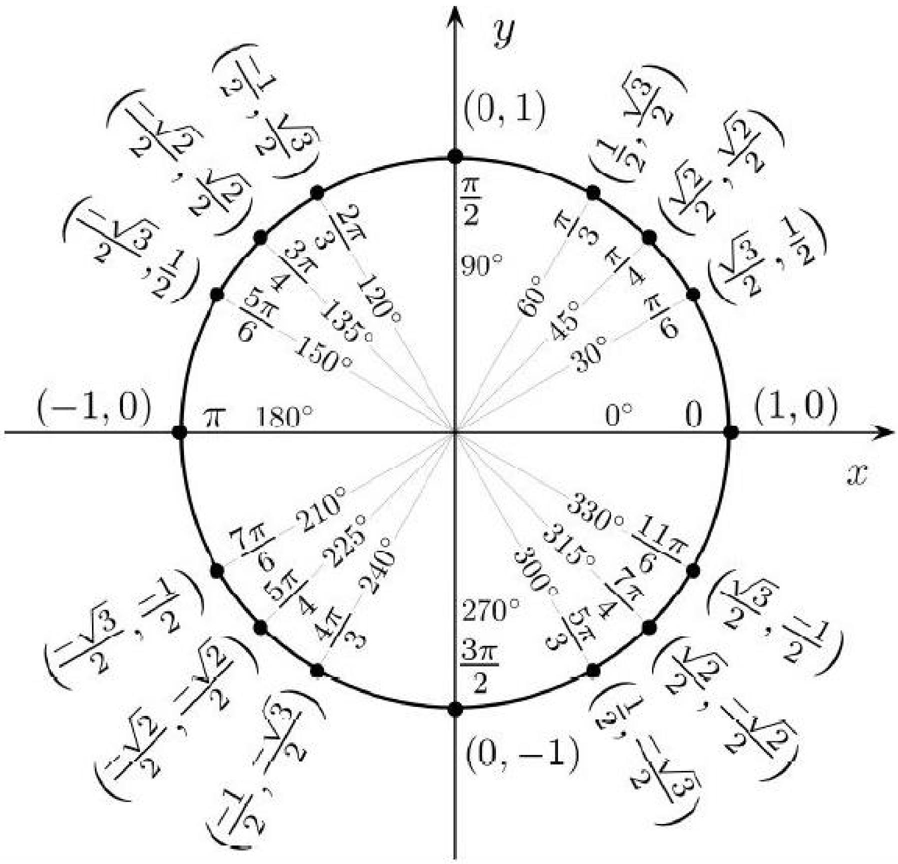
Chapitre 09 - Fonctions trigonométriques



Le cercle trigonométrique

Problème

Une nouvelle espèce de lutins a été trouvée ... Ils naissent un jour où le jour, le mois et les deux derniers chiffres de l'année sont identiques. Les premiers lutins du XXIe siècle sont apparus le 01-01-01, soit le 1er janvier 2001 qui était un lundi. Les suivants sont nés le 02-02-02, soit le 2 février 2002. En quel jour de la semaine sont nés les lutins 12-12-12 ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] Rappels sur les angles et leur mesure

1 Comment définit-on un angle ?

2 La mesure d'un angle est un nombre réel positif qu'on associe à un angle. Il existe différentes unités de mesure : un angle est couramment mesuré en **degrés** décimaux (par exemple 28,5°) ou en **degrés-minutes-secondes** (par exemple 34°23'41''). Comment la mesure en degré est-elle définie ?

3 Convertir :

a. 28,5° en degrés-minutes-secondes.

b. 34°23'41'' en degrés décimaux.

4 Remarque : on peut également mesurer les angles en **grade** ; c'est pour cela que sur votre calculatrice on trouve encore parfois cette possibilité de paramétrage ... Comment la mesure en grade est-elle définie ? Combien y a-t-il de degrés dans un angle de 1 grade ?

2 [Activité] Drôles de degrés

Une voiture roule en ville sur une chaussée sale et plate. Elle passe inévitablement sur un chewing-gum qui se colle sous le pneu avant droit dont le rayon mesure 30 cm.

Après 3 secondes, elle a parcouru 30 mètres. Quel est l’angle arrondi au degré que forme le chewing-gum avec la verticale :

5730° ?   330° ?   30° ?   0° ?   -30° ?   Autre ?

3 [Activité] Une nouvelle mesure

1 Rappel : la relation entre la mesure en degré α d’un angle au centre dans un cercle de rayon R et la longueur L de l'arc de cercle intercepté est donnée par la formule $\frac{\alpha°}{360°}=\frac{L}{2\pi R}$. Illustrer.

2 Le radian est une nouvelle mesure d'angle un peu plus complexe; il s'agit de l'unité qu'on utilise quant on étudie la trigonométrie dans le cadre de l'analyse mathématique.
Un **radian**, que l’on note 1**[rad]**, est la mesure d'un angle α qui, placé au centre d'un cercle, intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle. Illustrer cette définition par un schéma explicatif sur un cercle trigonométrique.

3 La **mesure d'un angle** α **en radian** est le rapport entre la longueur L de l'arc intercepté et le rayon R lorsque cet angle est placé au centre du cercle : $\alpha[rad]=\frac{L}{R}$. Illustrer avec des exemples.

4 Etudier le cas particulier lorsque cet angle est placé au centre d'un cercle trigonométrique.

5 Combien y a-t-il de radians dans un angle plat de 180° ?

6 Combien y a-t-il de degrés dans un angle de 1 [rad] ?

7 Les angles suivants sont exprimés en radians : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$. Les convertir en degrés sans utiliser la calculatrice puis les représenter dans le cercle trigonométrique.

8 Comment fait-on pour utiliser la mesure d'angle en radians avec la calculatrice ?

9 Les angles suivants sont exprimés en radians : $\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{\pi}{18}$; 1; 3; ; 3,14 ; 5,5. Les convertir en degrés avec la calculatrice (réponses arrondies au dixième) puis les représenter dans le cercle trigonométrique.

10 Comment utiliser la calculatrice de façon efficace pour convertir des angles d'une mesure vers l'autre ?

11 Les angles suivants sont exprimés en degrés. Les convertir en radians :

a. Sans calculatrice : 30° ; 120° ; 240° ;105°

b. Avec calculatrice (réponses au millième): 30° ; 200° ; 1°; 3,25° ;122° ; 15°23' ; 51°37'22''

12 Déterminer une formule générale pour convertir en radian une mesure d'angle donnée en degré, et réciproquement pour convertir en degré une mesure d'angle donnée en radian,

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 7

4 [Activité] Sinus et cosinus

1 Rappeler la définition de $\sin(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ pour un α un angle compris entre 0° et 180°.

2 Etendre cette définition pour des angles compris entre 180° et 360°.

3 Interpréter cette définition lorsque les angles sont mesurés en radians.

4 Expliquer comment « voir » la mesure de l'angle en radian dans le cercle trigonométrique.

5 On considère les angles $\alpha=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},1,3,2\pi,\frac{8\pi}{5},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{4}$ (en radians). Représenter α, sin(α) et cos(α) dans le cercle trigonométrique.

6 Quel sens peut-on donner à un angle de mesure comprise entre 0° et -360° (en degrés) ou entre 0 et -2π (en radians) ?

7 Comment étendre la définition de sin(α) et cos(α) pour des angles de mesure négative ?

8 On considère les angles $\alpha=-\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{3},-1,-3,-2\pi,-\frac{8\pi}{5},-\frac{5\pi}{3},-\frac{7\pi}{4}$. Représenter α, sin(α) et cos(α) dans le cercle trigonométrique.

5 [Aller plus loin] Rayon de la Terre

La Terre est conçue comme sphérique dès le début du Ve siècle avant J.-C. Cette conception est l'œuvre de l'école pythagoricienne et peut-être due à Pythagore lui-même. C'est à Eratosthène (275-195 av. J.-C.), mathématicien, géographe et conservateur de la bibliothèque d'Alexandrie, que l'on doit une des premières estimations de la circonférence terrestre. Il s'appuyait sur l'observation que le soleil était exactement au zénith (c'est-à-dire à la perpendiculaire, ce qu'il mesurait en constatant que les rayons solaires éclairaient le fond des puits) au moment du solstice d'été à Syène, qui était une ville au bord du Nil (dont le nom actuel est Assouan). Ce moment de l'année étant connu avec précision, il constata qu'un obélisque dressé verticalement dans le sol faisait à Alexandrie (situé au nord de Syène et approximativement sur la même longitude) une ombre que l'on pouvait mesurer et qui correspondait à un angle de $7\frac{1}{5}°$. Il mesura à l'aide d'un bématiste[1] la distance qui sépare Alexandrie d'Assouan et qui correspond environ à 800 de nos kilomètres. Faire un schéma de cette situation et calculer avec ces données la circonférence de la Terre.

