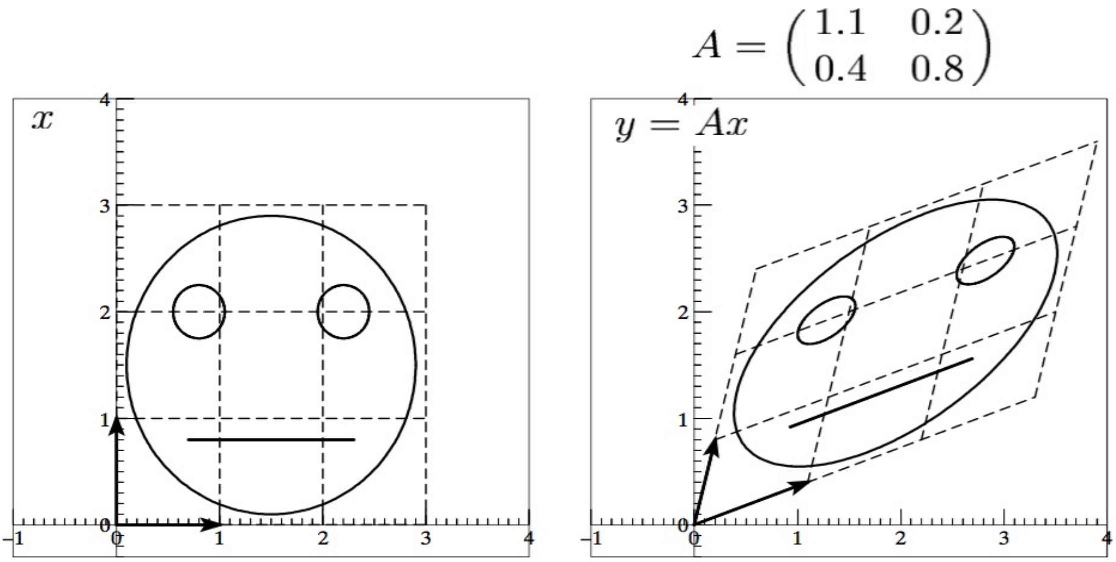
Chapitre 04 - Calcul matriciel



G. Wanner - « Géométrie » - 2004 – Université de Genève

Problème

On écrit écrit un poème en heptasyllabes (vers de 7 syllabes) en respectant les règles suivantes :

- le poème commence par le vers « Que les maths sont belles, what else! » (7 mots d'une syllabe)
- tous les mots entre 1 et 7 syllabes peuvent être utilisés ;
- deux vers distincts peuvent avoir la même structure quant aux nombres de syllabes des mots, mais alors ils n'auront pas la même succession de nombres de syllabes par mot. Par exemple : «Pythagore je vous adore», avec 3-1-1-2 syllabes suivi de « Thalès tous nous intéresse », avec 2-1-1-3 syllabes.

De combien de vers le poème se composera-t-il au maximum ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Problèmes introductifs

1 On cherche l'intersection des trois plans suivants dans l'espace :

i Π_1 contient les points A(1;2;5), B(-1;0;2) et C(3;2;-3)

ii Π_2 est orthogonal à Π_1 et contient les points D(1;-3;0) et E(1;1;1)

iii Π_3 contient la droite d d'équations $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=z-3$ et le point F(0;1;4)

a. Poser le système d'équation qui permet de modéliser ce problème.

b. Que savez-vous sur la façon de résoudre ce type de système ?

2 Utilisons GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/fr) pour explorer comment appliquer des transformations du plan à une figure donnée...

a. Quelles sont les transformations du plan que vous connaissez ?

b. Comment les manipuler efficacement...

3 Nous allons construire de nouveaux outils mathématiques qui nous permettons de rendre plus efficace la façon de traiter ces deux types de problèmes.

2 [Activité] Matrices

1 On considère la définition suivante :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice à m lignes et n colonnes** (à coefficients réels) est un tableau de nombres de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1;2;...;m\}$ et $j \in \{1;2;...;n\}$

Illustrer avec des exemples

2 Comment définir les notions suivantes : une matrice carrée ? Une matrice diagonale ? Une matrice triangulaire ? Donner des exemples.

3 Comment définir l'égalité de deux matrices ? Donner des exemples.

3 [Activité] Deux premières opérations avec les matrices

1 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -5\\1 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$. Comment définir les opérations qui permettent de calculer $A+B$, $2A$ ou encore ,-$3A+2B$?

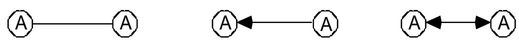
2 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}5 & -5\\1 & 2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\3 & 4 & 0\end{pmatrix}$. Que penser de $A+C$?

Voir la théorie 1-2 et les exercices 1-3

4 [Activité] Applications du calcul matriciel

A quoi peuvent bien servir les matrices ?

Un **réseau** est constitué d'un ensemble de **nœuds** et d'un ensemble de **chemins** qui assurent la liaison entre les nœuds. Les nœuds peuvent représenter des villes, des intersections de routes, des ordinateurs, des réservoirs d'eau, ou des délais dans un projet. Les nœuds représentent donc des points où un flux prend son origine, se termine ou se trouve relayé. Les chemins peuvent représenter des routes, des voies aériennes, des lignes à haute tension, des oléoducs etc. Ci-dessous sont illustrées différentes représentations de nœuds et de chemins.

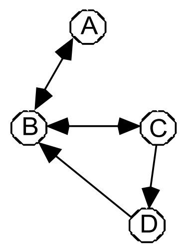


1 2 3

Dans le cas 1 il s'agit d'un **chemin non-orienté**.

Dans le cas 2 il s'agit d'un **chemin orienté**.

Dans le cas 3 il s'agit d'un **chemin bi-orienté**.



Ci-contre se trouve un exemple de nœuds et de chemins représentant les voies aériennes empruntées par une compagnie d'aviation locale desservant quatre villes A, B, C et D :

Les nœuds représentent les villes et les chemins les voies aériennes.

Le chemin bidirectionnel qui relie les nœuds A et B indique que la compagnie assure les vols de A vers B mais également de B vers A.

L'essentiel de ces relations peut être représenté par une matrice.

Chaque ligne et colonne de la matrice représente les nœuds du réseau. Les éléments de la matrice sont représentés par des 0 ou des 1 en fonction des chemins qui relient les nœuds Explicitement l'élément dans la position ij se verra assigné le nombre 1 si une liaison aérienne est assuré entre la ville i et la ville j, sinon on lui assignera le nombre 0.

La matrice ci-contre représente tous les vols directs entre les villes desservies par la compagnie aérienne ; elle est de dimension 4x4;

$$\text{de}\quad \begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array}\overset{\textit{à}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

en la multipliant par elle-même d'une certaine façon, on obtient une matrice qui résume le nombre de vols à une escale entre toutes les villes ...

On obtient le résultat suivant:

$$\text{de}\quad \begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D \end{array}\overset{\textit{à}}{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

a. Vérifier sur les schémas ci-dessus si les résultats sont cohérents.

b. Et si on multipliait ce résultat encore une fois par la matrice M, comment pourrait-on interpréter les résultats obtenus ?

5 [Activité] Multiplier deux matrices

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}-5 & -4\\ -3 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et

$F=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a. Comment définir l'opération qui permet de calculer AB ?

b. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :

i BA	v OA	ix DIB	xii I^{2345}
ii AB	vi AO	x AC	xiii CB
iii BD	vii DI	xi CA	xiv $OIBDBDD$
iv DB	viii I^3		

c. Cette opération est-elle commutative ? Conjecturer et justifier.

d. La calculatrice peut manipuler des matrices ... Elle est en particulier très utile pour les multiplications ! Explorer ces possibilités.

