

20 est bien un multiple de 10 car $20=2\cdot 10$ mais 20 n'est pas un multiple de 30 car

$20=30k \Leftrightarrow k=\frac{2}{3} \Leftrightarrow k \notin \mathbb{N}$.

**c)** Si *n* est un multiple de 30, alors *n* est un multiple de 10.

**d)** Vraie, démonstration :

- $n=30k$ avec $k\in\mathbb{N}$ *[par hypothèse et déf. de "multiple"]*
- $30k=10\cdot 3k$ *[réécriture]*
- on pose $m=3k$ et on a $m\in\mathbb{N}$ *[car k est un entier par hypothèse]*
- on a donc $10\cdot 3k=10m$ avec $m\in\mathbb{N}$ ainsi $n=10m$, *n* est donc est un multiple de 10 *[par déf. de "multiple"]*

**e)** Si *n* n'est pas un multiple de 30, alors *n* n'est un multiple de 10.

**f)** Une conjecture (implication) et sa contraposée sont liées. Ici, comme la conjecture est fausse (démontré au point b)), alors la contraposée est fausse aussi.

**Exercice 25**

**a)** Il s'agit de la proposition iii).

**b)** Vraie, démonstration :

- $C=m^2-n^2$ avec *m* et *n* consécutifs *[par hypothèse]*
- $m^2-n^2=(n+1)^2-n^2$ car $m=n+1$ *[par déf. de "consécutifs"]*
- $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2$ *[identité remarquable n°1]*
- $n^2+2n+1-n^2=2n+1$ *[réduire]*
- ainsi $C=2n+1$ avec $n\in\mathbb{N}$ *[par hypothèse]* et donc *C* est impair *[par déf. de "impair"]*.

## Exercice 26

**a)** Fausse, car on peut trouver un contre-exemple (il en existe qu'un seul !). Prenons $p=2$ :

2 est bien un nombre premier, mais $3\cdot 2=6$ n'est pas impair car 6 n'est pas de la forme

$2k+1$ avec $k\in\mathbb{N}$ ($6=2k+1\Leftrightarrow k=\frac{5}{2}\notin\mathbb{N}$).

**b)** Si $3p$ est impair, alors $p$ est un nombre premier.

**c)** Fausse, car on peut trouver un contre-exemple. Prenons $3p=27$ :

27 est bien impair car $27=2\cdot 13+1$ mais $3p=27\Rightarrow p=9$ et 9 n'est pas premier (car $9=3^2$).

## Exercice 27

**a)** Prenons, par exemple, $n=16$ qui est bien un multiple de 8 car $16=2\cdot 8$ et $m=15$ qui se termine bien par 5 car $15=10\cdot 1+5$.

On a $16\cdot 15=240$ qui est bien un multiple de 10 car $240=24\cdot 10$.

**b)** Démonstration :

- $P=n\cdot m$ avec $n$ un multiple de 8 et $n$ un entier terminant par 5 *[par hypothèse]*
- $n\cdot m=8k\cdot(10i+5)$ car $n=8k$, $k\in\mathbb{N}$ *[par déf. de "multiple"]* et $m=10i+5$, $i\in\mathbb{N}$ *[par déf. de "entier terminant par"]*
- $8k\cdot(10i+5)=80k\cdot i+40k$ *[distribuer]*
- $80k\cdot i+40k=10\cdot(8k\cdot i+4k)$ *[réécriture à l'aide d'une mise en évidence]*
- on pose $q=8k\cdot i+4k$ et on a $q\in\mathbb{N}$ *[car k et i sont des entiers par hypothèse]*
- donc $10\cdot(8k\cdot i+4k)=10q$ avec $q\in\mathbb{N}$ ainsi $P=10q$, $P$ est donc est un multiple de 10 *[par déf. de "multiple"]*

**Activité 6** (p48)

1. **a.** On pose $x$ le prix de l'huile et $y$ le prix de la bouteille. On a donc $\begin{cases} x=y+5 \\ x+y=6 \end{cases}$

   On substitue $x$ dans la 2ème équation : $y+5+y=6 \Leftrightarrow 2y=1 \Leftrightarrow y=0.5$

   La bouteille coûte 50 centimes.

