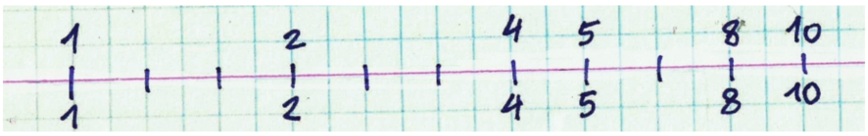
Chapitre 07 - Logarithmes

Cercle à calcul Blitz

Problème

Une règle à calculer en papier

Dans la marge d'un cahier quadrillé, recopier et découper le motif ci-dessous.
Couper ensuite aussi le long de la ligne rouge.



Découvrir comment ce petit dispositif permet d'effectuer quelques multiplications.
En déduire comment on pourrait compléter cette règle à calculer : à quelles valeurs correspondent les autres traits sans nombres?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Passer du logarithme à l'exponentielle

Remplacer les [...] par ce qui convient:

a. $\log_4(x)=5 \Leftrightarrow [\ldots]^{[\ldots]}=[\ldots]$

b. $\log_9(2)=x \Leftrightarrow [\ldots]^{[\ldots]}=[\ldots]$

c. $\log_{[\ldots]}(y)=1 \Leftrightarrow 7^{[\ldots]}=[\ldots]$

d. $\log_{[\ldots]}(2)=[\ldots] \Leftrightarrow 7^z=[\ldots]$

e. $\log_6(1296)=[\ldots] \Leftrightarrow [\ldots]^4=[\ldots]$

2 [Activité] Réciproque

2 On considère la fonction réelle f définie par $f(x)=2^x$.

a. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormé.

b. Démontrer que $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ n'est pas bijective.

c. Déterminer A et B les plus grands possibles pour que $f:A\rightarrow B$ soit bijective.

d. Représenter graphiquement la fonction réciproque f^{-1} de f dans le même repère orthonormé.

On appelle **logarithme en base 2** cette réciproque et on la note $\log_2$

3 Calculer $\log_2(2^3)$, $\log_2(2^{-4})$ et $\log_2(2^{10000})$.

4 Calculer $\log_2(16)$, $\log_2(2)$, $\log_2(\frac{1}{8})$ et $\log_2(1)$.

5 Que penser de $\log_2(0)$ et $\log_2(-2)$?

3 [Activité] Bactéries

Le nombre N de bactéries dans une culture après t heures est donné par $N=1000\cdot 2^t$ Exprimer t comme une fonction logarithmique de base 2 de N.

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 4

4 [Activité] Des équations logarithmiques ... « gentilles »!

Résoudre:

a. $\log_2(4x-5)=\log_2(2x+1)$

b. $\log_2(-4x-5)=\log_2(2x+1)$

c. $\log_3(x-5)=2$

d. $\log_{3-x}(8)=2$

5 [Activité] Premières propriétés du logarithme

Si $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, alors on a:

a. $\log_a(a)=1$ et $\log_a(1)=0$

b. $\log_a(a^x)=x$ pour tout nombre réel x.

c. $a^{\log_a(x)}=x$ pour tout nombre réel x strictement positif

d. $\log_a(x)=\log_a(y)\Leftrightarrow x=y$, pour tous nombres réels x et y strictement positifs

Illustrer par des exemples et démontrer ces propriétés.

6 [Activité] Calculer des logarithmes avec la calculatrice

1 Calculer $\log_{10}(8)$ avec la calculatrice.

2 Quels sont les deux logarithmes disponibles sur la calculatrice?

3 De quelles bases s'agit-il? Justifier.

7 [Activité] Utilité des logarithmes

Résoudre l'équation $10^x=6$

8 [Activité] Une équation logarithmique plus difficile

1 On considère l'équation $\log(2x+3)=\log(11)+\log(3)$. Pourquoi n'arrive-t-on pas à la résoudre?

2 Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ .Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. Conjecture: $\log(u\cdot v)=\log(u)\cdot\log(v)$

b. Conjecture: $\log(u\cdot v)=\log(u)+\log(v)$

3 Utiliser le point précédent pour résoudre l'équation proposée au premier point.

9 [Activité] Propriétés fondamentales des logarithmes

Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

a. Conjecture: $\log_a(u\cdot v)=\log_a(u)+\log_a(v)$

b. Conjecture: $\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{\log_a(u)}{\log_a(v)}$

c. Conjecture: $\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$

d. Conjecture: $\log_a(u^c)=c\cdot\log_a(u)$ pour tout nombre réel c

10 [Activité] Encore des équations

Résoudre

a. $\log(2x+6)-\log(20)=\log(x-1)-\log(2)$

b. $2\log_9(x)=3\log_9(2)$

c. $\log(2x-2)=\log(120x)-1$

d. $\log(4-x^2)=2\log(1-x)+1$

e. $4^{2x-1}=7^{x+2}$

f. $\log(\log(x))=2$

11 [Activité] Changer de base!