[1] *Mesure au pas régulier qui suivait les armées dans leur conquête afin de fournir des mesures aussi précises que possible de la grandeur des territoires conquis.*

6 [Activité] Tangente

1 Définir et étudier la tangente d'un angle compris entre -360° et 360° (ou -2π et 2π).

2 Représenter α et tan(α) pour $\alpha=0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi,\frac{11\pi}{6}$ et pour $\alpha=-0,-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{4},-\pi,-\frac{11\pi}{6}$.

7 [Activité] Des angles aux nombres

1 Montrer comment on peut désormais considérer non plus des angles mais directement des nombres réels quelconques x et leur associer via le cercle trigonométrique des nombres sin(x), cos(x) et tan(x).

2 Représenter x, sin(x), cos(x) et tan(x) dans le cercle trigonométrique :

a. $x = 18\pi$

b. $x = -\frac{12\pi}{5}$

c. $x = -\frac{21\pi}{4}$

d. $x = \frac{17\pi}{3}$

e. $x = -\frac{44\pi}{3}$

f. $x = \frac{22\pi}{6}$

g. x= -1

h. x= 3,14

8 [Activité] Relation entre tan, sin et cos

Démontrer que $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)}$.

9 [Activité] Valeurs exactes

Déterminer les valeurs exactes de sin(α), cos(α) et tan(α) pour $\alpha=0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ et leurs symétriques entre 0 et 2π, puis les représenter sur un cercle trigonométrique.

10 [Activité] Propriétés

1 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit $x\in\mathbb{R}$, alors on a

a. $\cos(x)=\cos(-x)$

b. $\sin(x)=\cos(\pi-x)$

c. $\tan(x)=\cos(\pi+x)$

d. $\tan(x)=\tan(\pi+x)$

2 Utiliser le cercle trigonométrique pour rappeler les propriétés essentielles de sin(α), cos(α) et tan(α).

11 [Aller plus loin] Formules trigonométriques

Démontrer que $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$ et $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

Voir la théorie 3 à 7 et les exercices 8 à 12

12 [Activité] Equations et inéquations trigonométriques

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

a. $\cos(x)=0$

b. $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\tan(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

d. $\cos^2(x)=\dfrac{1}{2}$

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

a. $2\sin(3x-\frac{\pi}{2})=-1$

b. $\cos(-x+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3 Résoudre dans $[0;2\pi[$ en utilisant une calculatrice :

a. $\sin(x)=0{,}21705$

b. $\tan(x)=3{,}159$

4 Résoudre dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

a. $\sin(x)\geq\frac{1}{2}$

b. $-2\cos(x)>\sqrt{3}$

c. $\tan^2(x)>1$

d. $\sin^2(x)\leq\sin(x)$

5 On suppose que $\cos(x)=-\frac{3}{4}, \pi<x<\frac{3\pi}{2}$. Que vaut $\sin(x)$? Répondre en valeurs exactes.

Voir la théorie 8 et les exercices 13 à 16

13 [Activité] Fonctions sinus, cosinus et tangente

1 Comment définir les fonctions réelles *sin*, *cos* et *tan* ?

2 Pour chacune des fonctions *sin*, *cos* et *tan* déterminer :

a. Quelques images.

b. Le domaine de définition.

c. L'ensemble des zéros.

d. Le tableau de signes.

e. Ses valeurs minimales et maximales.

f. Une représentation graphique.

3 Définir et étudier la **période**, l'**amplitude** et le **déphasage** des fonctions *sin*, *cos*.et *tan*.

4 Pour chacune des fonctions ci-dessous, donner la période, l'amplitude et le déphasage puis esquisser une représentation graphique :

a. $f(x)=4\sin(x)$

b. $f(x)=\sin(x-\pi)$

c. $f(x)=\sin(\frac{1}{4}x)$

d. $f(x)=-2\sin(3x)$

e. $f(x)=3\sin(-2x+\frac{\pi}{2})$

f. $f(x)=4\cos(x)$

g. $f(x)=\cos(x-\pi)$

h. $f(x)=\cos(\frac{1}{4}x)$

i. $f(x)=-2\cos(3x)$

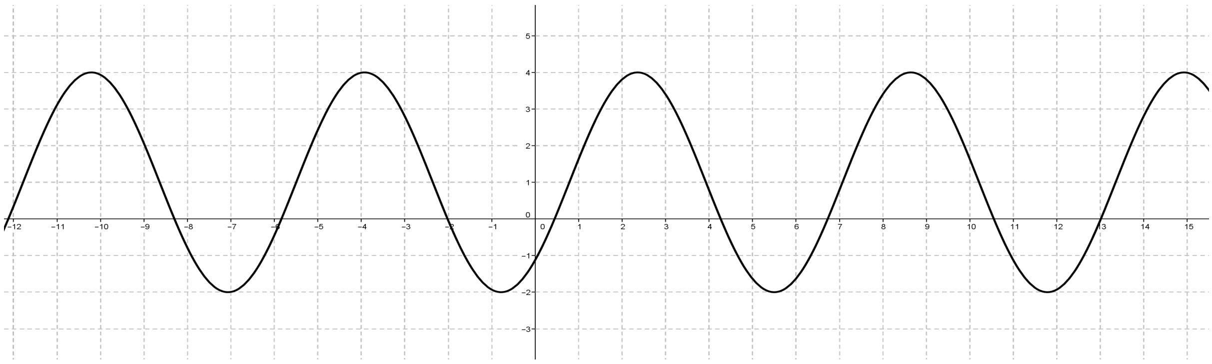
j. $f(x)=3\cos(-2x+\frac{\pi}{2})$

14 [Aller plus loin] Table numérique

Explorer la partie « trigonométrie » de la table numérique.

15 [Activité] A l'envers

Déterminer l'expression algébrique d'une fonction f dont la représentation graphique corresponde aussi précisément que possible à la courbe sinusoïdale suivante, en explicitant clairement les choix :



16 [Aller plus loin] Applications

1 L'intensité en ampères du courant dans un circuit électrique à courant alternatif au temps t en secondes est donnée par : $I(t)=30\sin\left(50\pi t-\frac{7\pi}{3}\right)$. Quelle est la plus petite valeur exacte de t pour laquelle $I=15\text{A}$?

2 Soit f la fonction définie $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$. Comment déterminer une représentation graphique à partir de celle de la fonction sin ? Comment interpréter les effets de chaque paramètre ?

17 [Aller plus loin] Fonctions trigonométriques +

Utiliser GeoGebra pour explorer les représentations graphiques de fonctions réelles de la forme $f(x)=a\sin(bx+c)+d\cos(ex+f)$ et $f(x)=a\sin(bx+c)\cos(ex+f)$.

Voir la théorie 9 à 12 et les exercice 17 à 19

1 [Souvenirs] Angles et mesure d'un angle

Définitions

☐ Un **angle** est une partie infinie du plan limitée par deux demi-droites $[BC$ et $[BA$ issues d'un même point B appelé sommet de l'angle (en fait, une telle situation définit deux angles !) ; on note $\widehat{ABC}$ si B est le sommet de l'angle.

☐ La **mesure d'un angle** est un nombre réel qu'on associe à un angle. Il existe différentes unités de mesure : un angle est couramment mesuré en **degrés (décimaux)** (par exemple 28,5°) ou en **degrés-minutes-secondes** (par exemple 34°23'41'').

☐ Pour le degré, on associe à l'angle plat la mesure 180° puis on en déduit proportionnellement la mesure des autres angles; ainsi un angle droit mesure 90° et un angle plein 360°. "Le degré, divisé en minutes et secondes qui sont des soixantièmes, vient des Babyloniens : ils comptaient en base 60 (sexagésimale). Les mathématiciens arabes ont poursuivi et mesuré les angles célestes et terrestres de la même manière. La mesure du temps de cette façon, directement issue des angles astronomiques, en a découlé."
En lire plus dans wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Degr%C3%A9

☐ Pour le grade, c'est le même principe avec une mesure de 200 [gr] pour l'angle plat. "Le grade est la conséquence du mètre, en ce sens que le mètre étant la 10 millionième partie du quart d'un méridien terreste, en divisant la totalité de la circonférence (40 000 km) par 400 gr, il résulte que 1 km = 1/100 de grade et 1 mètre = 1/100 000 de grade. Les cartes Michelin ont utilisé le grade comme unité jusqu'aux années 2000, avec pour référence d'origine l'Observatoire de Paris (la référence d'origine des degrés restant Greenwich)."
En lire plus dans wikipedia : http://fr.wikipedia.org/wiki/Grade_%28angle%29

Exemple : convertir $\alpha=38{,}413°$ en degrés-minutes-secondes

On convertit 0,413 degrés en minutes : $\dfrac{0{,}413°}{1°}=\dfrac{x'}{60'}\Rightarrow x'=0{,}413\cdot 60=24{,}78'$

puis 0,78' en secondes : $\dfrac{0{,}78'}{1'}=\dfrac{y''}{60''}\Rightarrow y''=0{,}78\cdot 60=46{,}8''\simeq 47''$

donc $\alpha\simeq 38°24'47''$

Remarque : on confond souvent les notions d'angle – un objet géométrique - et de mesure d'un angle – un nombre, pour lesquels on utilise la même notation !