   **b.** Le prix final correspond à 75% du prix initial car

   $$P_F=\underbrace{P_0-50\%\cdot P_0}_{\text{prix diminué}}+\underbrace{50\%\left(P_0-50\%\cdot P_0\right)}_{\text{augmentation sur le prix diminué}}=$$
   $$P_0-50\%\,P_0+50\%\,P_0-50\%\cdot 50\%\,P_0=P_0-25\%\,P_0=75\%\,P_0$$

   On retrouve ce résultat de la manière suivante : $P_F=P_0(1-0.5)(1+0.5)=\frac{3}{4}P_0$

2. Ce dessin (en 2 dimensions) représente trois poutres carrées s'entrecroisant. Il représente un objet impossible à construire (en 3 dimensions).

**Activité 10** (p49)

Il faut tourner la carte A pour vérifier l'implication : *« Si voyelle, alors nombre pair »*.

De plus, il faut aussi tourner la carte 5 pour vérifier la contraposée : *« Si nombre pas pair, alors pas voyelle »*.

**Activité 13** (p50)

1. **a.** $x=3$ et $y=2 \Rightarrow x+y=5$ car $3+2=5$.

   $x+y=5 \nRightarrow x=3$ et $y=2$ car on a un contre-exemple : $x=1, y=4$

   On a bien $x+y=5$ mais $x\neq 3, y\neq 2$

   **b.** $x=2 \Rightarrow x^2=4$ car $2^2=4$

   $x^2=4 \nRightarrow x=2$ car on a un contre-exemple : $x=-2$

   On a bien $(-2)^2=4$ mais $x\neq 2$.

   **c.** $x>0$ et $y<0 \Rightarrow xy<0$ par la règle des signes de la multiplication.

   $xy<0 \nRightarrow x>0$ et $y<0$ car on a un contre-exemple : $x=-1, y=1$

   On a bien $-1\cdot 1=-1<0$ mais $x<0$.

   **d.** $x=0$ et $y=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$ car $0^2+0^2=0$

   $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=0$ et $y=0$ car un carré est toujours positif ou nul et la somme de deux termes positifs ou nuls est toujours positive ou nulle.

   On a donc $x=0$ et $y=0 \Leftrightarrow x^2+y^2=0$ (équivalence).

**e.** $x=1$ et $y=1 \Rightarrow xy=1$ car $1\cdot 1=1$.

$xy=1 \not\Rightarrow x=1$ et $y=1$ car on a un contre-exemple : $x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{3}{2}$

On a bien $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1$ mais $x\neq 1$, $y\neq 1$.

**f.** $d_1 \perp d_2 \Rightarrow d_1$ et $d_2$ sont sécantes par la définition de sécante.

$d_1$ et $d_2$ sont sécantes $\not\Rightarrow d_1 \perp d_2$ car l'angle n'est pas nécessairement de 90°.

**2. a.b.**

**i)** « Si je prends mon bain, alors je suis trempé.e »

Réciproque : Si je suis trempé.e, alors je prends mon bain.

→ Fausse, je peux être trempé.e à cause de la pluie par exemple.

Contraposée : Si je ne suis pas trempé.e, alors je ne prends pas mon bain

→ Vraie, car conjecture vraie.

**ii)** « Si *n* est divisible par 7, alors *n* se termine par 7 »

Réciproque : Si un nombre naturel se termine par 7, alors il est div. par 7.

→ Fausse. Contre-exemple : 17 se termine par 7 mais n'est pas div. par 7.

Contraposée : Si un nombre ne se termine pas par 7, alors il n'est pas divisible par 7.

→ Fausse. Contre-exemple : 14 ne se termine pas par 7, mais il est divisible par 7.

Donc conjecture aussi fausse.

**iii)** « Si $n$ est pair, alors $n+1$ est impair »

Réciproque : Si $n+1$ est un nombre impair, alors $n$ est pair.

→ Vraie, par définition de nombre pair/impair ($n+1=2k+1 \Leftrightarrow n=2k$)

Contraposée : Si $n+1$ est un nombre pair, alors $n$ est impair.

→ Vraie, par définition de nombre pair/impair ($n+1=2k \Leftrightarrow n=2k-1$).

Donc conjecture aussi vraie.

**iv)** « Si $x+y=0$ alors $x=0$ et $y=0$»

Réciproque : Si $x=0$ et $y=0$ alors $x+y=0$

→ Vraie, car $0+0=0$.

Contraposée : Si $x\neq 0$ et $y\neq 0$ alors $x+y\neq 0$

→ Fausse. Contre-exemple : $x=1$ et $y=-1$ mais $x+y=0$.

Donc conjecture aussi fausse.