1 Explorer la formule suivante pour trouver les valeurs qui manquent: $\log_a([........])=\frac{\log_b(x)}{\log_b([........])}$.

2 Utiliser le point précédent pour trouver une méthode pour calculer $\log_3(8)$.

12 [Activité] Applications

1 Sur l'**échelle de Richter**, la magnitude d'un tremblement de terre d'intensité I est donnée par $R = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, où I_0 est une intensité minimale donnée.

a. Si l'intensité d'un tremblement de terre est 1000 I_0, calculer R.

b. Exprimer I en fonction de R et de I_0.

2 La **loi de refroidissement de Newton** énonce que la vitesse à laquelle se refroidit un objet est directement proportionnelle à la différence de température entre l'objet et l'espace ambiant. La loi de Newton peut être utilisée pour montrer que, sous certaines conditions, la température T (en °C) d'un objet au temps t (en heures) est donnée par $T = 75\,e^{-2t}$. Exprimer t en fonction de T.

3 Supposons qu'une population croisse au taux annuel de 4%. Donner approximativement le temps nécessaire pour que le nombre d'individus double (c'est-à-dire le temps de doublement de l'effectif). Comparer un modèle exponentiel « classique » avec un modèle de croissance continue.

4 Selon un rapport du GIEC (Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat), la concentration de CO_2 dans l'atmosphère terrestre était de 280 ppm (parties par million) en 1750 et de 368 ppm en 2000. En vous basant sur ces données et en admettant que la concentration de CO_2 dans l'atmosphère suive une croissance exponentielle continue :

a. Déterminer le taux de croissance annuel.

b. Calculer au millionième la concentration de CO_2 que connaîtra l'atmosphère terrestre en 2050.

c. Dans combien de temps (en années) la concentration de CO_2 de l'atmosphère terrestre atteindra-t-elle 400 ppm ?

Au rythme actuel, les experts du GIEC estiment que la concentration de CO_2 de l'atmosphère terrestre croît de 0,4% par année.

d. En tenant compte de cette dernière donnée et des deux précédentes (concentration de CO_2 en 1750 et en 2000), est-il correct d'affirmer que la concentration de CO_2 suit une croissance exponentielle régulière ? Justifier votre réponse.

13 [Aller plus loin] Un peu d'histoire et d'étymologie

a. Qui était Neper?

b. Pourquoi est-il célèbre? A quoi son nom est-il aujourd'hui attaché?

c. Quelle est l'étymologie du mot « logarithme »?

« *Une table logarithmique est une petite table par l'usage de laquelle nous pouvons obtenir une connaissance de toutes les dimensions géométriques et mouvements dans l'espace, par un calcul très facile. Elle est tirée de nombres progressant en proportion continue.* »

« *De progressions continues, une arithmétique est une qui procède par intervalles égaux ; une géométrique, une qui avance par des intervalles inégaux et proportionnellement croissants ou* *décroissants. »*

d. Expliciter ces notions de« progression arithmétique » et de « progression géométrique »?

e. Mettre en relation la progression géométrique de raison 10 avec la progression arithmétique de raison 1 et montrer le lien avec le log.

Ceci permet de calculer les logarithmes (en base 10) des puissances de 10 connues. Briggs, en 1624, dans son « Arithmetica Logarithma », à la suite de Napier, calcule à la main la suite des 54 racines carrées répétées suivantes: $10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{1}{8}}, \ldots, 10^{\frac{1}{2^{54}}}$, dont il connaît les logarithmes : $0.5, 0.25, 0.125, \ldots, \frac{1}{2^{54}}$

f. Reprendre ces calculs avec un tableur.

Reste alors à Briggs à calculer les logarithmes de valeurs intermédiaires entre ces puissances de 10 en utilisant les propriétés des logarithmes afin d'obtenir des tables de logarithmes.

g. Illustrer cette idée, toujours avec le tableur, en calculant le logarithme du produit de deux valeurs successives de la table obtenue au point précédent pour obtenir de nouveaux logarithmes, puis vérifier les valeurs obtenues en utilisant la fonction « log » du tableur.