2 [A savoir] Radian

☐ **Un radian**, que l'on note 1[rad], est la mesure d'un angle qui, placé au centre d'un cercle, intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon de ce cercle.
☐ La **mesure d'un angle α en radian** est le rapport entre la longueur L de l'arc intercepté et le rayon R lorsque cet angle est placé au centre du cercle : $\alpha[rad]=\dfrac{L}{R}$.

Théorème

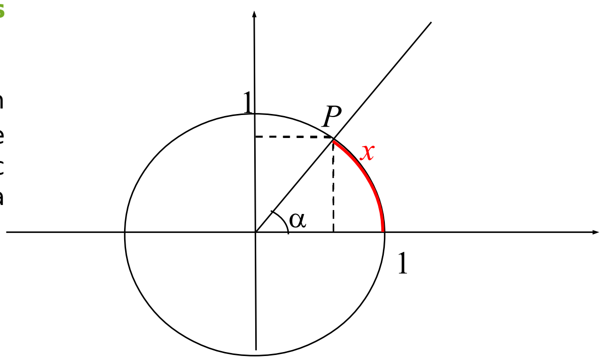
Soit α un angle. Alors on a : $\dfrac{\alpha°}{360°}=\dfrac{\alpha[rad]}{2\pi[rad]}$

Remarque : lorsqu'on calcule avec la calculatrice, attention de bien contrôler dans quelle unité se font les calculs (degré ou radian, parfois grade) !

Angle en radian dans le cercle trigonométrique

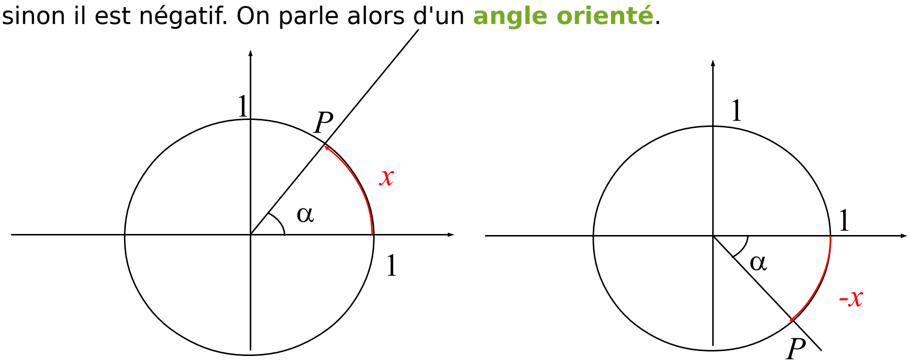
Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, centré à l'origine des axes de coordonnées, sur lequel on a défini un sens positif de rotation - le sens contraire des aiguilles d'une montre - appelé **sens trigonométrique**.

Comme le rayon vaut 1, la mesure en radians d'un angle α au centre de ce cercle est égale à la longueur de l'arc intercepté ; désormais, on la notera avec la variable x :

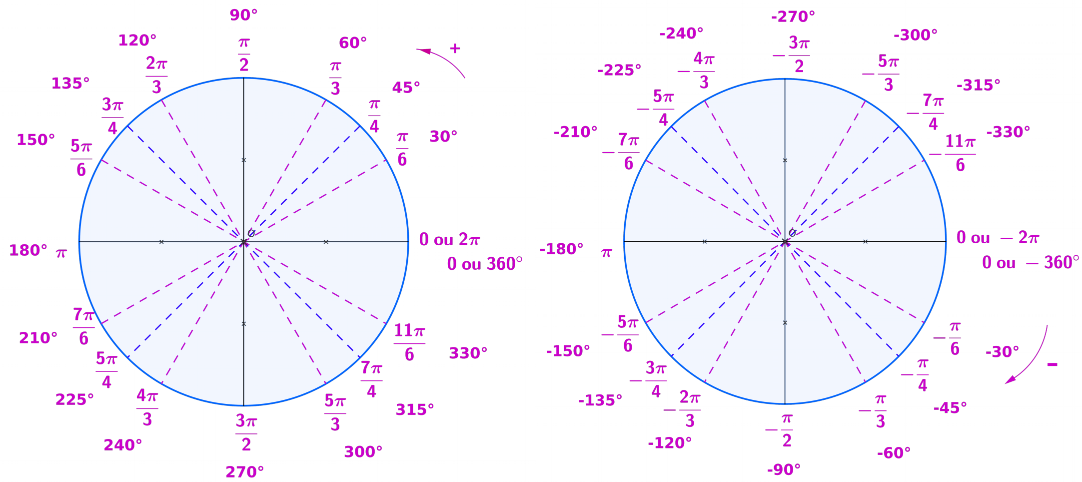


Angle orienté

Soit α un angle. On peut associer un signe à la mesure (en radians) selon « le sens dans lequel on tourne ». Si on respecte le sens trigonométrique, on considère que l'angle est positif ; sinon il est négatif. On parle alors d'un **angle orienté**.



Relation entre mesure en degré et en radian

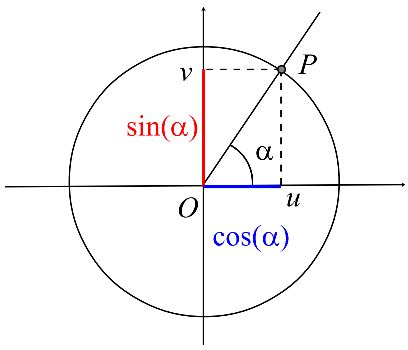


Voir les exercices 1 à 6

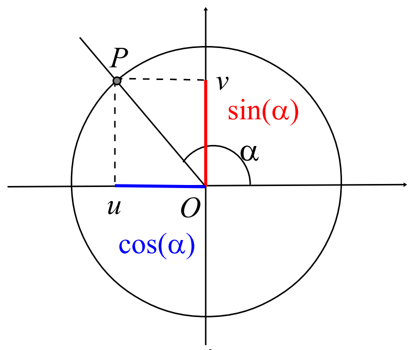
3 [A savoir] Sinus et cosinus d'un angle en radian

Rappel : définition du sinus et du cosinus pour un angle dans $]0°;180°[$

Soit $\alpha\in]0°;180°[$ mesuré en degrés. On représente cet angle au centre d'un cercle trigonométrique de telle sorte que l'une des demi-droites qui définit α soit le demi-axe positif des abscisses et l'autre une demi-droite d issue de O coupant le cercle trigonométrique dans le premier ou le deuxième quadrant. Soit $P(u;v)$ le point d'intersection de d avec le cercle trigonométrique ; on définit le sinus et le cosinus de α ainsi : $\sin(\alpha)=v$ et $\cos(\alpha)=u$



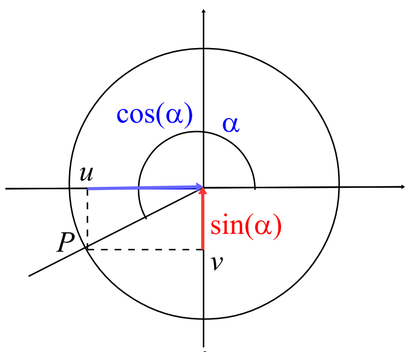
Dans le premier quadrant



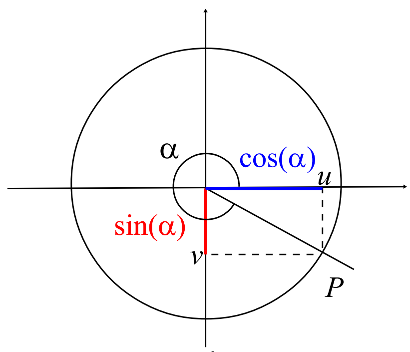
Dans le deuxième quadrant

Définition du sinus et du cosinus pour un angle dans $[0°;360°]$

On peut étendre cette définition pour un angle α dans $[0°;360°]$:



Dans le troisième quadrant

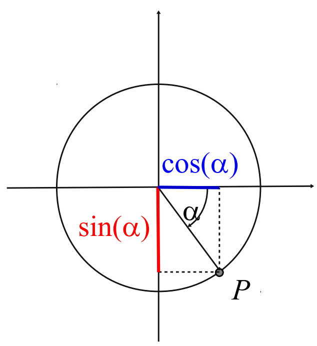


Dans le quatrième quadrant

Définition du sinus et du cosinus pour un angle orienté dans $[-360°;360°]$

On peut étendre cette définition pour un angle orienté α dans $[-360°;360°]$:

