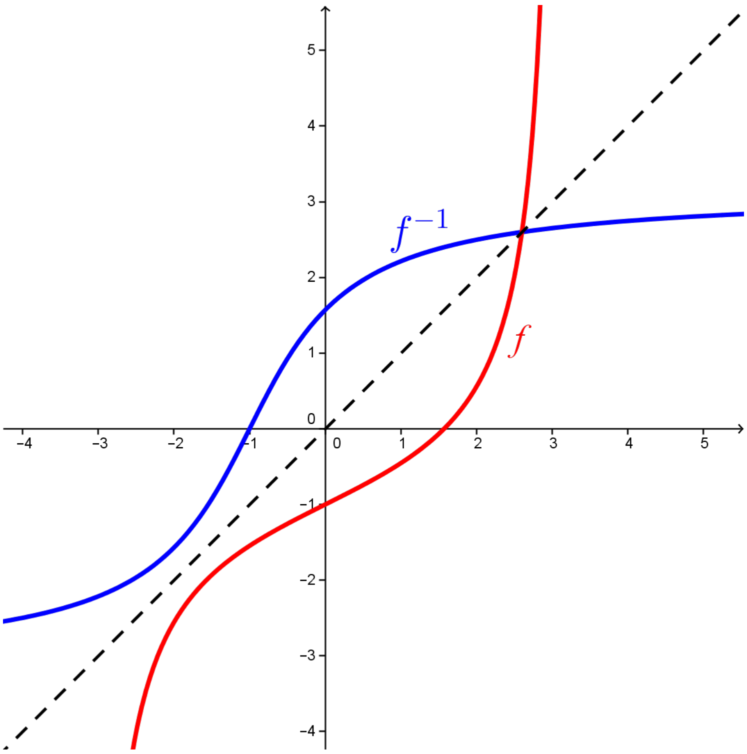
# Chapitre 06 - Composition - réciproque




*Représentation graphique d'une fonction et de sa réciproque*

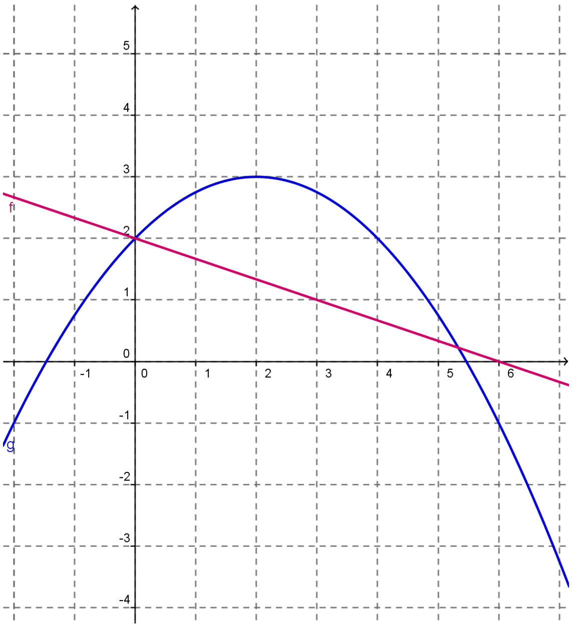
**Problème**

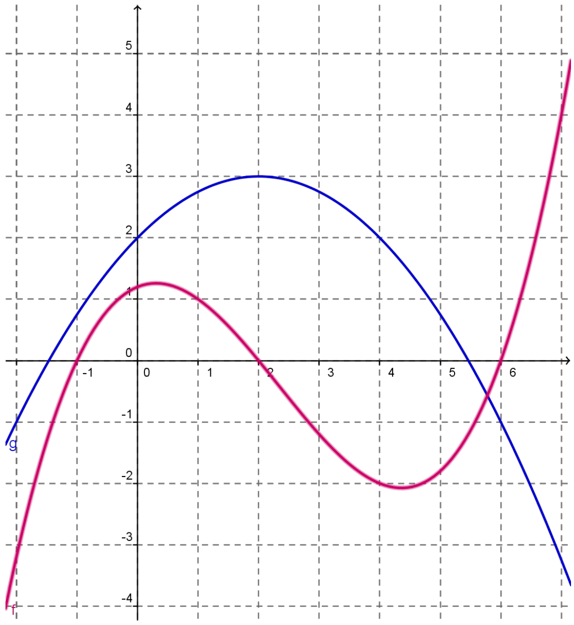
Imaginez que vous vous trouviez dans une galerie d'art en forme de polygone à $n$ côtés.
Quel nombre minimal de gardiens faudrait-il placer dans les angles de la salle pour que la totalité de l'intérieur de la salle soit sous surveillance?
On suppose que les gardiens ne peuvent pas voir à travers les murs...

*D'après Clifford A. Pickover*

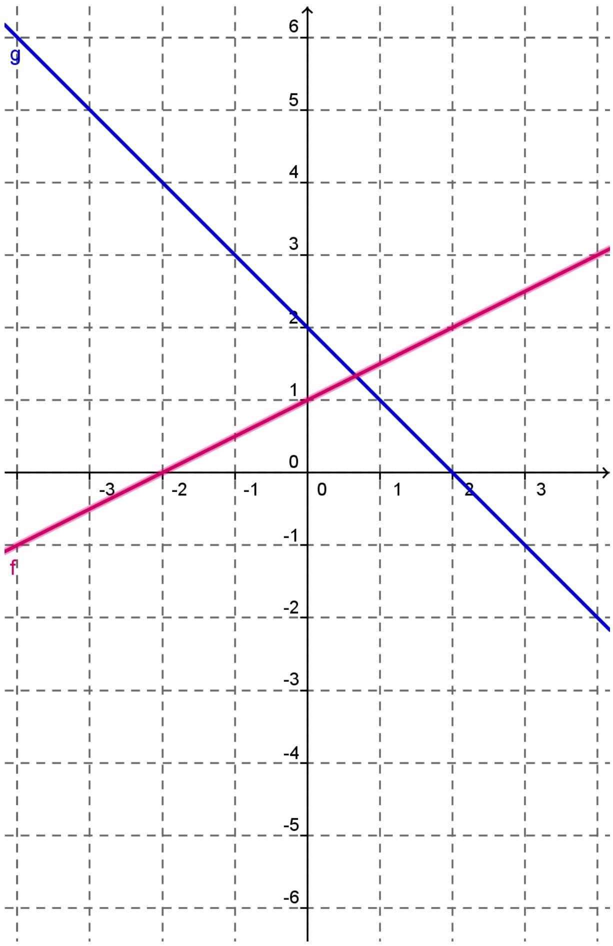
## 1 [Activité] Opérations sur les fonctions

**1.** Dans chacun des deux repères suivants, dessiner la fonction $f+g$ et la fonction $f-g$ :




**2.** Dans le repère suivant, dessiner la fonction $f \cdot g$ :



**3.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = x + 1$.

**a.** Calculer $(f+g)(3)$, $(f-g)(1)$, $(f \cdot g)(2)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(4)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(-1)$.