C'est ainsi que les « anciens » établirent de premières tables de logarithmes qu'ils utilisaient pour résoudre leur problèmes numériques. Jusqu'à la diffusion des calculatrices de poches dans les écoles (dans les années 70), les élèves utilisaient de telles tables en classe!

Sources : « La construction des logarithmes de Neper », de Nicole VOGEL
http://nvogel.pagesperso-orange.fr/Dossiers/Logarithme%20n%e9p%e9rien/logNeperien.pdf

« L'histoire des logarithmes », de Simone TROMPLER (Unité de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Les Cahiers du CeDoP)
www.ulb.ac.be:8070/cedop/tools/stat.php?file=Histlogarithmes.pdf

« Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions, et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur des grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui de longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile... À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un deux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement... Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens. »

John Napier ou Neper (1550-1617) dans « Mirifici Logarithmorum canonis descriptio »
« Préface de la merveilleuse règle des Logarithmes » (1614)

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 5 à 21

1 [A savoir] Logarithmes

Définition (fonctions logarithmiques)

Comme les fonctions exponentielles sont bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, elles admettent une fonction réciproque. Ces fonctions réciproques sont les fonctions logarithmiques.
Il s'agit donc de fonctions – également bijectives – définies de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Plus précisément : soit $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \rightarrow & \exp_a(x)=a^x \end{array}$ la fonction exponentielle de base a,

alors la **fonction logarithme en base a** est la fonction réciproque de $\exp_a$.

On note $\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \log_a(x) \end{array}$ où $\log_a(x)$ est définie par $\log_a(x)=y \Leftrightarrow a^y=x$

Représentation graphique

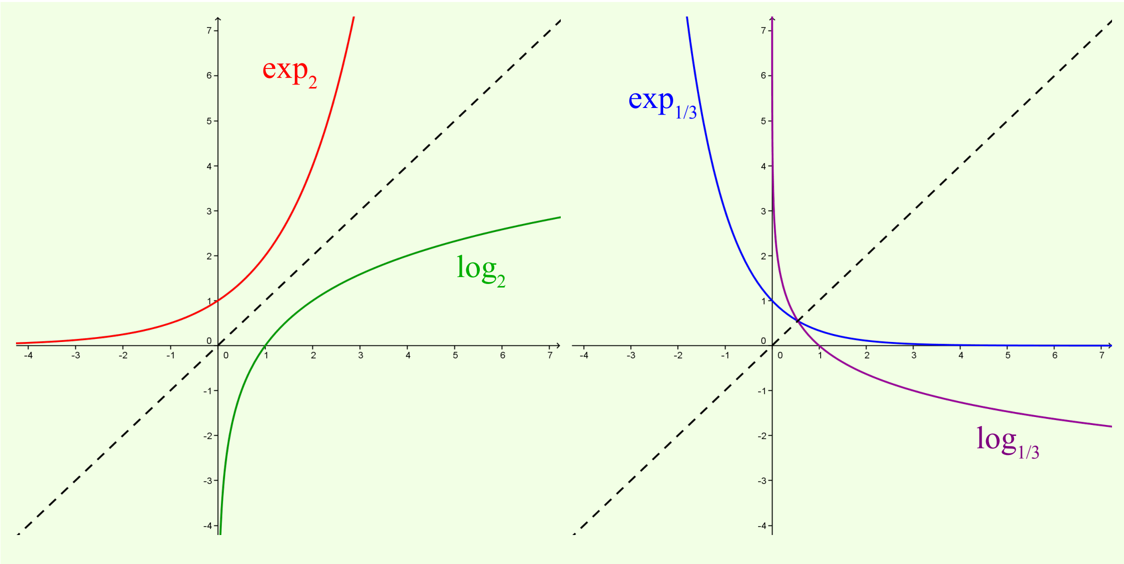
Si f est une fonction logarithmique de base a, alors :

1 Si $a>1$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2 Si $0<a<1$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Rappel: les représentations graphiques d'une fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à l'axe $y=x$.

Exemple: représentations graphiques des fonctions $\exp_2$ et $\log_2$, puis $\exp_{1/3}$ et $\log_{1/3}$:



Log et ln

1 Le logarithme de base 10, $\log_{10}$, est aussi appelé logarithme vulgaire, ou logarithme de Briggs du nom de son "inventeur". On note souvent simplement $\log_{10}=\log$. On le trouve sur toutes les calculatrices ...