- si α est positif, c'est ce que nous venons de voir ;
- si α est négatif, on « tourne » dans le sens trigonométrique inverse (on indique alors parfois le sens avec une flèche au bout de l'arc) puis on définit sin et cos de façon identique :

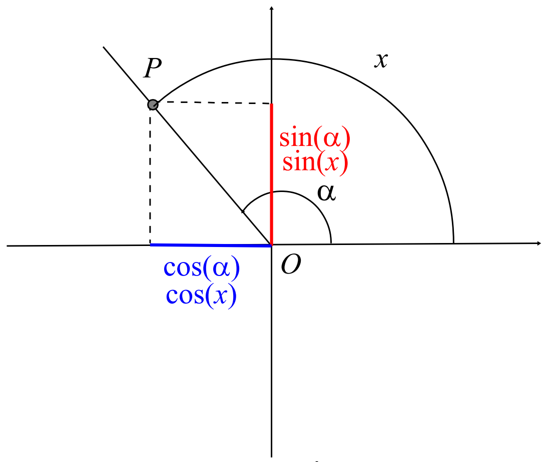


Remarque : on a ainsi

- ☐ sin(0°)=0, cos(0°)=1
- ☐ sin (90°)=1, cos(90°)=0
- ☐ sin (180°)=0, cos(180°)=-1
- ☐ sin (270°)=-1, cos(270°)=0
- ☐ sin (360°)=0, cos(360°)=1
- ☐ sin (-90°)=-1, cos(-90°)=0
- ☐ sin (-180°)=0, cos(-180°)=-1
- ☐ sin (-270°)=1, cos(-270°)=0
- ☐ sin (-360°)=0, cos(-360°)=1

Définition du sinus et du cosinus pour un angle en radians

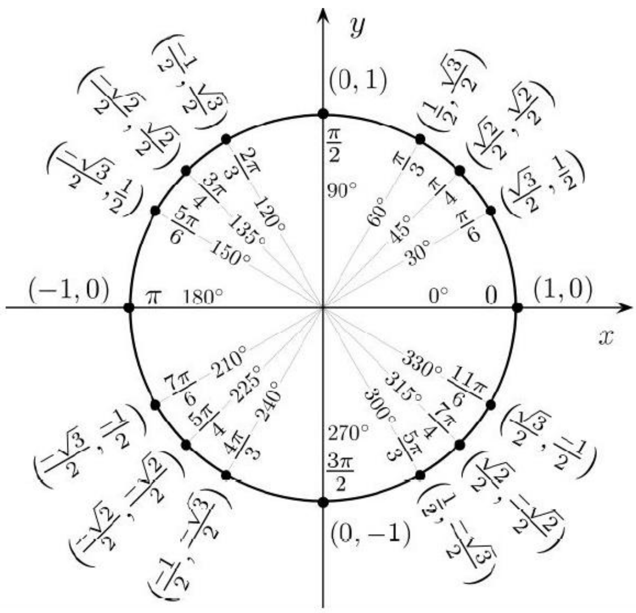
Plutôt que de considérer des mesures d'angles en degrés, on peut utiliser les radians ; rappelons qu'alors on peut « voir » la mesure en radians sur le cercle trigonométrique et qu'on la note x. Pour un angle α de mesure x en radians dans $[0;2\pi[$, on obtient le sinus et le cosinus de α de façon tout-à-fait identique ; on notera indistinctement sin(α) ou sin(x), cos(α) ou cos(x)



par ex dans le deuxième quadrant

de même pour un angle orienté α dans $[-2\pi;2\pi[$.
On écrit alors $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ pour dire « si α est de mesure $x=\frac{\pi}{2}$, alors sin(α)= 1 »

Valeurs exactes du sinus et du cosinus

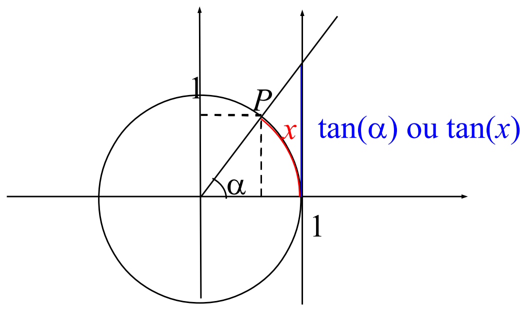


4 [A savoir] Tangente

Définition

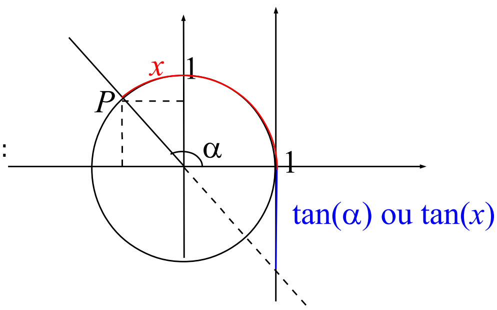
Soit α un angle de mesure x en radian. Alors on définit la tangente ainsi :

☐ pour $x \in [0;\frac{\pi}{2}[$



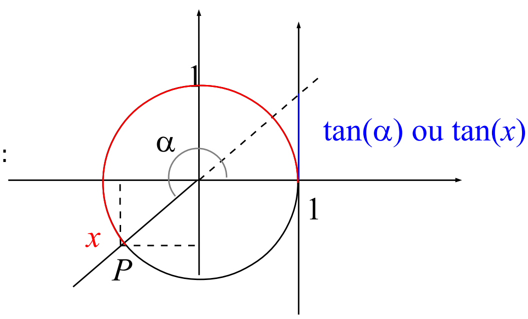
Remarque: quand x varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\tan(x)$ est positive et varie entre 0 et $+\infty$

☐ pour $x \in]\frac{\pi}{2};\pi]$:



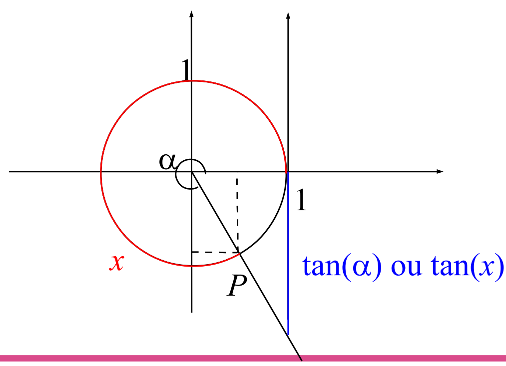
Remarque: quand x varie entre $\frac{\pi}{2}$ et π, $\tan(x)$ est négative et varie entre $-\infty$ et 0

☐ pour $x \in [\pi;\frac{3\pi}{2}[$:



Remarque : quand x varie entre π et $\frac{3\pi}{2}$, $\tan(x)$ est positive et varie entre 0 et $+\infty$

☐ pour $x \in]\frac{3\pi}{2};2\pi[$:



Remarque : quand x varie entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π , $\tan(x)$ est négative et varie entre $-\infty$ et 0

- pour $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{3\pi}{2}$, $\tan(x)$ n'est pas défini.

5 [A savoir] Sinus et cosinus d'un nombre réel quelconque

Jusque-là, nous avons considéré le sinus et le cosinus d'un angle, que sa mesure soit en degré ou en radian. Nous allons désormais nous intéresser à définir le sinus et le cosinus non plus d'un angle mais d'un nombre réel quelconque, en considérant des valeurs de x en dehors de l'intervalle $[-2\pi;2\pi[$. Pour cela, nous allons étendre – une fois de plus ! - l'idée du déplacement avec signe le long du cercle trigonométrique.

Définition du sinus, du cosinus et de la tangente pour un nombre réel x

Si x est positif ou nul : partant du point (1;0), on se déplace le long du cercle dans le sens trigonométrique jusqu'à avoir parcouru la longueur x . On se situe alors en un point $P(u;v)$ du cercle. On définit : $\sin(x)=v$ et $\cos(x)=u$
Si x est négatif : partant du point (1;0), on se déplace le long du cercle dans le sens trigonométrique inverse jusqu'à avoir parcouru la longueur x (ou plutôt $-x$!). On se situe alors en un point $P(u;v)$ du cercle. On définit : $\sin(x)=v$ et $\cos(x)=u$

Remarque : si $x>2\pi$ (respectivement $x<-2\pi$), on effectue plus d'un tour complet sur le cercle dans le sens trigonométrique (respectivement dans le sens trigonométrique inverse).