**b.** Quelles sont les expressions algébriques qui définissent les fonctions $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ ?

**c.** Quels sont les domaines de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ et $\frac{f}{g}$ ?

## 2 [Activité] Composition de fonctions

**1.** Pour chacune des trois fonctions définies ci-dessous :

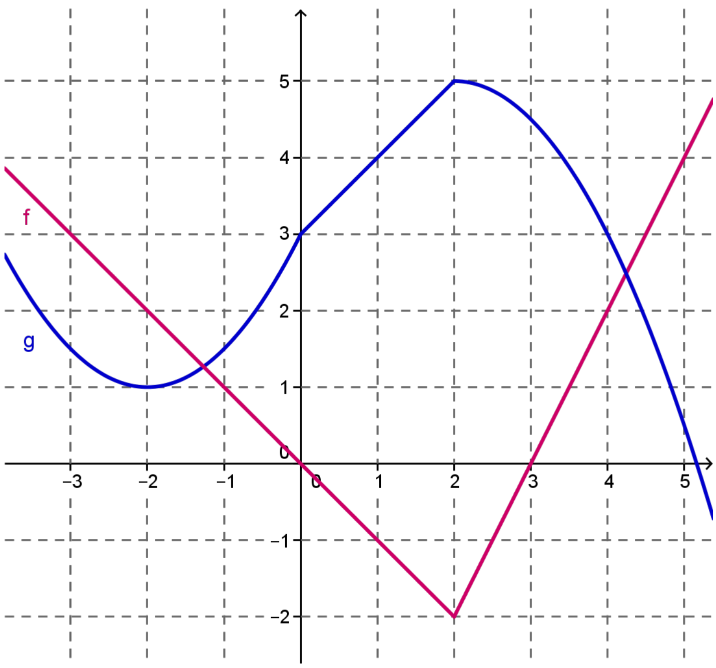
**a.** $f(x) = x^2 + 1$ **b.** $f(x) = \frac{2}{1-x}$ **c.** $f(x) = \frac{3-x}{2+x}$

Exprimer :

i. $f(t)$ ii. $f(t+2)$ iii. $f(x+2)$ iv. $f(x+t)$

v. $f(-x)$ vi. $f(3x)$ vii. $f(\sqrt{x})$ viii. $f\left(\frac{1}{x}\right)$

**2.** Soient les représentations graphiques des deux fonctions $f$ et $g$.




Évaluer les expressions suivantes :

**a.** $f(g(2))$

**b.** $g(f(0))$

**c.** $g(f(4))$

**d.** $f(g(0))$

**e.** $g(g(-2))$

**f.** $f(f(4))$

**3.** La **fonction composée de deux fonctions $f$ et $g$** (dans cet ordre), notée $g \circ f$, est définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions réelles définies par : $f(x) = 3x + 1$ , $g(x) = x^2 - 2$ et $h(x) = \frac{3x}{x-2}$ .

Déterminer les expressions algébriques qui définissent les fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ h$, $h \circ f$ et $h \circ h$.

## 3 [Activité] Quel ordre ?

Lors d'une discussion salariale dans une entreprise la direction a annoncé qu'au mois de janvier tous les salariés auraient une augmentation de 50.- , suivie d'une augmentation de 3%. Certains salariés se demandent s'il ne serait pas préférable d'intervertir les deux augmentations.

**1.** Soit $x$ le salaire d'un employé. Donner une fonction $f_1$ qui exprime une augmentation de salaire de 50.- et une fonction $f_2$ qui exprime une augmentation de salaire de 3%.

**2.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f_2 \circ f_1$ qui exprime une augmentation de 50.- suivie d'une augmentation de 3%.

**3.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f_1 \circ f_2$ qui exprime une augmentation de 3% suivie d'une augmentation de 50.-.

**4.** Quelle solution est-elle la plus avantageuse pour les salariés ?

**5.** Que peut-on en conclure quant à l'ordre dans lequel deux fonctions sont composées ?

## 4 [Aller plus loin] Domaine de définition d'une fonction composée

Le **domaine de définition** de $g \circ f$ est l'ensemble de tous les éléments $x$ du domaine de définition de $f$ tels que $f(x)$ est dans le domaine de définition de $g$ .

**1.** Déterminer les domaines de définition des fonctions $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ h$, $h \circ f$ et $h \circ h$ calculées dans l'Activité 2.3.

**2.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 16$ et $g(x) = \sqrt{x}$ .

**a.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f \circ g$ et son domaine de définition.

**b.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $g \circ f$ et son domaine de définition.

**3.** Soient $h$ et $k$ deux fonctions définies par : $h(x) = \sqrt{x-15}$ et $k(x) = x^2 + 2x$.

**a.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $h \circ k$ et son domaine de définition.

**b.** Déterminer l'expression algébrique de la fonction $k \circ h$ et son domaine de définition.

## 5 [Activité] Décomposition de fonctions

**1.** Pour chacune des fonctions $h$ suivantes, trouver deux fonctions $f$ et $g$ telles que leur composée $g \circ f$ soit la fonction $h$ donnée :

**a.** $h(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **b.** $h(x)=\sqrt{7-x}$ **c.** $h(x)=\sqrt{x}+3$

**2.** Écrire chacune des fonctions suivantes comme la composée de fonctions élémentaires :

**a.** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2}}$ **b.** $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$ **c.** $f(x)=\dfrac{1}{3+\sqrt{x+9}}$

**3.** Si $f(x)=3x+5$ et $h(x)=3x^2+3x+2$, trouver une fonction $g$ telle que $f \circ g = h$.

**4.** Si $f(x)=x+4$ et $h(x)=4x-1$, trouver une fonction $g$ telle que $g \circ f = h$.

Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 6

## 6 [Activité] Une fonction « réversible »

Soit $x$[°C] une température mesurée dans l'échelle Celsius et soit $y$[°F] la même température mesurée dans l'échelle Fahrenheit. Ces deux mesures sont liées par : $5y = 9x + 160$.

**a.** Expliquer cette relation $5y = 9x + 160$.

**b.** Quelle est la température en degrés Fahrenheit correspondant à 20°C ?

**c.** Donner une fonction $f$ qui corresponde à la transformation °C en °F.

**d.** Donner une fonction $g$ qui corresponde à la transformation °F en °C.

**e.** D'une certaine façon, la fonction $g$ « défait » ce que $f$ a « fait ». La fonction $f$ est donc « réversible ». Le constater en appliquant successivement $f$ puis $g$ à différentes valeurs $x$ de température en °C.

## 7 [Activité] Toute fonction est-elle réversible?

**1.** On s'intéresse à la distance nécessaire, en voiture, pour un freinage d'urgence. Si on tient compte du temps de réaction du conducteur, la distance $d$ en fonction de la vitesse $v$ peut être calculée avec la fonction suivante : $d=f(v)=\dfrac{v}{10}\cdot\left(\dfrac{v}{10}+3\right)$ où $v$ est exprimée en km/h.

**a.** Calculer $f(30)$, la distance de freinage pour une vitesse de 30 km/h.

**b.** Même question pour 50 km/h et pour 100 km/h.

**c.** Calculer la vitesse à laquelle on peut rouler pour être en mesure de s'arrêter sur 100m.

**d.** Déterminer la fonction $g$ qui exprime $v$ en fonction de $d$. Commenter et interpréter graphiquement.

**2.** Une fonction quelconque est-elle toujours « réversible » ? Sinon à quelle condition l'est-elle ? Pour répondre à cette question, considérons une fonction plus simple: $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x^2+1 \end{aligned}$

**a.** Déterminer la fonction $g$ « qui défait ce que $f$ fait ».

**b.** Calculer $g(f(2))$, puis $g(f(-2))$. La fonction $g$ parvient-elle à toujours à restituer la valeur initiale de $x$ ?

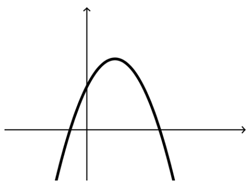
**c.** Que faut-il modifier dans la définition de $f$ pour que $g(f(x))=x$ soit toujours vérifié ?

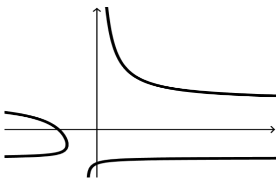
## 8 [Activité] Fonctions bijectives

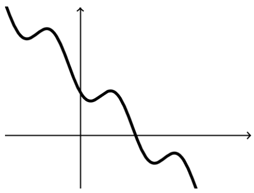
Soit une **fonction** $f$ de l'ensemble $A$ vers l'ensemble $B$ (donc à tout élément de $A$ est associé au plus un élément de $B$). Le **domaine de définition** de $f$ permet d'identifier les éléments de l'ensemble de départ $A$ pour lesquels il n'y a pas d'image. Une fonction définie sur son domaine de définition – ou une fonction pour laquelle à tout élément de $A$ est associé exactement un élément de $B$ – est appelée une **application**.

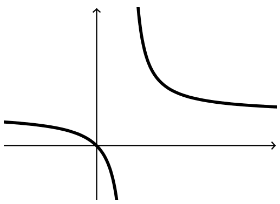
On dit que qu'une application est **bijective** (est une **bijection**) si et seulement si à tout élément de $B$ est associé exactement un élément de $A$ (une préimage). Une bijection est donc une fonction pour laquelle tous les éléments des ensembles de départ et d'arrivée sont associés un à un.

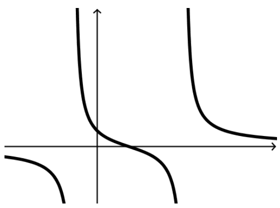
**1** Parmi les courbes suivantes, lesquelles pourraient être la représentation graphique d'une fonction bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?

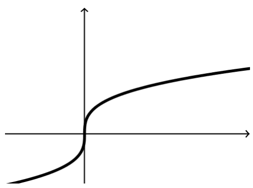
**d.**


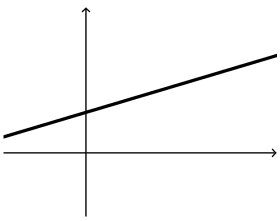
**g.**


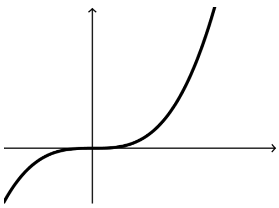
**j.**


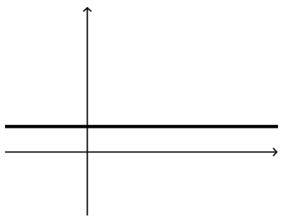
**e.**


**h.**


**k.**


**f.**


**i.**


**l.**


**2** Restreindre l'ensemble de départ et/ou l'ensemble d'arrivée des fonctions non bijectives pour qu'elles le deviennent.

## 9 [Activité] Fonctions bijectives

Déterminer si les fonctions suivantes sont bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si non, restreindre leurs ensembles de départ et/ou d'arrivée pour les rendre bijectives.

**a.** $f(x)=3x-7$

**b.** $f(x)=x^2-9$

**c.** $f(x)=\sqrt{x}$

**d.** $f(x)=|x|$

**e.** $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

**f.** $f(x)=\frac{1}{x}$

## 10 [Activité] Fonctions réciproques

Soit $f$ une fonction bijective d'un ensemble $A$ dans un ensemble $B$. La **fonction réciproque** de $f$, notée $f^{-1}$ (ou ${}^r f$), est la fonction de l'ensemble $B$ dans l'ensemble $A$ définie par : $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$

**1.** Utiliser la définition ci-dessus pour déterminer la fonction réciproque de la fonction $f$ définie par $f(x)=\frac{x^2+1}{4}$. Donner les ensembles de départ et d'arrivée de $f$ et de sa réciproque $f^{-1}$ pour qu'elles soient bijectives.

**2.** Calculer $(f^{-1}\circ f)(x)$ et $(f\circ f^{-1})(y)$. Qu'obtient-on ? Et pourquoi ?

**3.** Réécrire $f^{-1}$ avec la variable $x$ au lieu de $y$ et tracer dans un même repère les représentations graphiques de $f$ et $f^{-1}$. Que constate-t-on ?

**4.** Déterminer la réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner les ensembles de départ d'arrivée de chaque fonction et de sa réciproque pour qu'elles soient bijectives.

**a.** $f(x)=\frac{3}{4}x+1$

**b.** $g(x)=2\sqrt{x-3}$

**c.** $h(x)=-\frac{1}{x+1}$

**d.** $j(x)=4x^2-9$

## 11 [Aller plus loin] Fonctions réciproques +

Déterminer la réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction et de sa réciproque pour qu'elles soient bijectives.

**m.** $f(x)=x^2-4x+5$

**n.** $g(x)=\frac{x}{10}\left(\frac{x}{10}+3\right)$

**o.** $h(x)=x^2-3x-4$

**p.** $j(x)=-4x^2+4x-3$

**q.** $k(x)=\frac{x}{x-1}$

**r.** $h(x)=\frac{3x+2}{2x-5}$

**Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 7 à 9**

## 1 [A savoir] Opérations sur les fonctions

### Définition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles. On peut définir de nouvelles fonctions :

☐ $f+g$ est la fonction définie par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ ; elle s'appelle la **somme** de $f$ et $g$.

☐ $f-g$ est la fonction définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ ; elle s'appelle la **différence** de $f$ et $g$.

☐ $f\cdot g$ est la fonction définie par : $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ ; elle s'appelle le **produit** de $f$ et $g$.

☐ $\frac{f}{g}$ est la fonction définie par : $\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ; elle s'appelle le **quotient** de $f$ et $g$.

### Définition

☐ Les **domaines de définition** de $f+g$, $f-g$ et $f\cdot g$ sont l'intersection des domaines de définition de $f$ et $g$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui sont communs aux deux domaines de définition.

☐ Le **domaine de définition** de $\frac{f}{g}$ est l'intersection des domaines de définition de $f$ et $g$ de laquelle on enlève les zéros de $g$.

Exemple : soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=x^2-1$. Déterminer les fonctions $f+g, f-g, f\cdot g$ et $\frac{f}{g}$ et leurs domaines de définition.

☐ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x^2-1$ et $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}_+$

☐ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(x^2-1)=\sqrt{x}-x^2+1$ et $D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}_+$

☐ $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\cdot(x^2-1)$ et $D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}_+\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}_+$

☐ $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$ et $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g\setminus\{x\,|\,g(x)=0\}=\mathbb{R}_+\setminus\{-1\,;1\}=\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$

## 2 [A savoir] Composition de fonctions

### Définition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions réelles. On définit une nouvelle opération entre fonctions. La **fonction composée de $f$ et $g$** (dans cet ordre), notée $g\circ f$, est une nouvelle fonction définie par : $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ .

La composition de $f$ et $g$ s'effectue donc de la manière suivante : à un élément de départ $x$, on fait correspondre son image par $f$ (donc $f(x)$), que l'on considère ensuite comme un élément de départ de la fonction $g$. L'image de la fonction composée s'écrit alors $g(f(x))$.

Remarques :

☐ $g\circ f$ se lit « $g$ rond $f$ » ;

☐ pour déterminer la fonction composée de $g$ et $f$, $f\circ g$, on inverse l'ordre en calculant d'abord l'image par $g$ : $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ ;

☐ attention : en général $g\circ f\neq f\circ g$ ;

☐ il est possible de composer plus de deux fonctions, par exemple la fonction composée de trois fonctions $f$, $g$ et $h$ est : $(h\circ g\circ f)(x)=h(g(f(x)))$ .

Exemple 1: soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=-3x+5$ et $g(x)=x^2$.
Déterminer les fonctions et $f\circ g$ .

☐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-3x+5)=(-3x+5)^2$

La composition de $f$ et $g$ peut être visualisée pas le schéma suivant :

$$x \xmapsto{f} -3x+5 \xmapsto{g} (-3x+5)^2$$

(on applique d'abord $f$ puis $g$)

$$x \xmapsto{g\circ f} (-3x+5)^2$$

☐ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=-3x^2+5$

La composition de $g$ et $f$ peut être visualisée pas le schéma suivant :

$$x \xmapsto{g} x^2 \xmapsto{f} -3x^2+5$$

(on applique d'abord $g$ puis $f$)

$$x \xmapsto{f\circ g} -3x^2+5$$

Exemple 2: soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=2x+5$ et $g(x)=\dfrac{x+1}{6-x}$ .

Déterminer les fonctions $g\circ f$ et $f\circ g$ .

☐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x+5)=\dfrac{(2x+5)+1}{6-(2x+5)}=\dfrac{2x+6}{1-2x}$

La composition de $f$ et $g$ peut être visualisée pas le schéma suivant :

$$x \xmapsto{f} 2x+5 \xmapsto{g} \frac{2x+6}{1-2x}$$

(on applique d'abord $f$ puis $g$)

$$x \xmapsto{g\circ f} \frac{2x+6}{1-2x}$$

☐ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{x+1}{6-x}\right)=2\dfrac{x+1}{6-x}+5=\dfrac{2x+2+30-5x}{6-x}=\dfrac{32-3x}{6-x}$

La composition de $g$ et $f$ peut être visualisée pas le schéma suivant :

$$x \xmapsto{g} \frac{x+1}{6-x} \xmapsto{f} \frac{32-3x}{6-x}$$

(on applique d'abord $g$ puis $f$)

$$x \xmapsto{f\circ g} \frac{32-3x}{6-x}$$

## 3 [Aller plus loin] Domaine de définition de fonctions composées

### Définition

Le **domaine de définition de** $g\circ f$ est l'ensemble de tous les éléments $x$ du domaine de définition de $f$ tels que $f(x)$ appartient dans le domaine de définition de $g$.
Ainsi $D_{g\circ f}=\{x \mid x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$ .

Remarque : le domaine de définition d'une fonction composée peut être différent des domaines de définitions des fonctions de départ. Ainsi, dans certains cas, la détermination du domaine de définition d'une fonction composée peut s'avérer difficile !

Exemple 1: soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=x^2-1$ et $g(x)=2x+3$. Déterminer les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner les domaines de définition de ces nouvelles fonctions.

☐ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=(2x+3)^2-1=4x^2+12x+9-1=4x^2+12x+8$

$D_{f\circ g}$ $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$. Puisque pour chaque $x$ de $D_g=\mathbb{R}$, la valeur $g(x)$ est dans $D_f=\mathbb{R}$, le domaine de définition de $f\circ g$ est aussi $\mathbb{R}$. Donc $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$.

☐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-1)=2(x^2-1)+3=2x^2-2+3=2x^2+1$

$D_{g\circ f}$ : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}$. Puisque pour chaque $x$ de $D_f=\mathbb{R}$, la valeur $f(x)$ est dans $D_g=\mathbb{R}$, le domaine de définition de $g\circ f$ est aussi $\mathbb{R}$. Donc $D_{g\circ f}=\mathbb{R}$.

Remarque: Si deux fonctions ont pour domaines de définition $\mathbb{R}$, alors le domaine de définition de leur fonction composée est aussi $\mathbb{R}$.

Exemple 2: soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+4}$ et $g(x)=x-1$.

Déterminer les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner les domaines de définition de ces nouvelles fonctions.

☐ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1)=\dfrac{2(x-1)-5}{(x-1)+4}=\dfrac{2x-2-5}{x+3}=\dfrac{2x-7}{x+3}$ : $D_g=\mathbb{R}$ et il faut déterminer pour quelles valeurs de $x\in D_g$ $g(x)$ appartient à $D_f$ ;

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ $\Rightarrow$ $g(x)\neq-4 \Leftrightarrow x-1\neq-4 \Leftrightarrow x\neq-3$ $\Rightarrow$ $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

☐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{2x-5}{x+4}\right)=\dfrac{2x-5}{x+4}-1=\dfrac{2x-5}{x+4}-\dfrac{x+4}{x+4}=\dfrac{x-9}{x+4}$

$D_{g\circ f}$ : $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ et l'ensemble image de $f$ est $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Il faut déterminer pour quelles valeurs de $x\in D_f$ $f(x)$ appartient à $D_g$ ;

$D_g=\mathbb{R}$, l'ensemble image de $f$ est inclus dans le domaine de définition de $g$.

Donc $D_{g\circ f}=D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

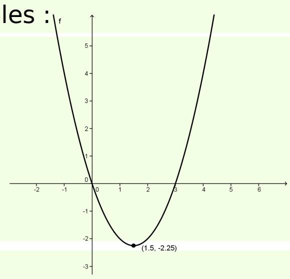
Exemple 3: soient les fonctions réelles $f$ et $g$ définies par $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$. Déterminer les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner les domaines de définition de ces nouvelles fonctions.

☐ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x+2})=(\sqrt{x+2})^2-3\sqrt{x+2}=x+2-3\sqrt{x+2}$

☐ $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2-3x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

☐ Attention, dans ce cas, les domaines de définition et les ensembles images de $f$ et $g$ sont plus petits que $\mathbb{R}$. Pour déterminer $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$, on commence par déterminer ces ensembles :

Pour $f$ :



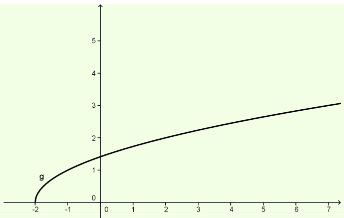

$D_f=\mathbb{R}$

Ensemble image de $f$ : $[-2.25\,;\infty[$

On peut écrire $f:\ \mathbb{R} \to [-2.25\,;\infty[$

$x \to x^2-3x$

Pour $g$ :



$D_g = [-2\,;\infty[$

Ensemble image de $g$ : $[0\,;\infty[$

On peut écrire $g : [-2\,;\infty[ \rightarrow [0\,;\infty[$

$x \rightarrow \sqrt{x+2}$

$D_{f\circ g}$ : l'ensemble image de $g$ est inclus dans le domaine de définition de $f$ :
$[0\,;\infty[ \subset \mathbb{R}$ , donc $D_{f\circ g} = D_g = [-2\,;\infty[$ .

$D_{g\circ f}$ : l'ensemble image de $f$ n'est pas inclus dans le domaine de définition de $g$ :

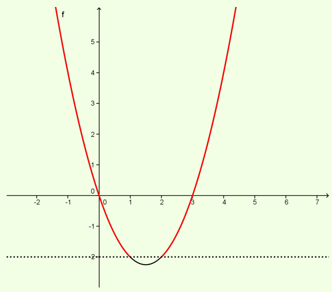
$[-2.25\,;\infty[ \not\subset [-2\,;\infty[$ ; par exemple $g(-2.25) = \sqrt{-2.25+2}$ n'existe pas donc

si $x=1.5$, $(g\circ f)(1.5)$ n'existe pas, car $(g\circ f)(1.5) = g(f(1.5)) = g(-2.25)$ .

Il faut déterminer pour quelles valeurs de $x$ $f(x)$ appartient à $D_g = [-2\,;\infty[$ ;

c'est-à-dire, il faut résoudre l'inéquation $f(x) \geq -2$ .

$$f(x) \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq -2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0$$
$$\Rightarrow x \in ]-\infty\,;1] \cup [2\,;\infty[ \ .$$



donc $D_{g\circ f} \in ]-\infty\,;1] \cup [2\,;\infty[$ .

## 4 [A savoir] Décomposition de fonctions

### Décomposer ...

Les fonctions réelles que nous avons étudiées jusqu'ici utilisent les opérations élémentaires (addition, soustraction, multiplication et division), l'élévation à une puissance entière ou une racine.
On peut imaginer que, grâce à la composition des fonctions, la plupart des fonctions réelles peuvent se construire à l'aide d'un petit nombre de fonctions élémentaires ne faisant intervenir qu'une seule opération.
Une fonction réelle donnée peut ainsi être **décomposée** en plusieurs fonctions élémentaires.

Exemple 1 : trouver deux fonctions $f$ et $g$ telles que leur composée $g\circ f$ soit la fonction $h$ définie par $h(x) = x^2 + 5$ .

On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = x^2 + 5$.

Pour un $x$ donné, la suite d'actions permettant d'obtenir son image est la suivante :

A) on élève le nombre au carré (action de $f$)

B) on ajoute 5 au résultat obtenu (action de $g$)

Cette suite d'actions peut être visualisée par le schéma suivant :

$$x \xmapsto{f} x^2 \xmapsto{g} x^2 + 5$$

D'où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 5$ .

Et on a bien $h(x) = (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$ .

Exemple 2 : trouver deux fonctions $f$ et $g$ telles que leur composée $g \circ f$ soit la fonction $h$ définie par $h(x)=\frac{1}{x-3}$ .

Pour un $x$ donné, la suite d'actions permettant d'obtenir son image est la suivante :

A) on soustrait 3 (action de $f$)

B) on prend l'inverse (action de $g$)

$$x \xmapsto{f} x-3 \xmapsto{g} \frac{1}{x-3}$$

D'où $f(x)=x-3$ et $g(x)=\frac{1}{x}$ .

Et on a bien $h(x)=(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(x-3)=\frac{1}{x-3}$ .

Exemple 3 : trouver trois fonctions $u$, $v$ et $w$ telles que leur composée $w \circ v \circ u$ soit la fonction $z$ définie par $z(x)=x^2+2x-3$ .

Pour un $x$ donné, la suite d'actions permettant d'obtenir son image est la suivante :

A) on ajoute 1 (action de $u$)

B) on élève au carré (action de $v$)

C) on soustrait 4 (action de $w$)

$$x \xmapsto{u} x+1 \xmapsto{v} (x+1)^2=x^2+2x+1 \xmapsto{w} (x+1)^2-4=x^2+2x-3$$

D'où $u(x)=x+1$ , $v(x)=x^2$ et $w(x)=x-4$ .

Et on a bien :

$$(w \circ v \circ u)(x)=w(v(u(x)))=w(v(x+1))=w((x+1)^2)=(x+1)^2-4=x^2+2x+1-4=x^2+2x-3$$

Voir les exercices 1 à 6

## 5 [A savoir] Fonctions bijectives

### Définition (rappels)

Une **fonction $f$** d'un ensemble de départ $A$ vers un ensemble d'arrivée $B$ est une relation qui attribue à chaque élément de $A$ au plus un élément de $B$. On note $f: A \rightarrow B$ .
Autrement dit, on est en présence d'une fonction quand on a :

- ☐ une variable indépendante qui prend ses valeurs dans un ensemble de départ ;
- ☐ une variable dépendante qui prend ses valeurs dans un ensemble d'arrivée ;
- ☐ une règle de correspondance qui indique comment la variable dépendante varie en fonction de la variable indépendante, donnée par un tableau de valeurs, une phrase, une représentation graphique, une expression algébrique (le plus souvent c'est le cas), ,... ;
- ☐ une condition : à tout élément de l'ensemble de départ correspond au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Une **fonction réelle** est une fonction pour lesquelles $A$ et $B$ sont des sous-ensembles de nombres réels.

Le **domaine de définition** de $f$ est le sous ensemble de l'ensemble de départ $A$ constitué de tous les éléments pour lesquels $f$ admet exactement une image. On le note $D_f$ .
Quant $D_f=A$ , on parle aussi d'**application** (càd que tout élément de $A$ admet exactement une **image**.

### Définition

Soit une fonction $f$ de l'ensemble $A$ vers l'ensemble $B$.
On dit que cette fonction $f:A\to B$ est **bijective** ($f$ est une **bijection**) si et seulement si :
- tout $x\in A$ admet exactement une image dans $B$ (c'est-à-dire que $f$ est une application) ;
- tout $y\in B$ admet exactement une préimage dans $A$.

Exemple 1 : la fonction $f$ définie par $f(x)=3x+2$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?
Si non, restreindre ses ensembles de départ et/ou d'arrivée pour la rendre bijective.

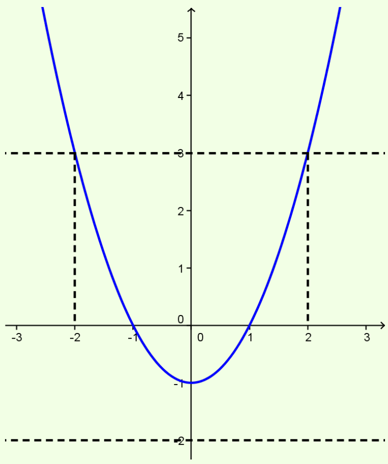
On a $D_f=\mathbb{R}$ . Donc chaque élément $x\in\mathbb{R}$ admet exactement une image.

Pour tout élément $y\in\mathbb{R}$ , on a $y=3x+2 \Leftrightarrow x=\frac{y-2}{3}$ . Donc chaque $y\in\mathbb{R}$ possède exactement une préimage $x\in\mathbb{R}$ .

Finalement $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .

Exemple 2 : la fonction $g$ définie par $g(x)=x^2-1$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?
Si non, restreindre ses ensembles de départ et/ou d'arrivée pour la rendre bijective.

On a $D_f=\mathbb{R}$ . Donc chaque élément $x\in\mathbb{R}$ admet exactement une image.




Par contre, certains $y$ ont plus d'une préimage.

Par exemple, $g(2)=g(–2)=3$, donc 3 à deux préimages : –2 et 2.

D'autre part, certains $y$ ne possèdent pas de préimage.

Par exemple, il n'y a pas de réel $x$ tel que $g(x)= –2$, donc –2 n'a pas de préimage.

Donc $g$ n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ .

Pour rendre $g$ bijective, il faut retreindre les ensembles de départ et d'arrivée afin que chaque élément de l'ensemble d'arrivée possède exactement une préimage dans l'ensemble de départ.

Afin de supprimer les doubles préimages, on restreint l'ensemble de départ à $[0;\infty[$ où à $]-\infty;0]$ . Puis, afin de ne pas avoir de valeurs sans préimage, on restreint l'ensemble d'arrivée à $[-1;\infty[$ .

Ainsi $\begin{array}{rcl} g:[0;\infty[ & \to & [-1;\infty[ \\ x & \to & x^2-1 \end{array}$ est bijective ou bien $\begin{array}{rcl} g:]-\infty;0] & \to & [-1;\infty[ \\ x & \to & x^2-1 \end{array}$ est bijective.

Remarque : En restreignant d'avantage encore les ensembles de départ et d'arrivée, $g$ reste bien sûr bijective. Par exemple, $\begin{array}{rcl} g:[1;\infty[ & \to & [0;\infty[ \\ x & \to & x^2-1 \end{array}$ est bijective.

### Test graphique pour déterminer si une fonction est bijective

Une fonction est bijective si et seulement si toute droite horizontale correspondant à un élément de l'ensemble d'arrivée de cette fonction coupe sa représentation graphique en un et un seul point.

## 6 [A savoir] Fonctions réciproques

### Définition

Soit $f$ une fonction bijective d'un ensemble $A$ dans un ensemble $B$.
La **fonction réciproque** de $f$, notée $f^{-1}$ (ou ${}^{r}f$), est la fonction de l'ensemble $B$ dans l'ensemble $A$ définie par : $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$ pour tout $x\in A$ et pour tout $y\in B$.

Ainsi, la réciproque d'une fonction bijective $f$ est la fonction qui associe à chaque élément de $B$ son unique préimage dans $A$.

Remarques :

- une fonction qui n'est pas bijective n'admet pas de fonction réciproque ;
- la fonction réciproque d'une fonction bijective est aussi bijective ;
- l'ensemble de départ de $f^{-1}$ est l'ensemble d'arrivée de $f$. L'ensemble d'arrivée de $f^{-1}$ est l'ensemble de départ de $f$.

### Théorème

Soit $f : A \to B$, une fonction réelle bijective et soit $f^{-1} : B \to A$, sa réciproque. Alors :
- $(f^{-1}\circ f)(x)=x$ pour tout $x\in A$
- $(f\circ f^{-1})(y)=y$ pour tout $y\in B$

### Marche à suivre pour déterminer la réciproque d'une fonction *f* donnée

La relation $y=f(x)$ permet de trouver $y$ lorsque l'on connaît $x$. Nous allons maintenant déterminer le moyen de retrouver $x$ lorsque l'on connaît $y$ :

**1** Déterminer le domaine de définition de $f$.
**2** Poser l'égalité $y=f(x)$ et la résoudre par rapport à $x$. Ce faisant, poser les conditions éventuelles sur $x$ et $y$. On obtient finalement une égalité de la forme $x=f^{-1}(y)$.
**3** Réécrire $f^{-1}(y)$ en remplaçant $y$ par $x$ (afin de pouvoir la représenter dans un repère cartésien standard).
**4** Écrire les fonctions $f$ et $f^{-1}$ en donnant leurs ensembles de départs et d'arrivée pour qu'elles soient bijectives.

Remarque : on ne peut déterminer la réciproque d'une fonction que si celle-ci est bijective. Cependant, en pratique, c'est en déterminant la réciproque d'une fonction que l'on ajuste les ensembles de départ et d'arrivée (en raison des conditions à poser) pour que la fonction et sa réciproque soient bijectives.

Exemple : déterminer la réciproque de la fonction $f(x)=x^2-3$ . Donner les ensembles de départ d'arrivée de $f$ et de sa réciproque pour qu'elles soient bijectives.

$D_f=\mathbb{R}$ (attention, ce n'est pas l'ensemble de départ, car on veut que $f$ soit bijective)

$y=f(x) \Leftrightarrow y=x^2-3 \Leftrightarrow x^2=y+3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y+3}$

conditions :

☐ calcul possible que si la racine carrée existe : $y+3\geq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{y\geq -3}$

☐ il ne peut pas y avoir 2 préimages $x=+\sqrt{y+3}$ et $x=-\sqrt{y+3}$ , car $f$ doit être bijective

$\Rightarrow$ on choisit une des deux, disons $x=+\sqrt{y+3}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x\geq 0}$

On obtient alors la réciproque : $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)=\sqrt{y+3}$ .

☐ On exprime $f^{-1}(x)$ en remplaçant $y$ par $x$ : $f^{-1}(x)=\sqrt{x+3}$ .

☐ Ainsi, en tenant compte des conditions sur $x$ et $y$, on a :

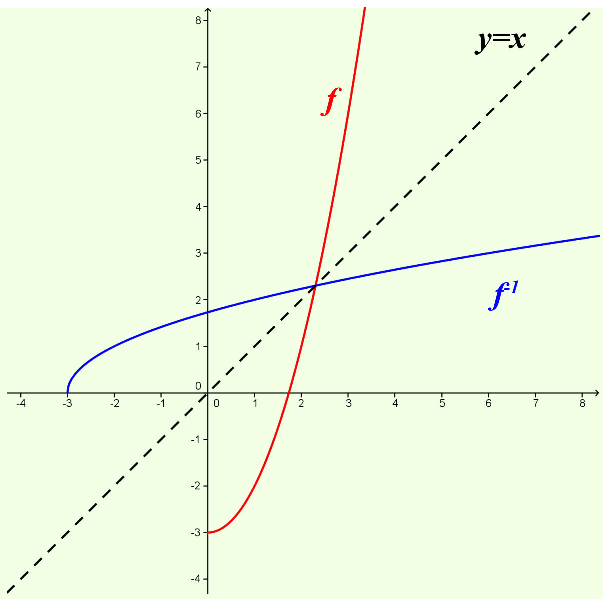
$\begin{array}{rcl} f:[0;\infty[ & \rightarrow & [-3;\infty[ \\ x & \rightarrow & x^2-3 \end{array}$ , bijective, a pour réciproque $\begin{array}{rcl} f^{-1}:[-3;\infty[ & \rightarrow & [0;\infty[ \\ x & \rightarrow & \sqrt{x+3} \end{array}$ bijective.

**Théorème (représentation graphique d'une fonction et sa réciproque)**

Soit $f:A\rightarrow B$ , une fonction réelle bijective et soit $f^{-1}:B\rightarrow A$ , sa réciproque.
Le point ( $a$ ; $b$ ) appartient à la représentation graphique de $f$ si et seulement si le point ( $b$ ; $a$ ) appartient à la représentation graphique de $f^{-1}$ .

Par conséquent, les représentations graphiques de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite $y = x$.

Exemple : représenter graphiquement $\begin{array}{rcl} f:[0;\infty] & \rightarrow & [-3;\infty] \\ x & \rightarrow & x^2-3 \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} f^{-1}:[-3;\infty] & \rightarrow & [0;\infty] \\ x & \rightarrow & \sqrt{x+3} \end{array}$ .




Voir les exercices 7 à 9

## Opérations entre fonctions, composition

**1** Déterminer les expression algébriques des fonctions $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ et $\frac{f}{g}$, ainsi que leurs domaines de définitions.

**a.** $f(x)=x^3+2x^2$, $g(x)=3x^2-1$

**b.** $f(x)=\sqrt{1+x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$

**c.** $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ , $g(x)=\sqrt{x^2-1}$

**2** Dans chaque cas, déterminer les expressions algébriques des fonctions $f\circ g$, $g\circ f$ et $g\circ g$ :

**a.** $f(x)=2x-5$ , $g(x)=x^2-3x+5$

**b.** $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+4}$, $g(x)=x^2-2$

**c.** $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$

**d.** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$

**3** Soient $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ et $g(x)=\dfrac{x+1}{1-x}$.

**a.** Déterminer les expressions algébriques des fonctions suivantes :
$f_1=f$ , $f_2=f\circ f$ , $f_3=f\circ f\circ f$ ,
$f_4=f\circ f\circ f\circ f$ , $f_5=f\circ f\circ f\circ f\circ f$ .

**b.** Calculer $f_{1000}(3)$ où $f_{n+1}=f_n\circ f$ , pour $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ .

**c.** Déterminer les expressions algébriques de $f\circ g$ et $g\circ f$ . Commenter les résultats.

**4** Exprimer les fonctions $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ ,
$g(x)=1-2x$ , $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$ ,
$k(x)=\dfrac{x}{x-1}$ , $l(x)=\dfrac{x}{x-2}$ ,
$m(x)=\dfrac{1}{2-2x}$ et $n(x)=\dfrac{2x}{2x-1}$ comme fonctions composées des fonctions $u(x)=\dfrac{1}{x}$ , $v(x)=1-x$ et $w(x)=2x$ .

**5** Soient $f$, $g$, $h$ et $j$ quatre fonctions définies par : $f(x)=x+2$ , $g(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}$ ,
$h(x)=x^2$ et $j(x)=\sqrt{x+1}$ .

Déterminer les expressions algébriques des fonctions $h\circ f$ , $f\circ g$ , $g\circ g$ , $f\circ j$ , $g\circ f$ , $g\circ h$ et donner les domaines de définition des ces nouvelles fonctions.

**6**

**a.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-4$ et $g(x)=\sqrt{3x}$ . Déterminer les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner les domaines de définition de ces nouvelles fonctions.

**b.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies par : $f(x)=\sqrt{x-2}$ et $g(x)=\sqrt{x+5}$ . Déterminer les fonctions $f\circ g$ et $g\circ f$ et donner les domaines de définition de ces nouvelles fonctions.

Voir la théorie 1 à 4

## Bijections, réciproque

**7** Déterminer si les fonctions suivantes sont bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ . Si non, restreindre leurs ensembles de départ et/ou d'arrivée pour les rendre bijectives :

**a.** $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

**b.** $f(x)=x^2+4$

**c.** $f(x)=3$

**d.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

**e.** $f(x)=x^2+3x+5$

**f.** $f(x)=-x^2-2x-3$

**8** Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer si elle est bijective, si oui représenter la fonction et sa réciproque dans un même repère :

**a.** $f(x)=2x-4$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

**b.** $f(x)=x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

**c.** $f(x)=x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ .

**d.** $f(x)=x^2$ de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^+$ .

**9** Déterminer la réciproque de chacune des fonctions suivantes. Donner les ensembles de départ et d'arrivée de chaque fonction et de sa réciproque pour qu'elles soient bijectives :

**a.** $f(x)=3x+5$

**b.** $f(x)=\dfrac{1}{3x-2}$

**c.** $f(x)=2-3x^2$

**d.** $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-5}$

**e.** $f(x)=\sqrt{3-x}$

**f.** $f(x)=x^2-4x+2$

**g.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

Voir la théorie 5 à 6

## EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

**10** Soients $f_1(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ et $f_2(x)=\dfrac{4}{x}$ des fonctions définies de $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

**a.** Calculer et simplifier le plus possible les fonctions suivantes:

$$f_0 = f_1\circ f_1 \quad ; \quad f_3 = f_1\circ f_2$$
$$f_4 = f_2\circ f_1 \quad ; \quad f_5 = f_1\circ f_4$$

**b.** En composant les fonctions $f_0$ à $f_5$ entre elles, on obtient encore une de ces six fonctions : on dit qu'elles forment un *groupe*. Compléter le tableau ci-dessous :

| $f\circ g$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | | | | | | |
| $f_1$ | | $f_0$ | $f_3$ | | $f_5$ | |
| $f_2$ | | $f_4$ | | | | |
| $f_3$ | | | | | | |
| $f_4$ | | | | | | |
| $f_5$ | | | | | | |

**11** On gonfle une balle à la vitesse de $4.5\pi\, m^3/min$ . Exprimer son rayon $r$ en fonction du temps $t$ (en minutes) sachant que le rayon est nul au temps $t=0$.

**12** Une montgolfière monte verticalement depuis le sol. Elle est attachée au sol (non verticalement) par une corde attachée à sa nacelle. L'ancrage au sol de la corde est situé à 20$m$ de la verticale de la montgolfière. On libère la corde à une vitesse de 5$m/s$. Exprimer la hauteur $h$ de la montgolfière en fonction du temps $t$.

**13** On définit cinq fonctions élémentaires:

$$a(x)=3x \;;\; b(x)=x+2 \;;\; c(x)=x^2 \;;$$
$$d(x)=x+1 \;;\; e(x)=\frac{1}{x}$$

Décomposer les fonctions ci-dessous pour les exprimer comme compositions de $a,b,c,d,e$ :

$$f(x)=3x+2 \;;\; g(x)=x^2+4x+4$$
$$h(x)=x^2+2 \;;\; j(x)=x^2+2x+3$$
$$k(x)=3x^2+1 \;;\; m(x)=3x^2+6x+5$$
$$n(x)=\frac{1}{x+2} \;;\; p(x)=1+\frac{1}{x}$$
$$q(x)=\frac{2x+1}{x}$$

**14** Pour chacun des cas suivants, déterminer les fonctions $g\circ f\,;\, f\circ g\,;\, f\circ f\,;\, g\circ g$ en précisant le domaine de définition :

**a.** $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-3}$ ; $g(x)=\dfrac{3x-4}{x-2}$

**b.** $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+1}$ ; $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-3}$

**c.** $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x-3}$ ; $g(x)=\dfrac{3x-5}{4x-2}$

**15** Déterminer les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions suivantes pour qu'elles soient bijectives, puis déterminer leur réciproque:

**a.** $f(x)=2x-3$

**b.** $f(x)=2x^2-8$

**c.** $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$

**d.** $f(x)=\sqrt{2+x}$

**e.**
$f(x)=x^2+4x+3$

**f.** $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

## REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

**10**

**a.**
$$f_0(x) = x$$
$$f_3(x) = \frac{4}{2-x}$$
$$f_4(x) = 2-\frac{4}{x}$$
$$f_5(x) = 2-x$$

**b.**

| $f\circ g$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
| $f_1$ | $f_1$ | $f_0$ | $f_3$ | $f_2$ | $f_5$ | $f_4$ |
| $f_2$ | $f_2$ | $f_4$ | $f_0$ | $f_5$ | $f_1$ | $f_3$ |
| $f_3$ | $f_3$ | $f_5$ | $f_1$ | $f_4$ | $f_0$ | $f_2$ |
| $f_4$ | $f_4$ | $f_2$ | $f_5$ | $f_0$ | $f_3$ | $f_1$ |
| $f_5$ | $f_5$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_0$ |

**11** $f(t)=1.5\sqrt[3]{t}$

**12** $h(t)=5\sqrt{t^2-16}$

**13** $f=b\circ a$ ; $g=c\circ b$ ; $h=b\circ c$ ; $j=b\circ c\circ d$ ; $k=d\circ a\circ c$ ; $m=b\circ a\circ c\circ d$ ; $n=e\circ b$ ; $p=d\circ e$ ; $q=b\circ e$

**14**

**a.**
$(g\circ f)(x)=2x-3$ ; $D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$(f\circ g)(x)=\dfrac{x+2}{2}$ ; $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$(f\circ f)(x)=\dfrac{x-5}{x-4}$ ; $D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$

$(g\circ g)(x)=\dfrac{5x-4}{x}$ ; $D_{g\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

**b.**

$(g\circ f)(x)=\dfrac{-5x+9}{7}$ ; $D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$(f\circ g)(x)=\dfrac{2x+9}{3x-4}$ ; $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{4}{3};3\}$

$(f\circ f)(x)=\dfrac{5x-16}{4x-3}$ ; $D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-1;\frac{3}{4}\}$

$(g\circ g)(x)=\dfrac{3x+1}{-x+8}$ ; $D_{g\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{-3;8\}$

**c.**

$(g\circ f)(x)=x$ ; $D_{g\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{3}{4}\}$

$(f\circ g)(x)=x$ ; $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$(f\circ f)(x)=\dfrac{16x-5}{4x+11}$ ; $D_{f\circ f}=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{11}{4};\frac{3}{4}\}$

$(g\circ g)(x)=\dfrac{-11x-5}{4x-16}$ ; $D_{g\circ g}=\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

**15**

**a.** $f(x)=2x-3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+3}{2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

**b.** $f(x)=2x^2-8$ de $\mathbb{R}_+$ dans $[-8;\infty[$

$f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{x+8}{2}}$ de $[-8;\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$

**c.** $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ de $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ dans $\mathbb{R}^*$

$f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x}$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

**d.** $f(x)=\sqrt{2+x}$ de $[-2;\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$

$f^{-1}(x)=x^2-2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $[-2;\infty[$

**e.** $f(x)=x^2+4x+3$ de $[-2;\infty[$ ds $[-1;\infty[$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-2$ de $[-1;\infty[$ dans $[-2;\infty[$

**f.** $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$ de $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$ ds $\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$

$f^{-1}(x)=f(x)$ .

*« La plupart des rêves sont ainsi : une composition de symboles (...)*
*dont chacun contient un sens sacré. »*

*de Christian Charrière, journaliste et romancier français*

## A savoir en fin de chapitre

### Opérations sur les fonctions, composition

✔ opérations sur les fonctions : + , -, * , / ;

✔ composition de fonctions / décomposition de fonctions ;

✔ représenter graphiquement dans des cas simples les somme, différence, produit et quotient de deux fonctions données ;

✔ déterminer la composition de deux fonctions $f$ et $g$ ;

✔ décomposer une fonction donnée en plusieurs fonctions élémentaires ;

**Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 6**

### Bijections, réciproques

✔ fonctions bijectives / test de la droite horizontale ;

✔ fonction réciproque ;

✔ ne pas confondre le mot "réciproque" associé à une fonction ou à une conjecture/théorème ;

✔ relation entre "$f$ bijective" et "$f$ admet une fonction réciproque" ;

✔ relation graphique entre une fonction et sa réciproque ;

✔ déterminer si une fonction donnée est bijective ou non; si non, réduire les ensembles de départ et/ou d'arrivée pour la rendre bijective ;

✔ déterminer, si elle existe, la fonction réciproque d'une fonction donnée ;

✔ représenter graphiquement sur un même repère une fonction et sa réciproque en utilisant l'axe de symétrie $y=x$ ;

**Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 7 à 9**

## Compléments

### Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch06

## Notes personnelles