2 La découverte des logarithmes est l'œuvre du baron écossais John Napier. En souvenir de cette découverte, on appelle **logarithme népérien** ou **logarithme naturel** le logarithme de base e,où e est le nombre irrationnel défini par ... et dont une approximation rationnelle est 2,71.On le note $\log_e$ ou, le plus souvent, $\ln$. C'est le second logarithme qu'on trouve sur toutes les calculatrices ...

Théorème (logarithmes)

Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors on a:

1 $\log_a(a)=1$ et $\log_a(1)=0$

2 $\log_a(a^x)=x$ pour tout nombre réel x

3 $a^{\log_a(x)}=x$ pour tout nombre réel x strictement positif

4 $\log_a(x)=\log_a(y) \Leftrightarrow x=y$, pour tous nombres réels x et y strictement positifs

Exemple: calculer $\log_3(81)$

On utilise la définition du logarithme en base 3: $\log_3(81)=x \Leftrightarrow 3^x=81 \Leftrightarrow x=4$

2 [A savoir] Calculer avec les logarithmes

Théorème (propriétés des logarithmes)

Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

1 $\log_a(u \cdot v)=\log_a(u)+\log_a(v)$

2 $\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$

3 $\log_a(u^c)=c \cdot \log_a(u)$ pour tout nombre réel c

Exemple: calculer $\log_3(81)$

On utilise les propriétés du logarithme: $\log_3(81)=\log_3(3^4)=4\log_3(3)=4 \cdot 1=4$

Remarque : $\log_a(u+v) \neq \log_a(u)+\log_a(v)$

Remarque : comme quand on doit calculer le sinus ou le cosinus d'un nombre réel, la plupart du temps, on ne peut pas obtenir un résultat exact et il faut se contenter d'une valeur approchée. La calculatrice permet d'obtenir ces valeurs dans les cas $\log_{10}=\log$ et $\log_e=\ln$.

Théorème (changement de base)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors on a: $\log_a(x)=\dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Remarque : cette formule est utile pour se ramener à l'utilisation de logarithmes dans des bases «agréables» : $\log_a(u)=\dfrac{\log(u)}{\log(a)}$ ou $\log_a(u)=\dfrac{\ln(u)}{\ln(a)}$

Exemple: calculer $\log_3(7)$

On utilise le changement de base puis la calculatrice: $\log_3(7)=\dfrac{\log(7)}{\log(3)} \simeq 1.77$

Voir les exercices 1 à 4

3 [A savoir] Résoudre une équation logarithmique

1 Déterminer le domaine de définition de l'équation

2 Transformer si nécessaire l'équation jusqu'à arriver à une équation équivalente de la forme $\log_a(expression\ 1)=\log_a(expression\ 2)$; on utilise souvent des propriétés des logarithmes ...

3 En déduire que $expression\ 1=expression\ 2$ en utilisant le fait que les fonctions logarithmes sont bijectives

4 Résoudre l'équation $expression\ 1=expression\ 2$

5 Ne garder que les solutions qui appartiennent au domaine de définition

Exemple: résoudre $\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1$

1 On doit avoir : $x-5>0$ et $x+1>0$, donc $D=]5;+\infty[$,

2 $\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1 \Leftrightarrow \log_7(x-5)+\log_7(x+1)=\log_7(7)$
$\Leftrightarrow \log_7((x-5)(x+1))=\log_7(7)$

3 d'où $(x-5)(x+1)=7$ (car la fonction $\log_7$ est bijective)

4 $(x-5)(x+1)=7 \Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2)=0$
$x=6$ ou $x=-2$

5 $6\in D$ mais $-2\notin D$, donc $S=\{6\}$

4 [A savoir] Résoudre une équation exponentielle avec les logarithmes

- ☐ 1. Prendre le log des deux membres de l'équation
- ☐ 2. Utiliser la propriété 3 des logarithmes
- ☐ 3. Isoler x

Exemple : résoudre $3^{x+2}=7$

$$3^{x+2}=7 \Leftrightarrow \log(3^{x+2})=\log(7) \Leftrightarrow (x+2)\cdot\log(3)=\log(7) \Leftrightarrow x+2=\frac{\log(7)}{\log(3)} \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\log(7)}{\log(3)}-2$$

donc $S=\left\{\frac{\log(7)}{\log(3)}-2\right\}\simeq-0{,}229$

Remarque : il faut être précautionneux lorsqu'on utilise les propriétés des logarithmes ; par exemple, l'équation $\log(x^2)=0$ n'a pas les mêmes solutions que $2\log(x)=0$!