6 [A savoir] Propriétés

Théorème « Propriétés de sinus et cosinus »

- $-1\leq\sin(x)\leq1, \forall x\in\mathbb{R}$ et $-1\leq\cos(x)\leq1, \forall x\in\mathbb{R}$
- $\cos(-x)=\cos(x), \forall x\in\mathbb{R}$
- $\sin(-x)=-\sin(x), \forall x\in\mathbb{R}$
- $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$
- $\sin(\pi-x)=\sin(x), \forall x\in\mathbb{R}$
- $\cos(\pi-x)=-\cos(x), \forall x\in\mathbb{R}$
- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x), \forall x\in\mathbb{R}$
- $\cos(\frac{\pi}{2}-x)=\sin(x), \forall x\in\mathbb{R}$

Théorème « Relation tan, sin et cos »

Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Alors $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Théorème « Propriétés de la tangente »

$\tan(-x)=-\tan(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

$\tan(\pi-x)=-\tan(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$

Remarque: on peut « démontrer » ces propriétés à l'aide du cercle trigonométrique.

7 [Aller plus loin] Formules trigonométriques

Théorème «Formules de la somme »

$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)$

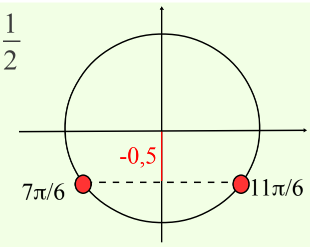
$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

Voir les exercices 7 à 11

8 [A savoir] Equations et inéquations trigonométriques

Exemple 1 : résoudre $\sin(2x)=-\frac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

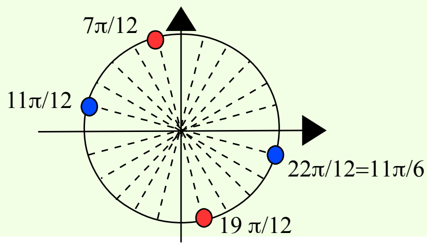
$\sin(2x)=-\frac{1}{2}$



$\Leftrightarrow 2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$

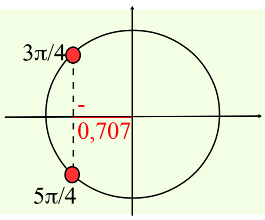
$\Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ ou $x=\frac{11\pi}{12}+k\pi$

$S=\{\frac{7\pi}{12}+k\pi;\frac{11\pi}{12}+k\pi\}$



Exemple 2 : résoudre $\cos(3x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

$\cos(3x-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$



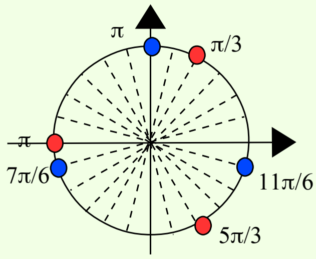
$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 3x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x=\frac{4\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } 3x=\frac{6\pi}{4}+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{4\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{6\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}$$

$$S=\{\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3};\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\}$$



Exemple 3 : résoudre $\tan(2x+\pi)=\sqrt{3}$ dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

$$\tan(2x+\pi)=\sqrt{3}$$

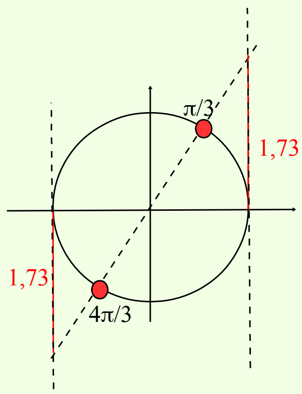
$$\Leftrightarrow 2x+\pi=\frac{\pi}{3}+k\pi$$

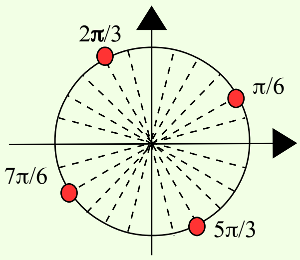
$$\Leftrightarrow 2x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$$

$$S=\{-\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\}$$





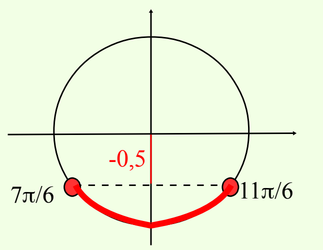
Exemple 4 : résoudre $\sin(2x)\leq-\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

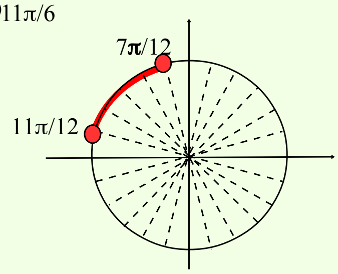
$$\sin(2x)\leq-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{6}\leq 2x\leq\frac{11\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{12}\leq x\leq\frac{11\pi}{12}$$

$$S=[\frac{7\pi}{12};\frac{11\pi}{12}]$$





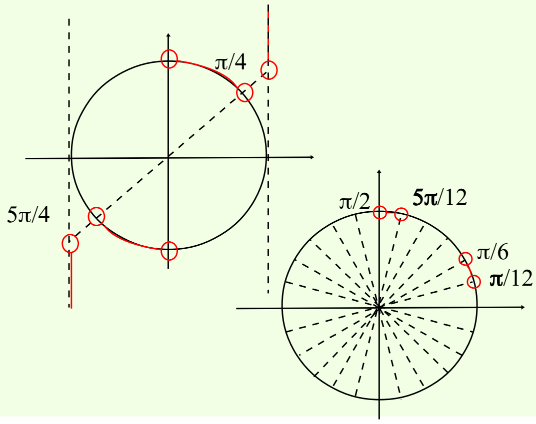
Exemple 5 : résoudre $\tan(3x) > 1$ dans $[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique :

$\tan(3x) > 1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < 3x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{4} < 3x < \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{2}$

$S =]\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{6}[\cup]\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{2}[$



Voir les exercices 12 à 15

9 [A savoir] Fonctions trigonométriques de base

Définition des fonctions sinus et cosinus

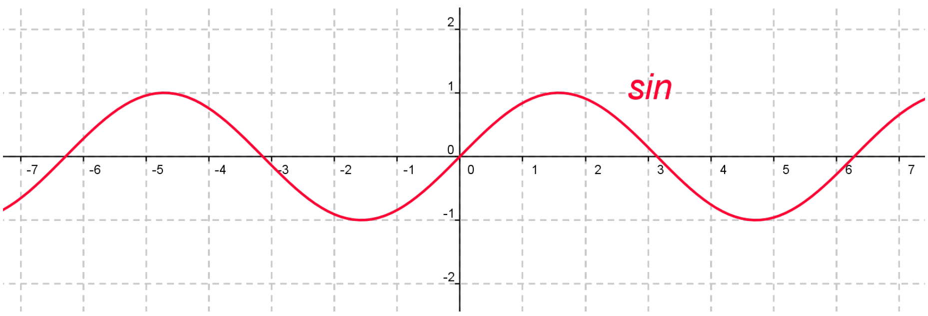
Soit x un nombre réel.

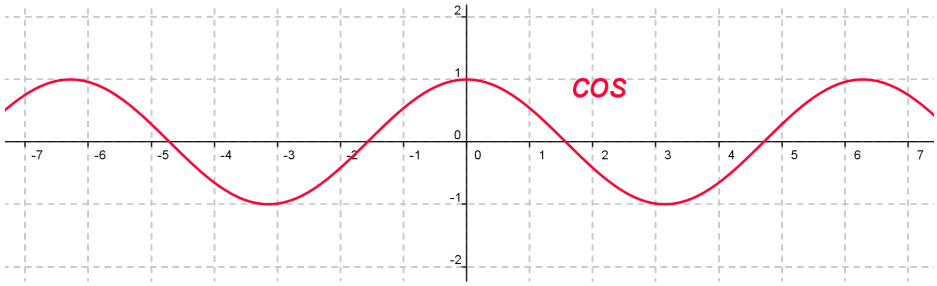
La fonction réelle **sinus** est définie par $\sin : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin(x) \end{array}$

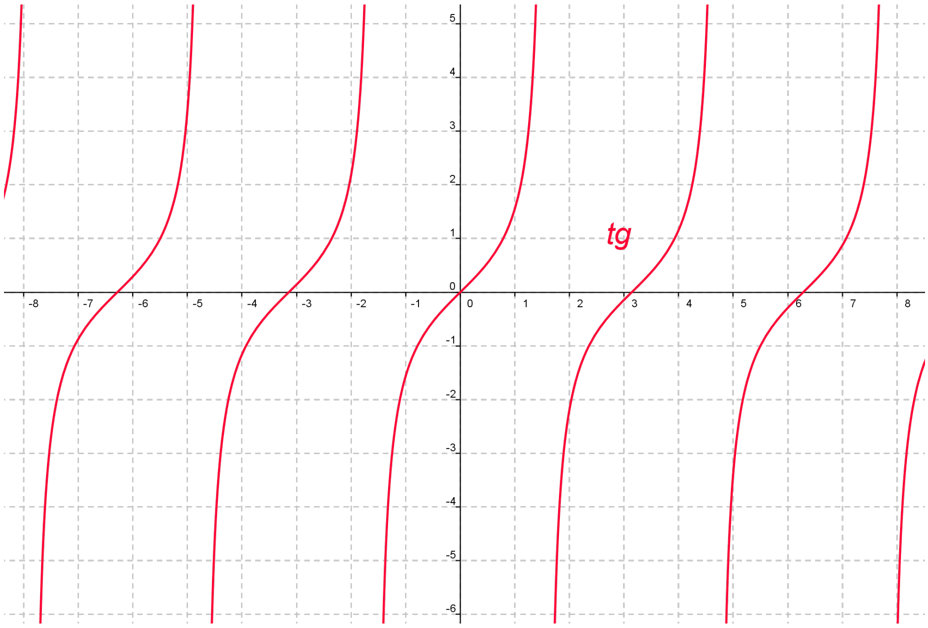
La fonction réelle **cosinus** est définie par $\cos : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \cos(x) \end{array}$

La fonction réelle **tangente** est définie par $\tan : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \tan(x) \end{array}$

Représentations graphiques







Définition

Une fonction réelle f est **périodique** si et seulement si il existe un nombre réel strictement positif P tel que $f(x+P)=f(x), \forall x \in D_f$.
Le plus petit tel nombre P s'appelle la **période** de f.

