CORRIGÉ – CHAPITRE 1, Nombres

Exercice 1

a) $1-(2+3-4)=1-(1)=0$

b) $-(24-27-30)-33=-(-33)-33=33-33=0$

c) $2\cdot(3-4)\cdot 2-(5-3)=2\cdot(-1)\cdot 2-(2)=-4-2=-6$

Exercice 2

$$
\begin{aligned}
&-3-(9-(4-(-11+(1+8-(-25+23)))-1)-7)=\\
&-3-(9-(4-(-11+(1+8-(-2)))-1)-7)=\\
&-3-(9-(4-(-11+(1+8+2))-1)-7)=\\
&-3-(9-(4-(-11+11)-1)-7)=\\
&-3-(9-(4-0-1)-7)=\\
&-3-(9-(4-1)-7)=\\
&-3-(9-3-7)=\\
&-3-(-1)=\\
&-2
\end{aligned}
$$

Exercice 3

a) Produit/Somme, on a $a\cdot b=b\cdot a$ et $a+b=b+a$. Par exemple : $2\cdot 3=3\cdot 2$ et $1+2=2+1$

b) Quotient/Différence, on a $\frac{a}{b}\neq\frac{b}{a}$ et $a-b\neq b-a$. Par exemple : $\frac{4}{2}=2$ mais $\frac{2}{4}=0.5$ et

$4-1=3$ mais $1-4=-3$.

Exercice 4

Exercice 5

Le *ppmc* (ou *ppcm*) de deux nombres naturels est le produit de tous les facteurs premiers différents apparaissant dans les décompositions, écrit chacun une seule fois avec son plus grand exposant.

Le *pgcd* (ou *pgdc*) de deux nombres naturels est le produit des facteurs premiers communs aux deux décompositions, écrits chacun une seule fois avec son plus petit exposant.

Ainsi : $\left.\begin{array}{r}73644=2^2\cdot 3\cdot 17\cdot 19^2\\ 10098=2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 17\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}PPCM(73644;10098)=2^2\cdot 3^3\cdot 11\cdot 17\cdot 19^2\\ PGCD(73644;10098)=2\cdot 3\cdot 17\end{array}$

Exercice 6

On cherche un diviseur de 105 et de 175 pour pouvoir former des équipes. Comme le nombre d'équipes doit être maximal on s'intéresse au plus grand commun diviseur de 105 et de 175.

$$\left.\begin{array}{r}105=3\cdot5\cdot7\\175=5^2\cdot7\end{array}\right\}\Rightarrow PGCD(105;175)=5\cdot7=35$$

Chaque équipe comprend $\frac{105}{35}=3$ filles et $\frac{175}{35}=5$ garçons.

Exercice 7

On cherche un diviseur de 651 et de 465 pour pouvoir former des équipes. Comme le nombre d'équipes doit être maximal on s'intéresse au plus grand commun diviseur de 651 et de 465.

$$\left.\begin{array}{r}651=3\cdot7\cdot31\\465=3\cdot5\cdot31\end{array}\right\}\Rightarrow PGCD(651;465)=3\cdot31=93$$

On peut donc avoir 93 équipes composées de $\frac{651}{93}=7$ figurants en noir et $\frac{465}{93}=5$ en rouge.

Exercice 8

a) $\{12;30;246;4238;900810\}$ car le dernier chiffre est pair.

b) $\{12;30;27;246;900810\}$ car la somme des chiffres est un multiple de 3.

c) $\{30;325;900810\}$ car le dernier chiffre est 0 ou 5.

d) $\{27;900810\}$ car la somme des chiffres est un multiple de 9.

Exercice 9

On note n le nombre de danseurs.

n est multiple de 4 et multiple de 6, donc

$n\in\{4;8;\mathbf{12};16;20;\mathbf{24};...\}$ et $n\in\{6;\mathbf{12};18;\mathbf{24};...\}$ ainsi $n\in\{12;24;...\}$.

Note : On lit le symbole ∈ « appartient à » (voir le chapitre 2).

n n'est donc pas forcément un multiple de 24 car on a, par exemple, $n=12$ (ou 36).

Exercice 10

a)

6	3			4
-4			1	5
2	3			
2	0		q = 15	
	3			

$r = 3$

$63 = 4 \cdot 15 + 3$

c)

3	2	4	5	1	3	5
-2	7	0			2	4
	5	4	5			
	-5	4	0		q = 24	
			5			

$r = 5$

$3245 = 135 \cdot 24 + 5$

b)

2	1	8	1	2
-1	2		1	8
	9	8		
	-9	6	q = 18	
		2		

$r = 2$

$218 = 12 \cdot 18 + 4$

d)

3	2	5	0
	-0		0
3	2		

$q = 0$

$r = 32$

$32 = 0 \cdot 50 + 32$

Exercice 11

9	3	4	8	5	6	3	0	4	6	4
-9	1	3	9	2					3	0
	2	0	9	3	6					
					-0			q = 30		
	2	0	9	3	6					

$r = 20936$

$934856 = 30464 \cdot 30 + 20936$

Exercice 12

80 jours représentent 11 semaines et 3 jours car $80 = 7 \cdot 11 + 3$.

Il reviendra donc un dimanche (à la même heure que celle de son départ).

Exercice 13

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{9+10-6}{24}=\frac{13}{24}$

b) $\frac{33}{44}\cdot\frac{24}{48}-\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}=\frac{3}{8}-\frac{5}{6}=\frac{9-20}{24}=-\frac{11}{24}$

c) $\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{9-20}{12}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{-11}{12}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{11}{3}\right)=-\frac{11}{9}$

d) $\frac{112}{288}\cdot\frac{240}{96}=\frac{2^4\cdot7}{2^5\cdot3^2}\cdot\frac{2^4\cdot3\cdot5}{2^5\cdot3}=\frac{1\cdot7}{2\cdot3^2}\cdot\frac{1\cdot1\cdot5}{2\cdot1}\frac{5\cdot7}{2^2\cdot3^2}=\frac{35}{36}$

e) $\frac{15}{64}:\frac{45}{16}=\frac{15}{64}\cdot\frac{16}{45}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

f) $-\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot\left(-\frac{18}{16}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{18}{16}=\frac{4}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{25}\cdot\frac{9}{2}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{25}\cdot\frac{9}{1}=\frac{18}{25}$

g) $\dfrac{\frac{4}{9}-1-\frac{1}{3}}{\frac{14}{-15}-\frac{17}{12}:\frac{1}{8}}=\dfrac{\frac{4-9-3}{9}}{-\frac{14}{15}-\frac{17}{12}\cdot\frac{8}{1}}=\dfrac{\frac{-8}{9}}{-\frac{14}{15}-\frac{17}{3}\cdot\frac{2}{1}}=\dfrac{-\frac{8}{9}}{-\frac{14}{15}-\frac{34}{3}}=\dfrac{-\frac{8}{9}}{\frac{-14-34\cdot5}{15}}=\dfrac{-\frac{8}{9}}{\frac{-14-170}{15}}=$

$\dfrac{-\frac{8}{9}}{-\frac{184}{15}}=\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{184}=\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{184}=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{23}=\frac{5}{69}$

Exercice 14

70% de cacao dans 100[g] donne 70[g] car $\frac{70}{100}\cdot100=70$.

85% de cacao dans 200[g] donne 170[g] car $\frac{85}{100}\cdot200=170$.

a) Ainsi la masse totale de cacao est de $70+170=240$ grammes.

b) Le pourcentage de cacao dans le mélange est égal à $\frac{240}{300}=\frac{80}{100}=80\,\%$.

Exercice 15

$\frac{240[km]}{1[h]}=\frac{540[km]}{x[h]}$ donc $x=\frac{540\cdot1}{240}=\frac{54}{24}=\frac{9}{4}=2.25$.

La durée du trajet est de 2.25 heures, c'est à dire 2heures et $0.25\cdot60=15$ minutes.

Exercice 16

On note P le prix de départ et Q la quantité de départ.