1 [A savoir] Modélisation

Exemple : votre ancêtre a placé à la naissance de Jésus Christ deux sesterces sur un compte épargne à 1%. A combien s'élève votre compte en 2016 ? Et après combien de temps devient-il milliardaire ?

Après 1 an, le compte a $(2+0{,}01\cdot 2)=2\cdot(1+0{,}01)$ sesterces.

Après 2 ans : $2(1+0{,}01)+0{,}01[2\cdot(1+0{,}01)]=2\cdot(1+0{,}01)[1+0{,}01]=2\cdot(1+0{,}01)^2$

...

Après t ans : $C(t)=2\cdot(1+0{,}01)^t=2\cdot(1{,}01)^t$

En 2016 : $C(2016)=2\cdot(1+0{,}01)^{2016}=2\cdot(1{,}01)^{2016}\overset{C}{=}1030195246$ sesterces !

Pour devenir milliardaire : $C(t)=1000000000=2\cdot(1{,}01)^t$

on résout avec les logarithmes :

$$\begin{aligned}1000000000=2\cdot(1{,}01)^t &\Leftrightarrow 500000000=(1{,}01)^t\\ &\Leftrightarrow \log(500000000)=\log[(1{,}01)^t]\\ &\Leftrightarrow \log(500000000)=t\cdot\log(1{,}01)\\ &\Leftrightarrow t=\frac{\log(500000000)}{\log(1{,}01)}\simeq 2013{,}01\end{aligned}$$

Il devient milliardaire un peu après 2013

Voir les exercices 5 à 24

Logarithmes

1 Écrire sous forme logarithmique :

a. $3^4=81$
b. $3^{-4}=\frac{1}{81}$
c. $a^b=c$
d. $4^y=2-x$
e. $7^{3x}=\frac{u+v}{u}$
f. $0.3^x=2.7$

2 Écrire sous forme exponentielle :

a. $\log_3(81)=4$
b. $\log_3(\frac{1}{9})=-2$
c. $\log_a(c)=b$
d. $\log_4(3+y)=6$
e. $\log_8(t-1)=3$
f. $\log_a(1024)=\frac{1}{2}$

3 Calculer :

a. $\log(10^9)$
b. $\log(0.0001)$
c. $e^{\ln(5)}$
d. $\ln(e^{-6})$
e. $e^{3+\ln(2)}$
a. $100^{\log(2)}$

Voir la théorie 1 à 2

Equations logarithmiques

4 Résoudre :

a. $\log_4(x)=\log_4(8-x)$

b. $\log(x^2)=\log(-3x-2)$

c. $\log_3(x-4)=2$

d. $\log_9(x)=\frac{3}{2}$

5 Résoudre :

a. $\log_4(-x)=\log_4(8-x)$

b. $\log_7(x^2-2x)=\log_7(-2x+1)$

c. $\log_2(x)+\log_2(x+2)=3$

d. $2^x=3$

e. $5^{2x+1}=6^{x-2}$

6

a. Si l'intérêt est constant au taux de 10 % par an, calculer le nombre d'années qu'il faudra pour qu'un dépôt initial de 6'000 fr. atteigne le montant de 25'000 fr.

b. Même question si l'intérêt est capitalisé mensuellement

c. Même question si l'intérêt est continu.

7 Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\log_a\left(\frac{x^3\cdot\sqrt{y}}{z^2}\right)=a\cdot\log_a(x)+b\cdot\log_a(y)+c\cdot\log_a(z)$$

8 Démontrer la propriété suivante en Justifiant chaque étape (ne s'appuyer que sur la définition des logarithmes et les propriétés des puissances) :

Si a, q, s et t sont des nombres réels strictement positifs et si $a\neq 1$,alors

$$\log_a\left(\frac{q\cdot s}{t}\right)=\log_a(q)+\log_a(s)-\log_a(t)$$

9 Résoudre :

a. $\log_5(2x+3)=\log_5(11)+\log_5(3)$

b. $\log_2(-x)+\log_2(x-7)=3$

c. $\ln(x+6)-\ln(10)=\ln(x-1)-\ln(2)$

d. $2\log_3(x)=3\log_3(5)$

e. $\log_3(x+3)+\log_3(x+5)=1$

10 Calculer la valeur exacte et approchée au centième :

a. $6^x=7$
b. $5^{x-4}=2$
c. $\left(\frac{1}{2}\right)^x=100$

11 Calculer :

a. $\log_6(5)$
b. $\log_{0.5}(0.2)$

Exercices d'entraînement

12 Calculer la solution exacte, en utilisant les logarithmes décimaux, et une approximation à deux décimales près de chaque solution, lorsque cela est possible :