Remarque : les fonctions sin et cos sont de période 2π, tan est de période π.

10 [A savoir] Autres fonctions trigonométriques

Définition

Une **fonction trigonométrique** (ou **fonction sinusoïdale)** est une fonction dont la courbe représentative est obtenue à partir de celle de sin ou de cos en appliquant des translations, déphasages, compressions ou étirements.
Considérons par exemple la fonction réelle f déterminée par $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x-c))+d$.
En partant d'une représentation graphique de la fonction sin :

- ☐ d agit par translation verticale ;
- ☐ c agit par translation horizontale : si $c<0$, la translation s'effectue dans le sens opposé à l'orientation de l'axe, si $c>0$, la translation s'effectue dans le sens de l'orientation de l'axe ; c s'appelle le **déphasage**
- ☐ a agit par étirement vertical ; si $a<0$, la représentation graphique est « retournée »

symétriquement à l'axe Ox ; $|a|$ s'appelle l'**amplitude** (qui est donc la moitié de la distance entre le minimum et le maximum) ;

☐ *b* agit par étirement/compression horizontal(e).

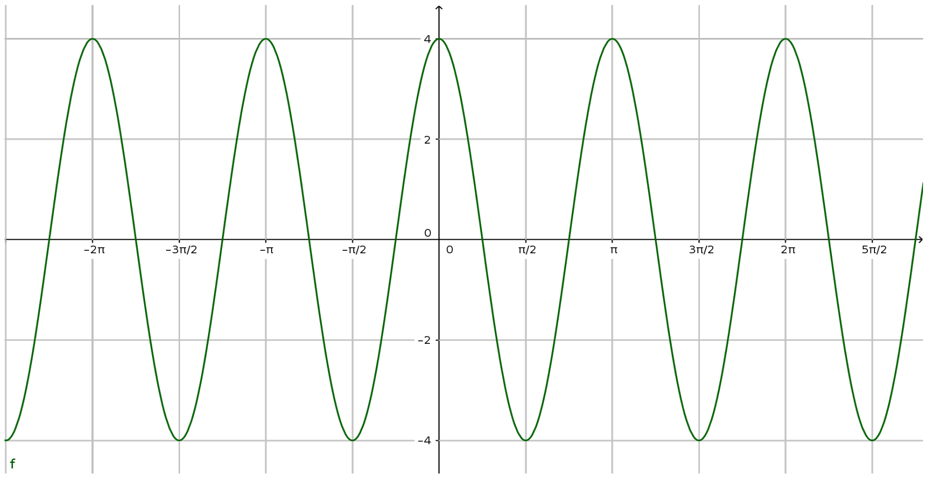
Exemple : on estime que la variation annuelle de température T (en °C) à Ottawa (Canada) en fonction du temps t en mois est donnée par la fonction $T(t)=15{,}8\cdot\sin(\frac{\pi}{6}(t-3))+5$, si $t=0$ correspond au premier janvier. Représenter graphiquement T pour $0 \leq t \leq 12$ puis calculer la température maximale de l'année et la date à laquelle cela se produit.

On obtient la représentation graphique suivante, avec en rouge ce qui concerne le problème, soit t entre 0 et 12.

On lit que la température maximale est atteinte le 1er juillet et qu'elle vaut environ 20,8°.

11 [Aller plus loin] Déterminer la fonction à partir de la courbe

Déterminer l’expression algébrique d’une fonction f dont la représentation graphique corresponde aussi précisément que possible à la courbe sinusoïdale suivante :

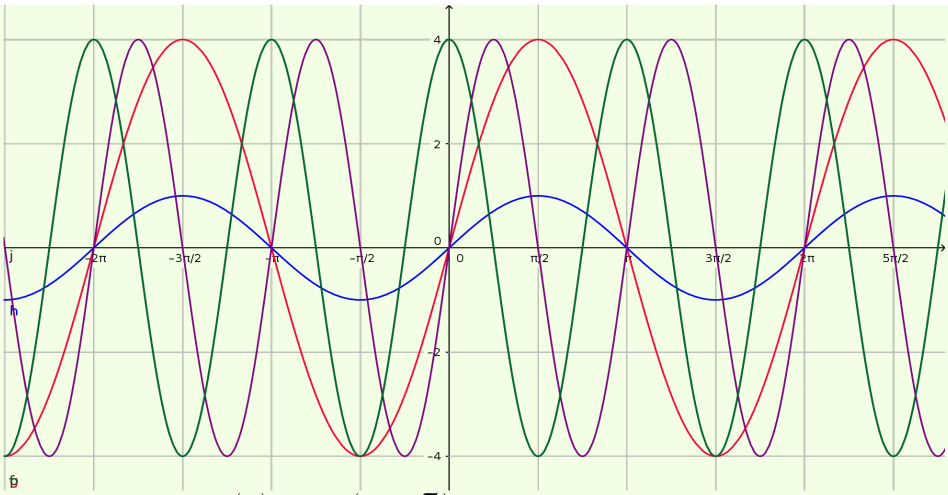


Partons de la courbe de $f_1(x)=\sin(x)$ (en bleu) ;

on commence par mettre une amplitude de 4 : $f_2(x)=4\sin(x)$ (en rouge)

il faut ajouter un facteur de compression : $f_3(x)=4\sin(2x)$ (en violet)

il ne reste plus qu'à décaler la courbe de $\frac{\pi}{4}$ vers la gauche : $f_3(x)=4\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ (en vert foncé).



Donc *f* est définie par $f(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$

Remarques : il y a d'autres façons de procéder ; et il y a plusieurs solutions possibles car $4\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ peut s'écrire de différentes façons !

12 [Aller plus loin] Déterminer algébriquement la période

Exemple : déterminer la période de la fonction *f* définie par $f(x)=2\cdot\sin\left(3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$

$$f(x)=f(x+P)\Leftrightarrow 2\cdot\sin\left(3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1=2\cdot\sin\left(3\cdot\left((x+P)+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\sin\left(3\cdot\left((x+P)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot\left((x+P)+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi \text{ ou } \pi-3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=3\cdot\left((x+P)+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$$

$$\Leftrightarrow P=-\frac{2k\pi}{3} \text{ ou pas de solution car } P \text{ dépendrait de } x$$

le plus petit tel $P>0$ est $P=\frac{2\pi}{3}$ qui est donc la période de *f*.

Remarque : on peut bien sûr déduire directement ce résultat de l'expression algébrique $f(x)=2\cdot\sin\left(3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$, puisque partant de la fonction sin, le seul facteur qui modifie la période pour arriver à $2\cdot\sin\left(3\cdot\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$ est le facteur 3 devant $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. La période initiale de sin – qui est 2π – est donc modifiée en $\frac{2\pi}{3}$

Voir les exercices 16 à 18

Exercices d'entraînement

Radians

1 Convertir les angles suivants en degrés, sans utiliser la calculatrice : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{18}$; 2π ; $\frac{5\pi}{3}$.

2 Convertir les angles suivants en degrés, en utilisant la calculatrice (réponses arrondies au dixième) : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{18}$;1,25 ; 3.14 ; 4,456

3 Convertir les angles suivants en radians avec et sans calculatrice : 45° ; 150° ; 210° ;315° ; 240° ; 135°

4 Convertir les angles suivants en radians : 1° ; 31,25° ;222° ; 35°13' ; 321°27'54''

5 Calculer, à 1 mm près, le diamètre d'un cercle sur lequel:

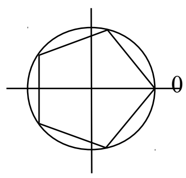
a. un arc de 1° mesure 2 mm ;

b. un arc de 0,04° mesure 0,03 mm.

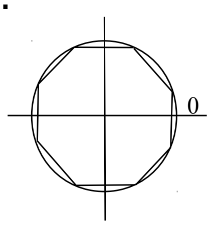
6 Deux points distincts sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de 1,5°. Quelle est la distance qui sépare ces deux points sachant que le rayon moyen de la Terre est de 6370 km ?

7 Exprimer en degrés et en radians la mesure des angles représentés sur le cercle trigonométrique par les sommets des polygones réguliers suivants (angles compris dans le premier tour positif) :

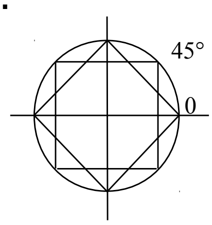
a.



b.



c.



Voir la théorie 1 à 2

Sin, cos et tan en radians

8 Représenter les angles suivants sur un cercle trigonométrique :

a. x + 180° **c.** x + 720° **e.** π - x

b. 90° - x **d.** $x + \frac{\pi}{2}$ **f.** $\frac{3\pi}{2} - x$

9 Représenter les angles suivants sur un cercle trigonométrique, ainsi que leur sinus et leur cosinus : $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$; π .

10 Représenter les angles suivants, leur sinus et leur cosinus sur un cercle trigonométrique : $\frac{35\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{-555\pi}{6}$; 45π ; $-\frac{23\pi}{4}$.

11 Reprendre les angles des deux exercices précédents et représenter leur tangente sur un cercle trigonométrique.

12 Déterminer les valeurs exactes de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ pour :

a. $x=\frac{5\pi}{4}$ **c.** $x=-\frac{\pi}{3}$ **e.** $x=\frac{29\pi}{6}$

b. $x=\frac{5\pi}{2}$ **d.** $x=5\pi$ **f.** $x=-\frac{7\pi}{3}$

Voir la théorie 3 à 7

(In)équations

13 Résoudre les équations suivantes dans ℝ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique:

a. $\sin(x)=0$

b. $\sin(2x)=0$

c. $\sin^2(x)=1$

d. $\sin^2(x)=\frac{1}{4}$

e. $\cos(3x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

f. $\cos(x-\frac{\pi}{3})=-1$

g. $2\cos(\frac{1}{4}x)=-\sqrt{2}$

h. $\cos^2(x)-\sin^2(x)=1$

14 Résoudre pour $x \in [0;2\pi[$ en utilisant une calculatrice :

a. $\cos(x) = -0{,}51812$

b. $\sin(x) = -0{,}49712$

c. $\cos(x) = -1{,}24$

d. $\tan(x) = 138{,}245$

15 Résoudre pour $x \in [0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique:

a. $\sin(x) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin(x) < \frac{1}{2}$

c. $\cos(x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $-2\cos(x) > \sqrt{3}$

16 Répondre en valeurs exactes :

a. $\sin(x) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi, \quad \cos(x) = ?$

b. $\tan(x) = 10, \quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}, \quad \sin(x) = ?$

Voir la théorie 8

Fonctions

17 On considère les fonctions réelles suivantes déterminées par leurs images :

a. $f(x) = -2\sin(3x)$

b. $f(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

c. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

d. $f(x) = 2\cos\left(\frac{3x}{4}\right)$

e. $f(x) = -2\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

f. $f(x) = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Déterminer :

i Le domaine de définition

ii Quelques images

iii L'ensemble des zéros

iv La valeur maximale et minimale prise par la fonction (si possible)

v La période

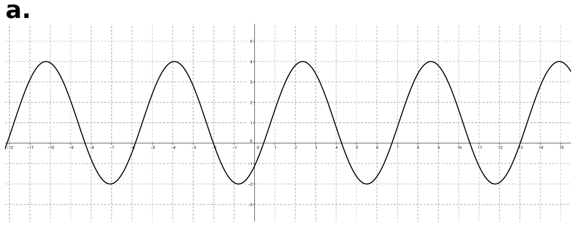
vi Un tableau de signes

vii Une représentation graphique.

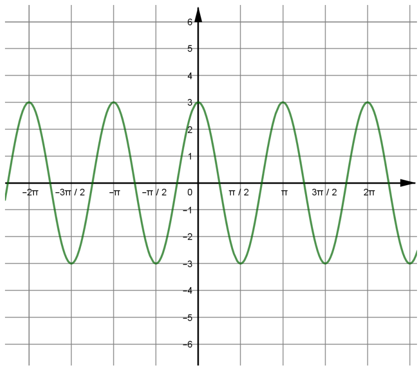
puis décomposer ces fonctions en fonctions élémentaires.

18 Déterminer l'expression algébrique d'une fonction f dont la représentation graphique corresponde aussi précisément que possible à la courbe sinusoïdale suivante, en explicitant clairement les choix :

a.



b.



19 A Boston, le nombre d'heures de lumière du jour $D(t)$ à une certaine époque de l'année peut être modélisé par :

$$D(t) = 3\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-79)\right] + 12$$

avec t en jours et t=0 correspondant au 1er janvier. Combien de jours par année y a-t-il plus de 10,5 heures de lumière du jour ?

Voir la théorie 9 à 12

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

20 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique:

a. $\cos(x)=-\frac{1}{2}$

b. $\sin(3x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\sin(\frac{x}{3})=\frac{1}{2}$

d. $3\tan(x)=-\sqrt{3}$

e. $\sin(x)=\frac{\pi}{2}$

f. $\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

g. $\cos(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$

h. $\tan(\frac{3x-\pi}{6})=1$

i. $\cos(6x+\pi)=0$

21 Résoudre pour $x\in[0;2\pi[$ et représenter les solutions sur un cercle trigonométrique:

a. $\sin(x)>\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos(3x)\leq\frac{1}{2}$

c. $\tan(x)\leq-\frac{\sqrt{3}}{3}$

d. $-2\sin(x)>\sqrt{2}$

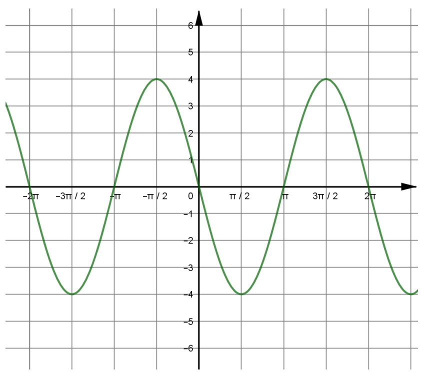
22 Déterminer l'amplitude et la période des fonctions suivantes :

a. $f(x)=5\cos(3x)$

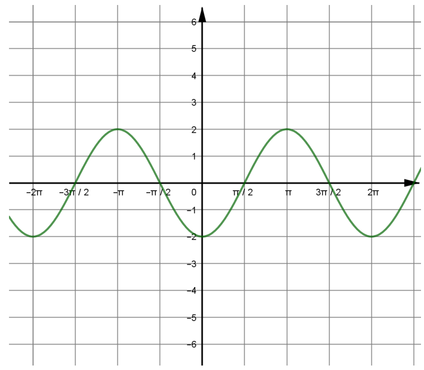
b. $f(x)=2\sin(\frac{3}{2}(x+\frac{\pi}{2}))$

23 Dans chaque cas, on a la représentation graphique d’une fonction trigonométrique. Déterminer la fonction (sinus ou cosinus), l’amplitude et la période de la fonction, puis l’expression algébrique de la fonction.

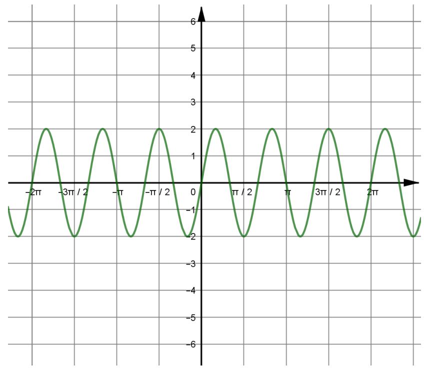
a.



b.



c.

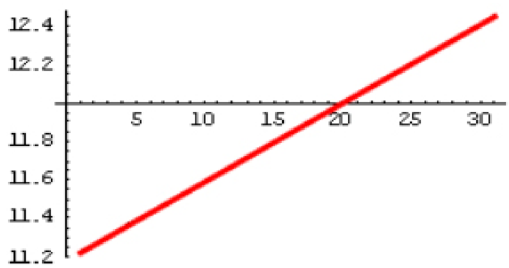


24 À Madrid, la longueur du jour D (exprimée en heures) est donnée en fonction de la date par la formule approchée :

$$D(t)=12+2{,}4\sin(0{,}0172(t-80))$$

où t est le numéro du jour depuis le début de l'année.

La figure ci-dessous montre le graphe de D durant un mois de l'année. On a en abscisse le nombre de jours écoulés depuis le début du mois en question, et en ordonnée la durée du jour en heures :



a. Pourquoi le graphe apparaît-il comme une ligne droite, bien que ce soit une fonction sinus ?

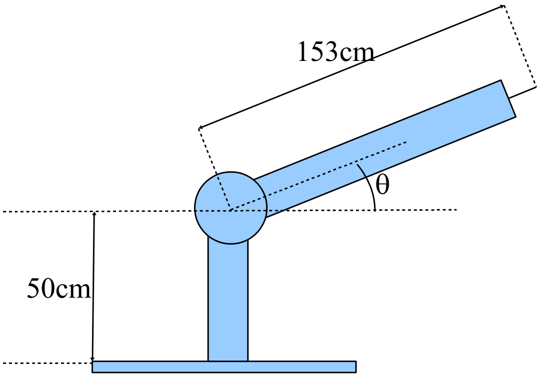
b. Quel mois montre le graphe ?

c. Quelle est la pente approximative de cette «droite» ?

d. Que représente cette pente ?

Quelle était la durée du jour le 23 mai 2007?

25 Supposons que l'articulation de l'épaule d'un robot soit motorisée de façon à ce que l'angle θ augmente à une vitesse constante de $\pi/12$ radians par seconde à partir d'un angle initial $\theta=0$. Supposons que l'articulation du coude est maintenue rigide et que le bras a une longueur constante de 153 centimètres, comme sur la figure ci-dessous :



a. Supposons que $h=50$cm si $\theta=0$. Construire le tableau qui énumère l'angle θ et la hauteur h de la main du robot chaque seconde lorsque $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

b. Déterminer si une augmentation constante de l'angle θ entraîne une augmentation constante de la hauteur de la main.

c. Trouver la distance totale parcourue par la main.

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

20

a. $S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right\}$

b. $S=\left\{\frac{4\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3};\frac{5\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right\}$

c. $S=\left\{\frac{\pi}{2}+6k\pi;\frac{5\pi}{2}+6k\pi\right\}$

d. $S=\left\{\frac{5\pi}{6}+k\pi\right\}$

e. $S=\emptyset$ car $\frac{\pi}{2}>1$

f. $S=\left\{\frac{3\pi}{2}+4k\pi;\frac{5\pi}{2}+4k\pi\right\}$

g. $S=\left\{\frac{11\pi}{8}+3k\pi;\frac{19\pi}{8}+3k\pi\right\}$

h. $S=\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$

i. $S=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{3}\right\}$

21

a. $S=\left]\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$

b. $S=\left[\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9}\right]$

c. $S=\left]\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right]\cup\left]\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right]$

d. $S=\left]\frac{5\pi}{8};\frac{7\pi}{8}\right[$

22

a. $a=4$, $P=2\pi$ et $f(x)=-4\,sin(x)$

b. $a=2$, $P=2\pi$ et $f(x)=-2\,cos(x)$

c. $a=4$, $P=2\pi/5$ et $f(x)=4\,cos(5x)$

23

a. $A=4;P=2\pi;f(x)=-4\sin(x)$

b. $A=2;P=2\pi;f(x)=-2\cos(x)$

c. $A=2;P=\frac{2\pi}{3};f(x)=2\sin(3x)$

24

a. il y a un agrandissement important qui donne l'impression qu'il s'agit d'une droite.

b. mars / **c**. 0.04

d. env. 14 h et 7 min

25 **b**. non / **c**. 240.33 cm

Exercices d'approfondissement

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis représenter les solutions contenues dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique :

a. $\cos^2(x)+\cos(x)=0$

b. $2\sin(x)\cos(x)=\sin(x)$

c. $\sin(2x)=2\sin(x)$

d. $2\sin^2(x)+\sin(x)-1=0$

e. $\cos^2(x)+2\sin^2(x)=2$

f. $2(\sin^2(x)+\sin(x))=\cos^2(x)$

g. $2\cos^2(x)-\sin^2(x)+4\cos(x)=3$

h. $\sin^2(x)+\sin(x)=\cos^2(x)$

2 Réciproques des fonctions trigonométriques :

☐ la fonction $\cos : \begin{array}{l}[0;\pi]\to[-1;1]\\ x\to\cos(x)\end{array}$ est bijective et admet une réciproque $\cos^{-1}$ appelée **arccosinus**, définie par :

$$\arccos : \begin{array}{l}[-1;1]\to[0;\pi]\\ x\to\arccos(x)\end{array},$$

avec $\cos(x)=y\Leftrightarrow\arccos(y)=x$;

☐ la fonction $\sin : \begin{array}{l}[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]\\ x\to\sin(x)\end{array}$ est bijective et admet une réciproque $\sin^{-1}$ appelée **arcsinus**, définie par :

$$\arcsin : \begin{array}{l}[-1;1]\to[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\\ x\to\arcsin(x)\end{array},$$

avec $\sin(x)=y\Leftrightarrow\arcsin(y)=x$;

☐ la fonction $\tan : \begin{array}{l}]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to\mathbb{R}\\ x\to\tan(x)\end{array}$ est bijective et admet une réciproque $\tan^{-1}$ appelée **arctangente**, définie par :

$$\arctan : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\\ x\to\arctan(x)\end{array}$$

avec $\tan(x)=y\Leftrightarrow\arctan(y)=x$

3 A partir de plusieurs années de relevés météorologiques, on a établi une fonction donnant la température moyenne T, en degrés, observée à Fairbanks, en Alaska, en fonction du jour t de l'année :

$$T(t)=10\left(2\sin\left(\frac{2\pi}{365}\cdot(t-101)\right)-1\right)$$

où $t=0$ correspond au 1er janvier.

a. Représenter graphiquement la fonction *T(t)* pour $t\in[0;365]$

b. Quel est, en moyenne, le jour le plus froid de l'année à Fairbanks ?

4 Trouver dans chacun des cas suivants une fonction du type

$$f(t)=A\sin(\omega t+\phi)+d$$

qui représente la variation de la température durant le jour, t étant le temps en heures, *f(t)* la température en °C et t = 0 correspondant à minuit :

a. La température maximale est de 10°C, et la température minimale de -10°C est atteinte à 4 heures du matin.

b. La température varie entre 10°C et 3 °C, et la température moyenne de 20°C est observée la première fois à 9 heures du matin.

c. La température maximale de 28°C est atteinte à 2 heures de l'après-midi, et la température moyenne de 20°C est notée 6 heures plus tard.

5 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

Soit x, α, β et t des nombres réels quelconques :

a. Si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$: $1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

b. Si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ et $y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$:

$$\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{1}{\cos^2(y)}=\tan^2(x)-\tan^2(y)$$

c. $(\cos(x)-\sin(x))^2=2-(\cos(x)+\sin(x))^2$

d. Si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$: $\tan(x)+\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)}=\dfrac{1}{\cos(x)}$

«Toute la géographie, la trigonométrie et l'arithmétique du monde ne servent à rien si tu n'apprends pas à penser par toi-même ».

Carlos Luis Zafon, dans « Marina » (1999), écrivain espagnol (1964-...)

A savoir en fin de chapitre

Radians

✔ mesure d'angle en degré, en radians ; conversion d'une unité à l'autre ;

✔ angles orientés ; transformation degré/radian à la main et avec la calculatrice ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 7

Sin, cos et tan pour un nombre réel quelconque

✔ définir et représenter dans le cercle trigonométrique, sin, cos et tan d'un angle orienté, en degrés entre -360° et 360°, en radians entre -2π et 2π, et d'un nombre réel quelconque ;

✔ propriétés de sin, cos et tan (symétries dans le cercle trigonométrique) ;

✔ calculer en valeurs exactes lorsque cela est possible ;

✔ utiliser la calculatrice efficacement pour calculer des angles, en particulier utiliser correctement de $\sin^{-1}$ avec la calculatrice et les mémoires pour réduire les erreurs d'arrondis ; utiliser des notations correctes : $\sin/\sin^{-1}$ ... $=/\approx$;

Voir la théorie 3 à 7 et les exercices 8 à 12

(In)équations trigonométriques

✔ équations trigonométriques - inéquations trigonométriques ;

✔ résoudre des équations trigonométriques dans $\mathbb{R}$ et représenter graphiquement les solutions dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique ;

✔ résoudre des inéquations trigonométriques dans $[0;2\pi[$ et représenter graphiquement les solutions sur un cercle trigonométrique ;

Voir la théorie 8 et les exercices 13 à 16

Fonctions trigonométriques

✔ les fonctions sin, cos et tg ; les représenter graphiquement et interpréter leurs principaux paramètres (période, amplitude, ...) ;

✔ fonctions trigonométriques : amplitude, fréquence, période, ...

Voir la théorie 9 à 12 et les exercices 17 à 19

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch09

Notes personnelles