Pour comparer les deux offres, on étudie le rapport entre le prix final et la quantité finale :

Avec l'offre a), on paye $P-20\,\%\cdot P=P-\frac{20}{100}P=\frac{80}{100}P=80\,\%\cdot P$ pour 100 % de Q. Le rapport prix/quantité est donc $\frac{80\,\%P}{100\,\%Q}=\frac{80P}{100Q}=\frac{4P}{5Q}$

Avec l'offre b), on paye $100\,\%\cdot P$ pour les 125 % de Q. Le rapport prix/quantité est donc $\frac{100\,\%P}{125\,\%Q}=\frac{100P}{125Q}=\frac{4P}{5Q}$.

Comme les rapports sont les mêmes, les offres sont équivalentes.

Exercice 17

On a 3 grandeurs : M le nombre de maçons, B le nombre de briques et H le nombre d'heures.

B et H sont proportionnelles car doubler le nombre de briques nécessite deux fois plus de temps.

Par contre, M et H sont inversement proportionnelles car diminuer de moitié le nombre de maçons nécessite deux fois plus de temps.

On sait que $3[M] \quad 600[B] \quad 1[H]$ et on rappelle qu'on ne peut appliquer la proportionnalité sur 2 grandeurs à la fois. Ainsi :

$$3[M] \quad 600[B] \quad 1[H] \quad \underset{\cdot 2}{\overset{\text{prop}}{\Leftrightarrow}}$$
$$3[M] \quad 1200[B] \quad 2[H] \quad \underset{:3 \;\; \cdot 3}{\overset{\text{inv. prop}}{\Leftrightarrow}}$$
$$1[M] \quad 1200[B] \quad 6[H] \quad \underset{\cdot 5 \;\; :5}{\overset{\text{inv. prop.}}{\Leftrightarrow}}$$
$$5[M] \quad 1200[B] \quad \frac{6}{5}[H]$$

Il faut donc 1 heure et 12 minutes car $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}=1+\frac{12}{60}$.

Exercice 18

Exercice 19

a)

	1				45
-	0				0.022…
=	1	0			
-	0				
=	**1**	**0**	**0**		
-		9	0		
=		**1**	**0**	**0**	

donc $\frac{1}{45}=0.0\overline{2}$

b) $\frac{0}{56}=0$

c)

	2				9
-	0				0.22…
=	2	0			
-	1	8			
=		**2**	**0**		
-		1	8		
=			**2**	**0**	

donc $\frac{2}{9}=0.\overline{2}$

d)

	3	4			8
-	3	2			4.25
=		2	0		
-		1	6		
=			4	0	
-			4	0	
=				0	

donc $\frac{34}{8}=4.25$

e)

	3	1			7				
-	2	8			4.428571				
=		**3**	**0**						
-		2	8						
=			2	0					
-			1	4					
=				6	0				
-				5	6				
=					4	0			
-					3	5			
=						5	0		
-						4	9		
=							1	0	
-								7	
=								**3**	**0**

donc $\frac{31}{7}=4.\overline{428571}$

f)

	4	5	3		8				
-	4	0			56.625				
=		5	3						
-		4	8						
=			5	0					
-			4	8					
=				2	0				
-				1	6				
=					4	0			
-					4	0			
=						0			

donc $\frac{453}{8}=56.625$

Exercice 20

a) $0.375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$

b) On pose $x=1.\overline{2}$ et on a :

$$\begin{array}{rcll} x & = & 1.\overline{2} & \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} \\ 10x & = & 12.\overline{2} & \Leftrightarrow \\ 10x-x & = & 12.\overline{2}-1.\overline{2} & \Leftrightarrow \\ 9x & = & 11 & \overset{:9}{\Leftrightarrow} \\ x & = & \frac{11}{9} & \Leftrightarrow \end{array}$$

donc $x=1.\overline{2}=\frac{11}{9}$

c) On pose $x=0.\overline{027}$ et on a :

$$\begin{array}{rcll} x & = & 0.\overline{027} & \overset{\cdot 1000}{\Leftrightarrow} \\ 1000x & = & 27.\overline{027} & \Leftrightarrow \\ 1000x-x & = & 27.\overline{027}-0.\overline{027} & \Leftrightarrow \\ 999x & = & 27 & \overset{:999}{\Leftrightarrow} \\ x & = & \frac{27}{999} & \Leftrightarrow \end{array}$$

donc $x=0.\overline{027}=\frac{27}{999}=\frac{1}{37}$

d) On pose $x=0.\overline{65}$ et on a :

$$\begin{array}{ccccc} x & = & 0.\overline{65} & \overset{\cdot 100}{\Leftrightarrow} \\ 100x & = & 65.\overline{65} & \Leftrightarrow \\ 100x-x & = & 65.\overline{65}-0.\overline{65} & \Leftrightarrow \\ 99x & = & 65 & \overset{:99}{\Leftrightarrow} \\ x & = & \dfrac{65}{99} & \Leftrightarrow \end{array}$$

donc $x=0.\overline{65}=\dfrac{65}{99}$

e) $0.24\overline{9}=0.25=\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$

f) On pose $x=10.0\overline{13}$ et on remarque que pour placer la période juste après la virgule il est nécessaire de multiplier x une fois par 10 et une autre fois par 1000. On a ainsi :

$$\begin{array}{cccc} x & = & 10.0\overline{13} & \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} \\ 10x & = & 100.\overline{13} & \Leftrightarrow \\ 1000x & = & 10013.\overline{13} & \Leftrightarrow \\ 1000x-10x & = & 10013.\overline{13}-10.0\overline{13} & \Leftrightarrow \\ 990x & = & 9913 & \overset{:990}{\Leftrightarrow} \\ x & = & \dfrac{9913}{990} & \Leftrightarrow \end{array}$$

donc $x=10.0\overline{13}=\dfrac{9913}{990}$

Exercice 21

2	5	6			2	2	5		
-2	2	5			1.	1	3	7	…
	3	1	0						
	-2	2	5						
		8	5	0					
		-6	7	5					
		1	**7**	**5**	**0**				
		-1	5	7	5				
			1	**7**	**5**	**0**			
						etc.			

donc $\dfrac{256}{225}=1.13\overline{7}$

Exercice 22

a) On pose $x=1.2\overline{23}$ et on remarque que pour placer la période juste après la virgule il est nécessaire de multiplier x une fois par 10 et une autre fois par 1000. On a ainsi :

$$\begin{array}{cccc} x & = & 1.2\overline{23} & \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} \\ 10x & = & 12.\overline{23} & \Leftrightarrow \\ 1000x & = & 1223.\overline{23} & \Leftrightarrow \\ 1000x-10x & = & 1223.\overline{23}-12.\overline{23} & \Leftrightarrow \\ 990x & = & 1211 & \overset{:990}{\Leftrightarrow} \\ x & = & \dfrac{1211}{990} & \Leftrightarrow \end{array}$$

donc $x=1.2\overline{23}=\dfrac{1211}{990}$

Exercice 23

a) $10000=10^5$

b) un milliard s'écrit 10^9

c) $1=10^0$

Exercice 24

« mille milliard de mille » $=1'000\cdot 1'000'000'000\cdot 1'000=10^3\cdot 10^9\cdot 10^3=10^{3+9+3}=10^{15}$

Exercice 25

Nombres à 1 chiffre : 1 à 9. Sous-total de chiffres = $1\cdot 9$

Nombres à 2 chiffres : 10 à 99. Sous-total de chiffres = $2\cdot 90$

Nombres à 3 chiffres : 100 à 999. Sous-total de chiffres = $3\cdot 900$

Nombres à 4 chiffres : 1000 à 9999. Sous-total de chiffres = $4\cdot 9000$

Nombres à 5 chiffres : 10000 à 99999. Sous-total de chiffres = $5\cdot 90000$

Nombres à 6 chiffres : 100000 à 999999. Sous-total de chiffres = $6\cdot 900000$

Nombres à 7 chiffres : 1000000 Sous-total de chiffres = $7\cdot 1$

Donc total de chiffres = $9+180+2700+36000+450000+5400000+7=5888896$

On divise par 3 pour avoir le nombre de secondes et on convertit en heures :

$$\frac{5888896}{3}\cdot\frac{1}{60\cdot 60}\simeq 545.268=545+\underbrace{0.268}_{\cdot 60=16.09}=545[\mathrm{h}]\ \text{et}\ 16[\mathrm{min}]$$

Il faut donc environ 545 heures et 16 minutes.

Exercice 26

Exercice 27

$$\left.\begin{array}{l}27^{2000}=(3^3)^{2000}=3^{3\cdot 2000}=3^{6000}\\ 243^{1200}=(3^5)^{1200}=3^{5\cdot 1200}=3^{6000}\end{array}\right\}\ \text{les deux nombres sont donc égaux.}$$

Exercice 28

a) On observe le dernier chiffre des puissances successives de 2 :

$2^1=2$; $2^2=4$; $2^3=8$; $2^4=16$; $2^5=32$; $2^6=64$; $2^7=128$; $2^8=256$; $2^9=512$; ...

Le dernier chiffre est successivement 2, 4, 8 et 6. Comme 100 est un multiple de 4, le dernier chiffre de 2^{100} est 6.

b) Toutes les puissances de 11 terminent par le chiffre 1 :

$11^1=11$; $11^2=121$; $111^3=1221$; ...

c) 2^{53} se termine par le chiffre 2, car $53=14\cdot 4+1$ (voir le point a)). Par ailleurs, 17 multiplié par un nombre terminant par 2 donne un nombre terminant par 4 (nous verrons au chapitre 3 comment démontrer une affirmation de ce type). Ainsi, $17\cdot 2^{53}$ termine pas le chiffre 4.

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

a) $\dfrac{1}{a^{-1}}=\dfrac{1}{\frac{1}{a^1}}=1\cdot\dfrac{a^1}{1}=a$

b) $(-a)^4=((-1)\cdot a)^4=(-1)^4\cdot a^4=1\cdot a^4=a^4$

c) $-a^4=-a^4$

d) $(-a)^3=((-1)\cdot a)^3=(-1)^3\cdot a^3=(-1)\cdot a^3=-a^3$

e) $-a^3=-a^3$

f) $(-a)^{-2}=\dfrac{1}{(-a)^2}=\dfrac{1}{a^2}$

g) $-a^{-2}=-\dfrac{1}{a^2}$

h) $(-a)^{-3}=\dfrac{1}{(-a)^3}=\dfrac{1}{-a^3}=-\dfrac{1}{a^3}$

i) $-a^{-3}=-\dfrac{1}{a^3}$

Exercice 32

a) $\dfrac{18^3\cdot 14^2}{42^3\cdot 3^4}=\dfrac{(2\cdot 3^2)^3\cdot(2\cdot 7)^2}{(2\cdot 3\cdot 7)^3\cdot 3^4}=\dfrac{2^3\cdot 3^6\cdot 2^2\cdot 7^2}{2^3\cdot 3^3\cdot 3^4\cdot 7^3}=\dfrac{2^5\cdot 3^6\cdot 7^2}{2^3\cdot 3^7\cdot 7^3}=\dfrac{2^2}{3\cdot 7}=\dfrac{4}{21}$

b) $2^2\cdot 2^3\cdot 2^5=2^{10}$

c) $\dfrac{5^7\cdot 2^7}{10000}=\dfrac{(2\cdot 5)^7}{10^4}=\dfrac{10^7}{10^4}=10^3$

d) $\dfrac{64\cdot 2^5}{4^5}=\dfrac{2^6\cdot 2^5}{(2^2)^5}=\dfrac{2^{11}}{2^{10}}=2$

e) $-1\cdot\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3\cdot\dfrac{3}{5}\cdot(-1)=-\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{27}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\right)=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{45}=\dfrac{-45-2}{90}=-\dfrac{47}{90}$

f) $-1\cdot\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{2}{5}\cdot(-3)=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{32}\right)\cdot\frac{-6}{5}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{16}\cdot\frac{3}{5}=-\frac{1}{3}-\frac{3}{80}=\frac{-80-9}{240}=-\frac{89}{240}$

Exercice 33

$$\frac{(b^4)^{-3}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-5}}{(b^3\cdot b^2)^{-1}\cdot(b^5)^3}a^8=\frac{b^{-12}\cdot a^{20}\cdot b^{10}\cdot a^8}{b^{-5}\cdot b^{15}}=\frac{a^{28}\cdot b^{-2}}{b^{10}}=\frac{a^{28}}{b^{10}\cdot b^2}=\frac{a^{28}}{b^{12}}$$

Exercice 34

a) $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)=\frac{4\cdot 5}{2}\cdot\frac{a^4b^2}{a^3b^6}=10\cdot\frac{a}{b^4}=\frac{10a}{b^4}$

b) $\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^a\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^b}{\left(\left(\frac{4}{5}\right)^b\right)^a}=\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{a+b}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{ab}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{a+b-ab}$

c) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^2\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=\left(\frac{5}{6}\right)^{3\cdot 2+4}=\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

d) $(2x^2y^{-5})(6y)\left(\frac{1}{3}x^{-1}\right)=\frac{2\cdot 6}{3}x^{2-1}y^{-5+1}=4xy^{-4}=4x\frac{1}{y^4}=\frac{4x}{y^4}$

e) $\left(\frac{2r^3s}{s^5}\right)^3\cdot\left(\frac{3s^2s}{r^4}\right)^2=\frac{2^3\cdot r^9\cdot s^3}{s^{15}}\cdot\frac{3^2\cdot s^{(2+1)\cdot 2}}{r^8}=\frac{72r^9s^9}{s^{15}r^8}=\frac{72r}{s^6}$

Exercice 35

a) $a=0.0004=4\cdot 10^{-4}$

b) $a^4=(4\cdot 10^{-4})^4=4^4\cdot 10^{-16}=256\cdot 10^{-16}=2.56\cdot 10^2\cdot 10^{-16}=2.56\cdot 10^{-14}$

c) $a^{-3}=(4\cdot 10^{-4})^{-3}=4^{-3}\cdot 10^{12}=\frac{1}{4^3}\cdot 10^{12}=\frac{1}{64}\cdot 10^{12}=0.015625\cdot 10^{12}=1.5625\cdot 10^{-2}\cdot 10^{12}=1.5625\cdot 10^{10}$

d) $a^{-1}=(4\cdot 10^{-4})^{-1}=4^{-1}\cdot 10^4=\frac{1}{4\cdot 10^4}=0.25\cdot 10^4=2.5\cdot 10^3$

e) $10^8\cdot a^{-6}=10^8\cdot(4\cdot 10^{-4})^{-6}=10^8\cdot 4^{-6}\cdot 10^{24}=\frac{1}{4^6\cdot 10^{32}}=\frac{1}{4096\cdot 10^{32}}\simeq 0.0002441\cdot 10^{32}=0.2441\cdot 10^{28}$

f) $10^{2597}\cdot a^{650}=10^{2597}\cdot\left(4\cdot 10^{-4}\right)^{650}=10^{2597}\cdot 4^{650}\cdot 10^{-2600}=10^{-3}\cdot 4^{650}=\dfrac{4^{650}}{10^{3}}$. Cette écriture n'est cependant pas celle de la notation scientifique. On peut estimer ce nombre en utilisant l'approximation suivante : $2^{10}=1024\simeq 1000=10^{3}$. Ainsi :

$$10^{-3}\cdot 4^{650}=10^{-3}\cdot\left(2^{2}\right)^{650}=10^{-3}\cdot\left(2^{2\cdot 5}\right)^{\frac{650}{5}}=10^{-3}\cdot\left(2^{10}\right)^{130}\simeq 10^{-3}\cdot\left(10^{3}\right)^{130}=10^{-3}\cdot 10^{390}=10^{387}$$

A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel il est possible d'obtenir un résultat plus précis : $10^{-3}\cdot 4^{650}\simeq 2.1827\cdot 10^{388}$ ou même exact :

$10^{3}\cdot 4^{650}=$ 2182701581790483386345768160301224671547807445237986451588458710387362744956010689569696396970782712889065417254744832405171562872480405107903542141790940459260786404887462222657892300810948926604146779472042878296222581841733 55875528081437033774664473270789295280715538909974181251762978369827386497041471311828163297605499521826773820673003961776621375689838312076779675833140117065443 57.376

Exercice 36

a) $0.07\cdot 3000\cdot 0.002\cdot 0.1\cdot 50=7\cdot 10^{-2}\cdot 3\cdot 10^{3}\cdot 2\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-1}\cdot 5\cdot 10=210\cdot 10^{-2}=2.1$

b) $0.000025\cdot 20000\cdot 0.0003\cdot 0.004\cdot 7000000=2.5\cdot 10^{-5}\cdot 2\cdot 10^{4}\cdot 3\cdot 10^{-4}\cdot 4\cdot 10^{-3}\cdot 7\cdot 10^{6}=420\cdot 10^{-2}=4.2$

Exercice 37

Pour ordonner ces nombres, on va tous les écrire sous la forme $10^{10^{a}}$ avec $a\geq 0$.

$x_1=10^{10^{10^{10}}}=10^{10^{10'000'000'000}}$ donc $a_1=10'000'000'000$.

$x_2=10^{10^{11}}$ donc $a_2=11$.

$x_3=10^{100^{10}}=10^{\left(10^{2}\right)^{10}}=10^{10^{20}}$ donc $a_3=20$.

$x_4=100000^{100}=\left(10^{5}\right)^{100}=10^{500}$ et on a $10^{10^{2}}=10^{100}<10^{500}<10^{1000}=10^{10^{3}}$ donc $2<a_4<3$.

$x_5=1^{100000^{100000}}=1^{10^{0}}$ donc $a_5=0$.

Comme $0=a_5<a_4<a_2<a_3<a_1$ on a $x_5<x_4<x_2<x_3<x_1$.

Exercice 38

a) $\sqrt{-36}\notin\mathbb{R}$ (*–36 n'est pas un nombre réel*)

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{25}=5$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^{4}=\left(\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^{2}\right)^{2}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2}=\dfrac{2^{2}}{3^{2}}=\dfrac{4}{9}$

d) $-\sqrt{144}=-12$

e) $\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{-1}}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$

g) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}=\left(\left(\sqrt{2}\right)^{2}\right)^{5}=2^{5}$

ou : $\left(\sqrt{2}\right)^{10}=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^{5}$

h) $\sqrt{0.\overline{1}}=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}}=\dfrac{1}{3}$

Exercice 39

a) $\sqrt{784}=\sqrt{2^4\cdot 7^2}=\sqrt{(2^2)^2\cdot 7^2}=2^2\cdot 7=28$

b) $\sqrt{7056}=\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 7^2}=\sqrt{(2^2)^2\cdot 3^2\cdot 7^2}=$
$2^2\cdot 3\cdot 7=84$

c) $\sqrt{52}=\sqrt{2^2\cdot 13}=2\cdot\sqrt{13}$

d) $\sqrt{7840}=\sqrt{2^5\cdot 5\cdot 7^2}=\sqrt{2^4\cdot 2\cdot 5\cdot 7^2}=$
$2^2\cdot 7\cdot\sqrt{2\cdot 5}=28\sqrt{10}$

e) $\sqrt{9801}=\sqrt{3^4\cdot 11^2}=3^2\cdot 11=99$

f) $\sqrt{450}=\sqrt{2\cdot 3^2\cdot 5^2}=\sqrt{2}\cdot 3\cdot 5=15\sqrt{2}$

g) $\sqrt{12321}=\sqrt{3^2\cdot 37^2}=3\cdot 37=111$

h) $\sqrt{108}=\sqrt{2^2\cdot 3^3}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 3}=2\cdot 3\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

Exercice 40

$$\frac{4}{\sqrt{8}}=\frac{4}{\sqrt{2^3}}=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{=1}=\frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Note : Les propriétés des racines permettent souvent des développements différents.

Par exemple : $\frac{4}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{16}{8}}=\sqrt{2}$

Exercice 41

a) $\frac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}=\frac{\sqrt{64}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{100}\cdot\sqrt{10}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

b) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{\frac{1}{27}}=\sqrt{\frac{12}{27}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}$

c) $\sqrt{\frac{7}{2}}:\sqrt{\frac{7}{32}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}:\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=4$

d) $\sqrt{50}-2\sqrt{8}-7\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot 25}-2\sqrt{2\cdot 4}-7\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{25}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}-7\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 5-2\sqrt{2}\cdot 2-7\sqrt{2}=$
$5\sqrt{2}-4\sqrt{2}-7\sqrt{2}=(5-4-7)\cdot\sqrt{2}=-6\sqrt{2}$

e) $\sqrt{27}-2\sqrt{3}+7\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 9}-2\sqrt{3}+7\sqrt{3\cdot 4}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{9}-2\sqrt{3}+7\sqrt{3}\sqrt{4}=$
$\sqrt{3}\cdot 3-2\sqrt{3}+7\sqrt{3}\cdot 2=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}+14\sqrt{3}=(3-2+14)\cdot\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

f) $\sqrt{18}+\sqrt{20}+6\sqrt{5}-3\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 9}+\sqrt{4\cdot 5}+6\sqrt{5}-3\sqrt{2\cdot 16}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}+6\sqrt{5}-3\cdot 4\sqrt{2}=$
$(3+2-12)\cdot\sqrt{2}+(2+6)\cdot\sqrt{5}=-9\sqrt{2}+8\sqrt{5}$

Exercice 42

a) $\frac{-1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}=\frac{-1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}\cdot 1=\frac{-1}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}\underset{\text{id. n°3}}{=}\frac{-1\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{6})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{5-6}=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{-1}=\sqrt{5}+\sqrt{6}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot 1=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\underset{\text{id n°3}}{=}\frac{1\cdot(1+\sqrt{2})}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}=\frac{1+\sqrt{2}}{-1}=-1-\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot 1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

e) $\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

f) $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\underset{\text{id n°3}}{=}\frac{(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=$

$\frac{3\sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{5}\sqrt{5}-\sqrt{5}\sqrt{2}}{5-2}=\frac{3\sqrt{10}+3\cdot 2-5-\sqrt{10}}{3}=\frac{1+2\cdot\sqrt{10}}{3}$

g) $\frac{4}{\sqrt{3}+1}=\frac{4}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}\underset{\text{id n°3}}{=}\frac{4(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1}=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{2}=2(\sqrt{3}-1)$

h) $\frac{9}{\sqrt{18}}=\frac{9}{\sqrt{2\cdot 9}}=\frac{9}{3\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Exercice 43

a) $\frac{\sqrt{2^{10}-2^8}}{16\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2^8(2^2-1)}}{16\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2^8}\cdot\sqrt{3}}{16\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2^8}}{16\sqrt{2}}=\frac{2^4}{16\sqrt{2}}=\frac{16}{16\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{27}{2}}\left[\sqrt{6}-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3\right]=\sqrt{\frac{27}{2}}\left[\sqrt{6}-\frac{(\sqrt{2})^3}{3^3}\right]=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{6}-\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}\cdot 27}\right]=\frac{\sqrt{27}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{27}\cdot(\sqrt{2})^2}{27}=$

$\sqrt{27}\cdot\sqrt{\frac{6}{2}}-\frac{\sqrt{3^3}\cdot 2}{27}=\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}-\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{27}=\sqrt{81}-\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot 2}{27}=9-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Exercice 44

On distingue deux cas :

- $a\geq 1$: $\frac{1}{a^3}\leq\frac{1}{a^2}\leq\frac{1}{a}\leq\frac{1}{\sqrt{a}}\leq\sqrt{a}\leq a\leq a^2\leq a^3$
- $0<a<1$: $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{a^2}>\frac{1}{a}>\frac{1}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}>a>a^2>a^3$

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercices 49 à 77

Les réponses des exercices supplémentaires (exercices 49 à 77) sont donnés dans le livre (page 29).