a. $3^{x+4}=2^{1-3x}$ **b.** $2^{2x-3}=5^{x-2}$

c. $\log(x^2+4)-\log(x+2)=2+\log(x-2)$

13 A chaque rebond, une «superballe» atteint les 80% de la hauteur atteinte au rebond précédent. Si on lâche la balle d'une hauteur de $2m$:

a. Quelle sera la hauteur atteinte par la balle au 1er , au 2ème , au 3ème , au n-ième rebond ?

b. A partir de quel rebond cette balle ne dépassera-t-elle plus la hauteur de 10 cm?

14 La consommation d'électricité d'un pays double tous les 20 ans.

a. Quel est le taux d'accroissement annuel?

b. Combien de temps faut-il pour voir cette consommation augmenter de 50%?

c. Par combien cette consommation est-elle multipliée après un siècle? Et après deux siècles?

15 La population mondiale a passé le cap du milliard d'êtres humains en 1804, celui du second milliard en 1927, du 3e en 1960, du 4e en 1974, du 5e en 1987 et du 6e en 1999. [A titre d'information les projections montrent qu'en -5000 il y avait environ 5 millions d'êtres humains; 100 millions en -750; 200 millions en 400; 500 millions en 1650]

a. Quel est le taux d'augmentation entre le 2e et le 6e milliard?

b. Si ce taux était resté constant, quelle aurait été la population mondiale en 1960? 1974? 1987? 1999?

c. Selon la même hypothèse (taux constant), en quelle année le 3e milliard aurait-il été atteint?

d. Quand le 7e milliard sera-t-il atteint si ce taux se maintient?

e. Les terres émergées ayant une superficie d'environ 130 millions de km^2, à quelle date n'y aura-t-il plus qu'un mètre carré par habitant?

16 Une colonie de bactéries se développe au cours du temps t suivant la loi exponentielle $N(t)=N_0(1+r)^t$, où N_0 est le nombre initial de bactéries.

a. Déterminer N_0 et r sachant que la colonie comprend 200 000 bactéries après 3 jours et 1 600 000 après 4,5 jours.

b. Quel est le nombre de bactéries au bout de 5 jours?

c. Après combien de jours la colonie comprend-elle 800 000 bactéries?

d. Après combien de jours la population de la colonie s'est-elle décuplée?

17 Le canton de Genève comptait 408350 habitants le 1er janvier 2000 et 490578 le 1er janvier 2016. (Source : office cantonal de la statistique).

En supposant que la population genevoise augmente selon une fonction exponentielle, déterminer au mois près la date à laquelle le canton de Genève atteindra un million d'habitants.

Ce modèle vous paraît-il adapté ?

18 Une certaine quantité s'accroît exponentiellement avec un rythme de 4% d'augmentation par semaine.

a. De quel pourcentage cette quantité s'accroît-elle en 8 semaines ?

b. En combien de jours cette quantité double-t-elle ?

c. De quel pourcentage cette quantité s'accroît-elle en 24 heures ?

19 Soit $f: A \to B$, où $A, B \subset \mathbb{R}$, définie par $f(x)=2-\log(x+1)$. Déterminer :

a. les ensembles A et B, de taille maximale, qui font de f une bijection;

b. la réciproque de la fonction f;

c. donner l'esquisse graphique de la fonction f et de sa réciproque.

20 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a>0$ et $x<y$, alors $a^x \leq a^y$.

b. $\log((2+\sqrt{3})^{2021})+\log((2-\sqrt{3})^{2021})=0$

21 La loi de Beer-Lambert stipule que la quantité de lumière I qui pénètre à une profondeur de x mètres dans l'océan est donnée par $I = I_0 c^x$, où 0 < c < 1 et I_0 est la quantité de lumière à la surface.

a. Exprimer x en fonction de logarithmes décimaux.

b. Si $c = \frac{1}{4}$, calculer la profondeur à laquelle $I = 0.01 \cdot I_0$. (ce qui détermine la limite où la photosynthèse peut avoir lieu).