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 7

6 [Activité] Problème

On souhaite déterminer la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ qui passe par les trois points A=(5;102.5), B=(10;190) et C=(20;40).

a. Poser ce problème en terme de calcul matriciel.

b. A quel problème est-on confronté ? Faire le lien avec le début du chapitre ...

7 [Activité] Inverse et déterminant 2x2

1 Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le **déterminant d'une matrice carrée 2x2** est le nombre $det(A)=ad-bc$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Déterminer les déterminant suivants :

i $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

2 L'**inverse d'une matrice carrée *A*** est la matrice A^{-1} telle que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

a. Théorème :

- Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

b. Démontrer et illustrer.

c. Déterminer les matrices inverses des matrices suivantes :

i $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

ii $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

3 **Propriétés de l'inverse d'une matrice**

a. Théorème :

- $(A^{-1})^{-1}=A$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (attention à la permutation des matrices!)
- Soit A une matrice inversible et soit l'équation matricielle $AB=AC$, alors $B=C$.

Démontrer et illustrer.

b. Application des déterminants à la résolution de systèmes

Soit le système 2x2 suivant : $\begin{cases} 3x+4y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$. Monter qu'on peut l'écrire sous forme matricielle puis le résoudre directement à l'aide du calcul matriciel.

8 [Aller plus loin] Déterminant et inverse 3x3

1 La **transposée d'une matrice carrée** $A=(a_{ij})_{nxn}$ est la matrice $A^t=(a_{ji})_{nxn}$, c'est-à-dire qu'on inverse les positions des lignes et des colonnes. Déterminer les transposées suivantes :

i $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^t$

ii $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}^t$

2 Soit $A=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. Le **déterminant d'une matrice carrée 3x3** est le nombre $det(A)=a\cdot\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix}$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

3 Déterminer les déterminant suivants :

i $\begin{vmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

4 On considère le théorème suivant :

Théorème :

☐ Soit $A=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors on obtient A^{-1} ainsi:

i on calcule $det(A)$;

ii on calcule la **matrice des cofacteurs** $B=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & h \\ c & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} d & g \\ f & i \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & g \\ c & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & d \\ c & f \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} d & g \\ e & h \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & g \\ b & h \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & d \\ b & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

cette matrice est obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} par la valeur du déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j, puis en corrigeant les signes en multipliant par $(-1)^{i+j}$;

iii on prend sa transposée B^t ;

iv on obtient enfin l'**inverse de la matrice 3x3** : $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot B^t$.

☐ Soit $A=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

5 Déterminer les inverses des matrices :

i $\begin{vmatrix} 11 & -2 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

ii $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

6 Résoudre le problème de l'activité 6 avec ces outils.

7 Résoudre le problème initial du chapitre (activité 1.1) avec ces outils.

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 8 à 12

1 [A savoir] Matrices

Définition

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice à *m* lignes et *n* colonnes** (à coefficients réels) est un tableau de nombres de la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1;2;\dots;m\}$ et $j \in \{1;2;\dots;n\}$

Exemples

$M_{3x4}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 4 & \sqrt{2} & 0 & -2{,}3 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$A_{2x2}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 2 colonnes ; on parle alors de **matrice 2x2** et on notera souvent plus simplement $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, le nombre de lignes et de colonnes étant directement visible dans la matrice.

$B_{3x3}=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes; c'est une matrice 3x3.

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice.

Exemple littéral

$M_{2x3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes (avec les $a_{ij} \in \mathbb{R}$, quel que soient $i \in \{1;2\}$ et $j \in \{1;2;3\}$.

Remarque:

Le double indice ij indique dans l'ordre le numéro de la ligne et le numéro de la colonne; plus explicitement, i désigne le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne de la position de l'élément a_{ij} ; chaque position doit être occupée par un nombre réel, sinon on ne parlera pas de matrice (à coefficients réels) ; « il n'y a pas de trous »!

Notation et vocabulaire

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ une matrice mxn. On la note parfois de façon raccourcie $A=(a_{ij})_{mxn}$, qui signifie que $i\in\{1;2;\ldots;m\}$ et $j\in\{1;2;\ldots;n\}$.

Une matrice nxn (même nombre de lignes que de colonnes) est appelée **matrice carrée**; n est **l'ordre** de la matrice carrée.

Exemples

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

$B=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

Une matrice carrée *A* est dite **diagonale** si les seuls éléments non nuls se trouvent dans la diagonale.

Exemple

$C=\begin{pmatrix} 234 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Une matrice carrée B est dite **symétrique** si $(a_{ij})=(a_{ji})$, pour tous $i\in\{1;2;\ldots;m\}$ et . $j\in\{1;2;\ldots;n\}$

Exemple

$E=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 3 & 4 & 1 \\ -6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix} 0.2 & 3 \\ 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ sont des matrices symétriques.

Une matrice carrée est dite **triangulaire** si tous les éléments situés au dessus de la diagonale sont nuls ou si tous les éléments situés au dessous de la diagonale sont nuls.

Exemple

$G=\begin{pmatrix} 234 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $H=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales.

Définition

Soient $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$ deux matrices mxn .

$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$ pour tous $i\in\{1;2;...;m\}$ et $j\in\{1;2;...;n\}$

Autrement dit : **deux matrices sont égales** si elles ont la même structure (mxn) et si les éléments situés aux mêmes places sont égaux 2 à 2.

Exemple

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sont des matrices égales alors que $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ ne le sont pas.

2 [A savoir] Opérations avec les matrices

Définition « Addition de deux matrices mxn »

On définit ainsi l'**addition de deux matrices** A_{mxn} et B_{mxn} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : on additionne les éléments situés à la même position.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A+B$.

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+2 & 3+(-4) \\ (-6)+3 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque :

- on ne peut additionner que des matrices ayant la même structure ;
- si A et B sont des matrices mxn, alors $A+B$ est aussi une matrice mxn ;
- La matrice qui ne contient que des zéros est appelée **matrice nulle** ;

☐ si A et B sont des matrices mxn, alors $A+B$ est aussi une matrice mxn.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $A+B$ n'est pas définie.

Définition «Multiplication d'une matrice mxn par un scalaire »

On définit ainsi la **multiplication d'une matrice A_{mxn} par un scalaire α :**

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \ldots & \alpha\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \ldots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha\cdot a_{m1} & \alpha\cdot a_{m2} & \ldots & \alpha\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : on multiple par α tous les éléments de la matrice.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $\alpha=-3$. Calculer $\alpha\cdot A$.

$$\alpha\cdot A=(-3)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-3)\cdot 4 & (-3)\cdot 3 \\ (-3)\cdot(-6) & (-3)\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$$

Remarque : si A est une matrice mxn, alors $\alpha\cdot A$ est aussi une matrice mxn.

Voir les exercices 1 à 3

3 [A savoir] Multiplication de matrices

Définition « Multiplication d'une matrice mxn par une matrice nxp »

On définit ainsi la **multiplication des matrices** A_{mxn} et B_{nxp} :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & b_{2j} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & c_{ij} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

où c_{ij} s'obtient ainsi : $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}$, c'est-à-dire en multipliant la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B.

Exemple : soient $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

$$AB=A\cdot B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -6 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2+3\cdot 1 & 4\cdot(-4)+3\cdot 0\\ (-6)\cdot 2+2\cdot 1 & (-6)\cdot(-4)+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -16\\ -10 & 24\end{pmatrix}$$

Remarques :

☐ on ne peut procéder ainsi que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de ligne de la seconde ; en général $A_{mxn}\cdot B_{kxp}$ n'est pas défini, seul $A_{mxn}\cdot B_{nxp}$;

☐ lorsqu'une telle multiplication peut se faire, le résultat est une matrice mxp, c'est-à-dire que son nombre de ligne est égal à celui de la première matrice et son nombre de colonnes à celui de la seconde ;

☐ cette opération n'est pas commutative, c'est-à-dire que $A_{mxn}\cdot B_{nxp}\neq B_{nxp}\cdot A_{mxn}$ puisqu'en général $B_{nxp}\cdot A_{mxn}$ n'est pas défini ! Par exemple : $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ qui sont deux matrices différentes.

☐ on peut démontrer – c'est fastidieux ! - que la multiplication des matrices est associative, c'est-à-dire que $(A_{mxn}\cdot B_{nxp})\cdot C_{pxq}=A_{mxn}\cdot(B_{nxp}\cdot C_{pxq})$;

☐ les matrices carrées $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, etc... sont appelées **matrices identité** ; lorsqu'on multiplie une matrice A par une matrice identité, on obtient A.

Voir les exercices 4 à 7

4 [A savoir] Déterminants et inverses 2x2

Définitions

Soit $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Son **déterminant** est le nombre $det(A)=ad-bc$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$.

Exemple : déterminer les déterminants des matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{pmatrix}$

$det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-0\cdot 2=3$ et $det(B)=\begin{vmatrix}-3 & 6\\ 4 & -8\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-8)-4\cdot 6=0$

L'**inverse d'une matrice carrée *A*** est la matrice A^{-1} telle que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Théorème

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq 0$, alors $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

Exemple : déterminer les inverses des matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ puis vérifier que le résultat est correct en utilisant la définition de l'inverse

$A^{-1}=\frac{1}{1\cdot 3-0\cdot 2}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et B^{-1} n'existe pas car $det(B)=0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot\frac{1}{3} \\ 0\cdot 1+3\cdot 0 & 0\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 0 & 1\cdot 2+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 3 \\ 0\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0 & 0\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc A^{-1} est correcte.

Théorème « Propriétés de l'inverse d'une matrice »

- ☐ $(A^{-1})^{-1}=A$
- ☐ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (attention à la permutation des matrices!)
- ☐ Soit A une matrice inversible et soit l'équation matricielle $AB = AC$, alors $B=C$.

Remarque : ce théorème est valable aussi bien pour les matrices 2x2 que 3x3 (et même plus!).

Méthode «Résoudre un système 2x2 avec le calcul matriciel »

1. on écrit le système sous forme matricielle $AX = B$
2. on calcule l'inverse de la matrice A
3. on multiple le système (par la gauche) par A^{-1} pour obtenir $X = A^{-1}B$
4. on obtient la réponse !

Exemple : résoudre le système 2x2 suivant à l'aide du calcul matriciel: $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$.

On écrit $\begin{cases} -2x+3y=0 \\ x-y=4 \end{cases}$ sous forme matricielle :

on construit les matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, où A est la matrice des coefficients (en lignes), S celle des variables (en colonnes) et B celle des termes libres (en colonnes) puis on écrit le système comme $\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}$, soit $AS=B$.

Comme on cherche S, on peut aussi écrire

$$AS=B\Leftrightarrow A^{-1}(AS)=A^{-1}B\Leftrightarrow (A^{-1}A)S=A^{-1}B\Leftrightarrow S=A^{-1}B$$

attention : il faut bien multiplier à gauche et non à droite ... l'opération n'est pas commutative !

il faut donc d'abord déterminer A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{(-2)\cdot(-1)-3\cdot 1}\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1 & -3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

et donc $S=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+3\cdot 4\\ 1\cdot 0+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\ 8\end{pmatrix}$

les deux nombres cherchés sont $x=12$ et $y=8$

Remarque : on peut formaliser cette démarche pour en tirer des formules qui permettent d'utiliser les déterminant pour résoudre des systèmes d'équations ; ce sont les règles de Cramer (voir http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A8gle_de_Cramer pour les détails...)

Gabriel Cramer, né le 31 juillet 1704 à Genève et mort le 4 janvier 1752, était un professeur de mathématiques et de philosophie à Genève, ami de Jean Bernoulli. Une rue porte son nom dans le quartier de la Servette.

5 [Aller plus loin] Déterminants et inverses 3x3

Définition

La **transposée d'une matrice carrée** $A=(a_{ij})_{nxn}$ est la matrice $A^t=(a_{ji})_{nxn}$;
c'est-à-dire qu'on inverse les positions des lignes et des colonnes.

Exemple : déterminer $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}^t$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix}^t$

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 7\\ -3 & 0 & 5\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & 7 & 5\end{pmatrix}$

Définition

Soit $A=\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3. Son **déterminant** est le nombre

$det(A)=a\cdot\begin{vmatrix}e & h\\ f & i\end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix}d & g\\ f & i\end{vmatrix}+c\cdot\begin{vmatrix}d & g\\ e & h\end{vmatrix}$. On note : $det(A)=\begin{vmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{vmatrix}$.

Exemple : déterminer $\begin{vmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\cdot(3\cdot3-(-1)\cdot1)-1\cdot((-2)\cdot3-(-1)\cdot5)+2\cdot((-2)\cdot1-3\cdot5)=...=-33$$

$$\begin{vmatrix}0 & 4 & -2\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=0\cdot(5\cdot3-(-1)\cdot0)-2\cdot(4\cdot3-(-1)\cdot(-2))+2\cdot(4\cdot0-5\cdot(-2))=0-2\cdot10+2\cdot10=0$$

Théorème

Soit $A=\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}$ telle que $det(A)\neq0$, alors on obtient A^{-1} ainsi:

☐ on calcule $det(A)$;

☐ on calcule la **matrice des cofacteurs** $B=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}e & h\\ f & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}b & h\\ c & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}b & e\\ c & f\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}d & g\\ f & i\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & g\\ c & i\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & d\\ c & f\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}d & g\\ e & h\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a & g\\ b & h\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a & d\\ b & e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$

cette matrice est obtenue en remplaçant chaque élément a_{ij} par la valeur du déterminant de la sous-matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j, puis en corrigeant les signes en multipliant par $(-1)^{i+j}$;

☐ on prend sa transposée B^t ;

☐ on obtient enfin l'**inverse de la matrice 3x3** : $A^{-1}=\frac{1}{det(A)}\cdot B^t$.

Soit $A=\begin{pmatrix}a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i\end{pmatrix}$ telle que $det(A)=0$, alors A^{-1} n'existe pas.

Exemple : déterminer les inverses des matrices $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 2 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$

On a vu plus haut que $det(C)=0$, donc C^{-1} n'existe pas.

Pour A^{-1} , on a déjà calculé $det(A)=-33$; on détermine la matrice des cofacteurs :

$$B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3-(-1)\cdot1 & -(1\cdot3-2\cdot1) & 1\cdot(-1)-2\cdot3\\ -((-2)\cdot3-(-1)\cdot5) & 0\cdot3-2\cdot5 & -(0\cdot(-1)-2\cdot(-2))\\ (-2)\cdot1-3\cdot5 & -(0\cdot1-1\cdot5) & 0\cdot3-1\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & -1 & -7\\ 1 & -10 & -4\\ -17 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

on a ensuite : $B^t=\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}$, et enfin $A^{-1}=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10 & 1 & -17\\ -1 & -10 & 5\\ -7 & -4 & 2\end{pmatrix}$

Méthode «Résoudre un système 3x3 avec le calcul matriciel »

1 on écrit le système sous forme matricielle $AX=B$
2 on calcule l'inverse de la matrice A
3 on multiple le système (par la gauche) par A^{-1} pour obtenir $X=\ A^{-1}B$
4 on obtient la réponse !

Exemple : résoudre le système 3x3 suivant à l'aide du calcul matriciel: $\begin{cases}-2y+5z=0\\x+3y+z=4\\2x-y+3z=1\end{cases}$.

On écrit $\begin{cases}-2y+5z=0\\x+3y+z=4\\2x-y+3z=1\end{cases}$ sous forme matricielle :

on construit les matrices $A=\begin{pmatrix}0&-2&5\\1&3&1\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, où A est la matrice des coefficients (en lignes), S celle des variables (en colonnes) et B celle des termes libres (en colonnes) puis on écrit le système comme $\begin{pmatrix}0&-2&5\\1&3&1\\2&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, soit $AS=B$.

Comme on cherche S, on peut aussi écrire

$$AS=B\Leftrightarrow A^{-1}(AS)=A^{-1}B\Leftrightarrow(A^{-1}A)S=A^{-1}B\Leftrightarrow S=A^{-1}B$$

attention : il faut bien multiplier à gauche et non à droite ... l'opération n'est pas commutative !

il faut donc d'abord déterminer A^{-1} , ce qu'on a fait plus haut :

$$A^{-1}=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10&1&-17\\-1&-10&5\\-7&-4&2\end{pmatrix}$$

et donc $S=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{-33}\cdot\begin{pmatrix}10&1&-17\\-1&-10&5\\-7&-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{-33}\begin{pmatrix}10\cdot0+1\cdot4-17\cdot1\\-1\cdot0-10\cdot4+5\cdot1\\-7\cdot0-4\cdot4+2\cdot1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}\frac{-13}{-33}\\\frac{-35}{-33}\\\frac{-14}{-33}\end{pmatrix}$ les trois nombres cherchés sont $x=\frac{13}{33}$, $y=\frac{35}{33}$ et $z=\frac{14}{33}$. $S=\left\{\left(\frac{13}{33};\frac{35}{33};\frac{14}{33}\right)\right\}$

Voir les exercices 8 à 12

Matrices

1 Donner des exemples de matrices de votre choix du type M_{2x3}, M_{4x2}, M_{1x3}, M_{2x2} et M_{nxn}.

2 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,

$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 7 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et

$F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Calculer :

a. $D + B$

b. $D + I$

c. $B + A$

d. $O + D$

e. $C + D$

f. $2B$

g. $-3D$

h. $\sqrt{2}\cdot I$

i. $2E$

j. $-F$

k. $O - B + 4D$

3 Les matrices peuvent servir à représenter les déplacements de personnes ou d'animaux d'une région à une autre. On utilisera à cette fin une **matrice** dite **de transition** qui décrit en pourcentage la transition d'une région à une autre et une **matrice** dite **de population** qui indique la répartition de la population par rapport à chacune des régions concernées.

Si les schémas de transition ne varient pas au cours du temps (ce qui veut dire que la matrice de transition est constante) alors on peut considérer qu'une situation d'équilibre est atteinte lorsque la population de chaque région reste stable. Lorsque la situation d'équilibre est atteinte, on peut se rendre compte qu'une augmentation de la population dans une région donnée est compensée par une diminution de cette même population durant la période considérée.

Imaginer que le coût de l'énergie dans le nord d'un pays d'Europe augmente et semble être la cause d'une migration de la population du nord vers le sud du pays selon les proportions indiquées voir le schéma ci-dessous :

Soit P_N la population au nord du pays pour une année donnée et P_S la population au sud du pays pour la même année.

Le tableau suivant est représentatif de la situation décrite ci-dessus :

Le nombre 0,95 dans le tableau indique que 95% de ceux qui habitent le nord habiteront encore au nord l'année suivante. Le nombre 0,05 représente les 5% qui migreraient du nord au sud durant l'année suivante.

Le nombre 0,98 dans le tableau indique que 98% de ceux qui habitent le sud habiteront encore le sud l'année suivante. Le nombre 0,02 représente les 2% qui migreront du sud au nord durant l'année suivante.

Pour simplifier la suite de la discussion, on supposera que les paramètres 0,95 et 0,98 reflètent l'effet global dû aux naissances, décès, immigration et émigration au cours de l'année.

Supposons de plus que la population totale est de 70 millions d'habitant, en d'autres termes – si l'unité de calcul est le million - que $P_N + P_S = 70$.

a. Trouver une matrice S pour transcrire les informations dans le tableau ci-dessus.

b. Trouver une matrice P pour décrire la population du pays.

c. A l'aide d'une formule déterminer la population P'_N au nord P'_S et au sud du pays l'année suivante.

L'équilibre est atteint lorsque $P_N = P'_N$ et $P_S = P'_S$.

d. Montrer que la population est stable si les conditions suivantes sont réalisées $0{,}95P_N + 0{,}02\,P_S = P'_N$ et $0{,}05P_N + 0{,}98\,P_S = P'_S$

e. Déterminer P_N et P_S de telle sorte que la population soit stable.

f. Imaginer une opération entre matrices qui permet de répondre à la question c).

g. En utilisant l'opération déterminée ci-dessus entre matrices, déterminer une condition pour décrire l'équilibre de la population.

Voir la théorie 1 à 2

Multiplier des matrices

4 Soient les matrices

$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$,

$D=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$E=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 7 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\end{pmatrix}$.

Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :

a. BA

b. AB

c. BD

d. DB

e. OA

f. AO

g. DI

h. I^3

i. DIB

j. AC

k. CA

l. I^{2345}

m. CB

n. ACB

o. $OIBDBDD$

5 Démontrer le résultat suivant :

AB et BA existent les deux $\Leftrightarrow$ A et B sont des matrices carrées.

6 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Calculer $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

7 Soient les matrices $A=\begin{pmatrix}\cos(2a) & \sin(2a)\\ \sin(2a) & \cos(2a)\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Effectuer les opérations suivantes :

a. A^2 **b.** B^3 **c.** C^2

Voir la théorie 3

Déterminants et inverses

8 Déterminer les déterminants et les matrices inverses des matrices suivantes :

a. $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c. $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 9 & 6\end{pmatrix}$

d. $D=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

e. $E=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}$

9 Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice $A=\begin{pmatrix}2a & a\\ -3 & a\end{pmatrix}$ n'est-elle pas inversible?

10 Résoudre les systèmes suivants avec le calcul matriciel :

a. $\begin{cases}2x+5y=-1\\ -3x-2y=4\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}-3x+6y=1\\ -2x+4y=3\end{cases}$

11 Déterminer, lorsque cela est possible, la matrice inverse de chacune des matrices suivantes et vérifier le résultat obtenu en effectuant les produits dans les deux sens de la matrice donnée par son inverse :

a. $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ **b.** $F=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

12 Résoudre le système suivant avec le calcul matriciel : $\begin{cases}x-y+2z=-1\\ 2y-z=1\\ 3x+z=1\end{cases}$

Voir la théorie 4 à 6

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.»

Pierre-Simon De Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749-1827) »

A savoir en fin de chapitre

Matrices et opérations entre matrices

✔ matrices ;matrice carrée, diagonale, triangulaire ; égalité entre deux matrices ;

✔ addition de deux matrices ; multiplication d'une matrice par un scalaire ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Multiplier des matrices

✔ multiplication de deux matrices ;

✔ applications du calcul matriciel ;

Voir la théorie 3 et les exercices 4 à 7

Déterminants et matrices inverses

✔ déterminant et inverse d'une matrice 2x2 ; application à la résolution d'un système 2x2 ;

✔ * déterminant et inverse d'une matrice 3x3 ; application à la résolution d'un système 3x3 ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 8 à 12

Quelques compléments en ligne

en particulier des vidéos explicatives ...

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-4e/complements/ch04