22 Une courbe logistique est le graphique d'une équation de la forme $y = \frac{k}{1 + be^{-cx}}$,où k, b et c sont des constantes positives. On utilise des courbes de ce genre pour décrire une population y dont la croissance d'abord rapide a ensuite diminué après que x ait atteint une certaine valeur. Dans une étude fameuse sur la croissance des protozoaires, une population de *Paramecium caudata* a pu être décrite par une équation logistique, où c = 1,1244, k = 105 et x est le temps en jours.

a. Calculer b si la population initiale est de 3 individus.

b. Dans cette étude, la croissance maximale se situe en y = 52. A quel moment x cela s'est-il produit ?

c. Montrer qu'après une longue période de temps, la population décrite par une courbe logistique tend vers la constante k.

23 Étudier le fonctionnement d'une règle de calcul du type de celle qui figure sur la page de garde de ce chapitre. Avant les calculatrices, les élèves devaient savoir se servir d'un tel outil ...

Voir la théorie 3 à 5

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

24 Déterminer la valeur exacte de :

a. $\log_2(32)$

b. $\log_2\left(\frac{1}{8}\right)$

c. $\log_8(2)$

d. $\log_{0,5}(64)$

e. $\log_2(4\sqrt{2})$

f. $\log_{49}(\sqrt{7})$

g. $\log_3(\sqrt[7]{9})$

h. $\log_4(8)$

i. $\log_{\frac{1}{9}}(27)$

25 Déterminer x de sorte que :

a. $\log_x(125) = 3$

b. $\log_x(64) = 2$

c. $\log_x(243) = -5$

d. $\log_x(0,125) = 3$

e. $\log_x(25) = 4$

f. $\log_x\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{2}$

26 Soit $f : A \rightarrow B$, où $A, B \subset \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = 3^{x-1} - 2$. Déterminer :

a. les ensembles A et B, de taille maximale, qui font de f une bijection;

b. la réciproque f^{-1}de la fonction f, puis les représenter dans un même repère.

27 Résoudre les équations suivantes (résultats exacts simplifiés au maximum et résultats approchés au centième) :

a. $3^x = 5$

b. $24^{x-2} = 10000$

c. $7^x = 2^{3x}$

d. $42^x = 14^{x-1}$

e. $12^{2x+5} = 55 \cdot 7^{3x}$

f. $(3x+5)^7 = 5^4$

g. $0.8^{2x-3} = 1.5^x$

h. $13 \cdot 3^x = 7 \cdot 5^{x-2}$

28 Montrer que l'égalité suivante est vraie : $\log(25) + \log(20) + \log(2) = 3$

29 Résoudre les équations suivantes :

a. $\log_3(x-2) + 1 = \log_3(2x-1)$

b. $\log(x-0,1) + \log(2) = -1$

c. $2\cdot\log(x-2) \;=\; \log(3x-8)$

d. $\log(3x-4)+\log(10x-4) \;=\; 2\cdot\log(5x-2)$

e. $\dfrac{\log_5(x)-2}{\log_5(x)-1} \;=\; 3$

30 Au cours d'une enquête sur la population d'un canton rural, on a constaté une diminution du nombre d'habitants d'environ 5% chaque année.

a. En retenant cette donnée de décroissance de 5% et en désignant par $H(0)$ le nombre d'habitants au début de la première année d'études, $H(1)$ le nombre d'habitants au début de l'année suivante, etc., calculer $H(1)$,$H(2)$... et exprimer $H(t)$ en fonction de t.

b. Considérer le cas $H(0)$ = 10000 et calculer la valeur rapprochée de $H(1)$ et de $H(10)$.

31 La quantité d'atomes radioactifs en fonction du temps est donnée par la loi $N(t)=N_0\cdot(1-r)^t$, où *r* dépend de la substance radioactive.

Les trois quarts des atomes radioactifs d'un bloc de Thorium sont désintégrés en 33'600 ans.

a. En combien de temps se sont désintégrés la moitié des atomes de ce bloc?

b. En combien de temps se désintégreront la moitié de ceux qui restent?

32 Si on considère une ville qui possède P_0 habitants et que le taux de croissance de la population de cette ville est de *i* (en %) par an, on obtient après *t* années une population *P* selon la relation suivante : $P=P_0\cdot\left(1+\dfrac{i}{100}\right)^t$.

Supposons qu'une ville avait un nombre d'habitants P_0 = 12'000 en l'an 2000 et un taux de croissance annuel de 5%.

a. Quel sera le nombre d'habitants en 2020 ?

b. Quel était le nombre d'habitants en 1997 ?

c. Combien d'années faut-il pour que le nombre d'habitants double par rapport à 2000.

d. Supposons que la ville ait un nombre d'habitants P_0 = 200'000 en 2000 et dix ans plus tard de 450'000 habitants. Calculer son taux de croissance (en %) par an.

Deux villes A et B ont, au 1er janvier 2010, des populations respectives de 100'000 habitants et 80'000 habitants. La population de A augmente de 1% par an, tandis que celle de B augmente de 5% par an. On note *A(t)* la population de la ville A, *t* années après 2010 et *B(t)* la population de la ville B, *t* années après 2010.

e. Déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'habitants de B dépassera le nombre d'habitants de A.

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

24 Déterminer la valeur exacte :

a. 5

b. -3

c. $\dfrac{1}{3}$

d. -6

e. $\dfrac{5}{2}$

f. $\dfrac{1}{4}$

g. $\dfrac{2}{7}$

h. $\dfrac{3}{2}$

i. $-\dfrac{3}{2}$

25

a. $x=5$

b. $x=8$

c. $x=\dfrac{1}{3}$

d. $x=\dfrac{1}{2}$

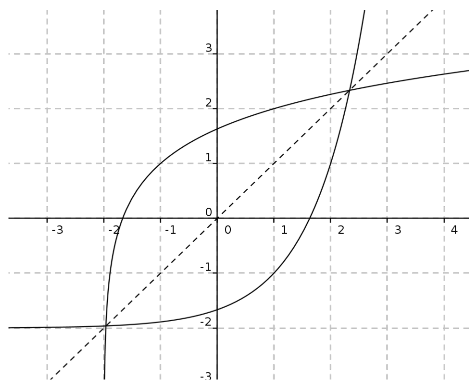
e. $x=\sqrt{5}$

f. $x=9$

26

a. $f:\mathbb{R}\rightarrow\,]-2\,;+\infty[$ est bijective

b. $f^{-1}(y)=\log_3(y+2)+1$;



27

a. $x=\log_3 5=\frac{\log 5}{\log 3}\simeq 1.46$

b. $x=\log_{24}(10000)+2=4\log_{24}(10)+2$
$=4\frac{\log(24)}{\log(10)}+2=4\log(24)+2\simeq 7.52$

c. $x=0$

d. $x=-\log_3(14)=\frac{-\log(14)}{\log 3}\simeq 2.3$

e. $x=\frac{\log(55)-5\log(12)}{2\log(12)-3\log(7)}\simeq 9.7$

f. $x=\frac{5^{\frac{4}{7}}-5}{3}=\frac{\sqrt[7]{5^4}-5}{3}\simeq -0.83$

g. $x=\frac{3\log(0,8)}{2\log(0,8)-\log(1,5)}\simeq -7.32$

h. $x=\frac{\log(7)-2\log(5)-\log(13)}{\log(3)-\log(5)}\simeq 7.51$

28

$\log(25)+\log(20)+\log(2)$
¿$\log(25\cdot 20\cdot 2)=\log(1000)=3$

29

a. $x=5$

b. $x=0,15$

c. $x\in\{3;4\}$

d. $x=6$

e. $x=\sqrt{5}$

30

a. $H(t)=H_0\cdot(1-0,05)^t$

b. $H(1)\simeq 9500$ et $H(10)\simeq 5987$

31

a. 16'800 **b.** 16'800

En effet, si les $\frac{3}{4}$ des atomes se sont désintégrés, cela correspond à 2 périodes (demi-vies), donc $2T$=33'600 ans, et T=16'800.

32 r=3 (300%) et N(0)=3125

a. N(5) = 3'200'000

b. 4 jours

33

a. $P_{20}\simeq 31'840$ hab.

b. $P_{-3}\simeq 10'366$ hab.

c. $t\simeq 14,2$ Ans

d. $i\simeq 8,4$ %

e. $t\simeq 5,73$ ans

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté. »

Georg Cantor, mathématicien allemand (1845-1918)

A savoir en fin de chapitre

Logarithmes

✔ fonctions logarithmiques : définition, représentation graphique, bijection ;

✔ log et ln ;

✔ propriétés des logarithmes ;

✔ changement de base ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Equations logarithmiques

✔ équations logarithmiques : définition, algorithme de résolution (avec domaine de définition), justification ;

✔ équations exponentielles : résolution à l'aide des logarithmes ;

✔ modélisation.

Voir la théorie 3 à 5 et les exercices 4 à 23

Quelques compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch07