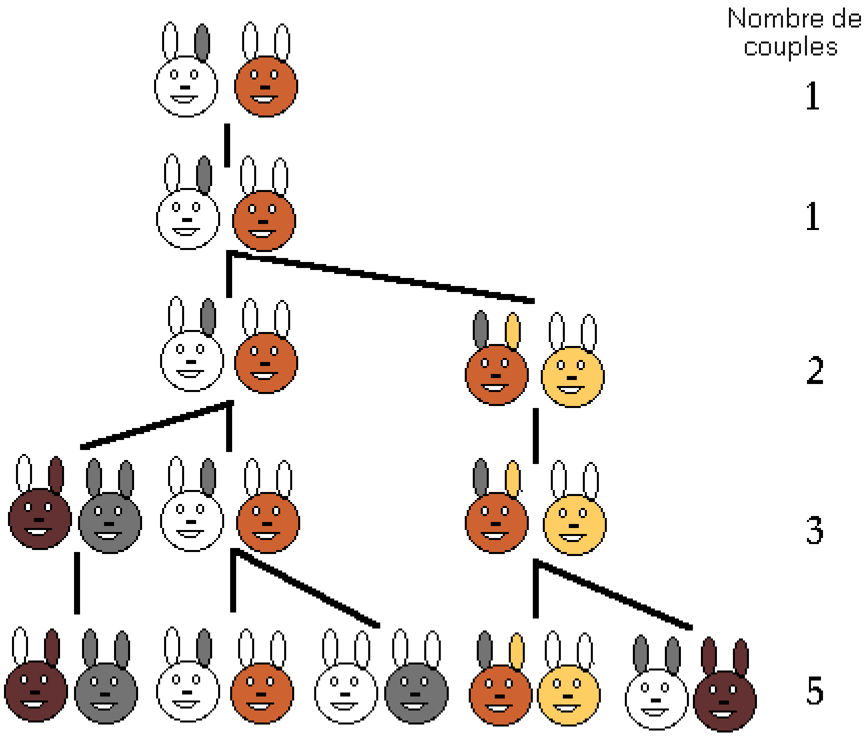
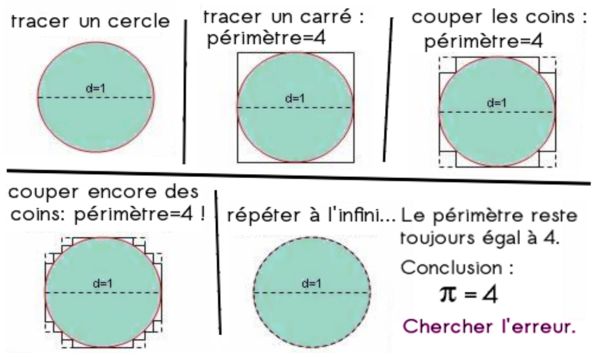
Chapitre 05 - Exponentielles



Source : http://pagesperso-orange.fr/j-m.courbois/elliott/lecons/lapins.gif

Problème



1 [Activité] L'échiquier fou

L'invention du jeu d'échecs a été attribuée à plusieurs peuples et à plusieurs individus. Ceux qui accordent aux Indiens l'honneur de sa découverte, et en fixent l'époque seulement au Ve siècle de notre ère, adoptent aussi le récit suivant de l'auteur arabe Al-Sephadi : « Schéram, roi d'une partie de l'Inde que l'historien ne désigne pas, gouvernait ses peuples d'une manière si folle qu'en quelques années il réduisit son royaume à l'état le plus malheureux. Les Brahmines et les Rayas, lui ayant fait d'humbles remontrances, furent disgraciés en masse. Alors Sessa, fils de Daher, de la caste des Brahmines, plus prudent que les autres, chercha un moyen de donner au roi une leçon qui ne pût le fâcher ; il fut assez heureux pour imaginer l'ingénieux jeu des échecs, où le roi, quoique la plus importante pièce, ne peut faire un pas sans le secours de ses sujets, les pions. Dans l'Orient, berceau de l'apologue, un conseil donné de cette manière devait plaire; le nouveau jeu amusa le roi, qui promit à Sessa de réformer sa conduite et de changer son système de gouvernement; bien plus, voulant rémunérer dignement l'homme qui avait su lui créer un plaisir de plus, il permit au Brahmine philosophe de désigner la récompense qui lui conviendrait, le mieux. Sessa demanda un grain de riz par chaque case de l'échiquier, en doublant toujours depuis 1 jusqu'à 64; cette demande, qui parut plus que modeste lui fut accordée, et le roi ordonna à ses trésoriers de payer ».

Source : http://perso.orange.fr/alan.relaix/page49.html

a. Combien de grains de riz a-t-on ainsi sur la 64ème case de l'échiquier ?

b. Quelle est la somme globale de grains ainsi déposés sur les soixante quatre cases ?

c. En sachant que $2^{10} \simeq 10^3$ (en fait $2^{10} = 1024$), convertir approximativement le résultat précédent en une puissance de 10.

d. A titre de valeur approximative on peut considérer que 100 grains de riz valent largement 1 gramme. Convertir le nombre de grains de riz en kilogramme, voir en tonne (=1000 kg). Trouver sur internet la production annuelle mondiale de riz (en kg) et comparer ce chiffre au résultat que vous avez trouvé.

e. Sachant que le rayon terrestre moyen est de 6370 km et que l'aire d'une sphère est donnée par la formule $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$, évaluer le nombre de grains de riz par cm^2. De manière plus parlante, si l'on considère que les terres émergées occupent 29% de la surface complète de la planète, combien de grains de riz compterait-on par cm^2 ?

2 [Souvenirs] Calculer avec des puissances d'exposants entiers

1 Classer par ordre croissant les expressions suivantes : 2^{222} , $2^{(22^2)}$, 22^{22} et $\left(2^{22}\right)^2$.

2 Simplifier le plus possible et donner une réponse sans exposants négatifs (x et y sont des nombres réels non nuls) :

a. $\dfrac{-70^{762} \cdot (-3)^{764} \cdot 7^0 \cdot 2^{-70}}{21^{763} \cdot (-25)^{381} \cdot 2^{692}}$

b. $\dfrac{(x^3)^{-6} \cdot (y \cdot x^4)^3}{(x^5 \cdot x^{-1})^{-6} \cdot (x^3)^6} \cdot y^{-3}$

Prérequis et activités de découverte

3 [Souvenirs] Manipuler des racines carrées « à la main »

1 Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme la plus simplifiée possible :

a. $\sqrt{\dfrac{50}{242}}$ **b.** $\sqrt{0.04}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{75}}$

2 Simplifier au maximum (en extrayant les facteurs carrés de la racine) :

a. $\sqrt{24}$ **b.** $\sqrt{147}$ **c.** $3\sqrt{5}-4\sqrt{20}+5\sqrt{45}-3\sqrt{80}$

3 Rendre rationnel le dénominateur des nombres suivants et simplifier au maximum :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **b.** $\dfrac{15}{\sqrt{80}}$ **c.** $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-1}$ **d.** $\dfrac{\sqrt{75}+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

4 Simplifier l'écriture en donnant le résultat en valeur exacte : $\sqrt{10+\sqrt{2}}+\sqrt{10-\sqrt{2}}$.

5 Conjecture : $\sqrt{6}-\sqrt{2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Vrai ou faux ? Justifier par un calcul.

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 5

4 [Activité] Autres racines

1 Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme la plus simplifiée possible :

a. $\sqrt[5]{-32}$ **b.** $\sqrt[3]{0.027}$ **c.** $\sqrt[4]{81}$

2 Simplifier au maximum :

a. $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$ **b.** $\sqrt[5]{16}\sqrt[5]{2}$ **c.** $\sqrt{\sqrt{16}}$ **d.** $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$ **e.** $\sqrt[7]{\sqrt{7^7}}$

3 Calculer la valeur exacte de $\sqrt{2^4}+3\sqrt[3]{3^9}-4\sqrt[4]{2^{16}}-\sqrt[5]{4^{10}}-2\sqrt[6]{2^{12}}$.

4 Simplifier au maximum l'écriture :

a. $\sqrt[3]{a\sqrt{a^4}}$ **b.** $\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}}}$

5 [Activité] Puissances d'exposants rationnels

1 Écrire à l'aide de radicaux les nombres suivants :

a. $5^{\frac{1}{2}}$ **b.** $1024^{\frac{1}{10}}$ **c.** $36^{\frac{3}{2}}$ **d.** $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2 Écrire à l'aide de puissances d'exposants rationnels les nombres suivants :

a. $\sqrt{7^3}$ **b.** $\sqrt[5]{3^2}$ **c.** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt{a}$ **d.** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}}$

3 Simplifier au maximum en utilisant les propriétés des puissances d'exposants rationnels ; donner les réponses sans exposant fractionnaire ou rationnel :

a. $a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{4}{5}}$ **b.** $\left(\dfrac{6a^2}{b}\right)^{\frac{3}{5}}\cdot\left(\dfrac{b}{8a}\right)^{\frac{3}{5}}$ **c.** $(a^3b^3)^{\frac{1}{4}}\cdot(a^{11}b)^{\frac{1}{12}}$

6 [Aller plus loin] Démontrer des formules

On considère les conjectures suivantes :

Conjecture 1: Si $a\in\mathbb{R}$ et $n,m\in\mathbb{N}^*$, alors $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$.

Conjecture 2: Si $a\in\mathbb{R}$ et $n,m\in\mathbb{N}^*$, alors $a^n+a^m=a^{n+m}$.

Conjecture 3: Si $a,b\in\mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Conjecture 4: Si $a,b\in\mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$.

a. Expliciter ces notations.

b. Ces conjectures sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

c. Comment appelle-t-on une conjecture démontrée ?

7 [Aller plus loin] Plus de démonstrations

Démontrer les propriétés suivantes :

a. Si $a,b\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$, alors $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

b. Si $a\in\mathbb{R}_+$ et $m,n\in\mathbb{N}^*$, alors $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$.

8 [Activité] Nombre ou pas nombre ?

Les expressions suivantes correspondent-elles à un nombre réel ? Si oui, lequelles ? Sinon pourquoi ? $2^{\frac{1}{2}}$; $4^{0.1}$; 0^3 ; 3^0 ; 0^0 ; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $(-1)^n$; $(-2)^{\frac{1}{2}}$

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 6 à 12

9 [Activité] Fonctions avec GeoGebra

1 On considère les fonctions réelles définies ainsi :

$$f(x)=3^x, \; g(x)=0,8^x \text{ et } h(x)=(-2)^x$$

Utiliser GeoGebra (http://geogebra.org) pour tracer dans un repère orthonormé une représentation graphique approximative de ces fonctions.

2 Étudier les différents types de représentations graphiques possibles pour la famille des fonctions de la forme $f(x)=a^x$ en fonction du paramètre a.

Voir la théorie 6 et l'exercice 13

10 [Activité] Un problème de Nicolas Chuquet (1484)

Chaque jour on soutire d'un tonneau le dixième de son contenu. Au bout de combien de temps le tonneau sera-t-il à moitié vide ?

11 [Activité] Équations exponentielles ... « gentilles »!

Résoudre les équations suivantes :

a. $7^{3x}=7^{2x+5}$ **b.** $10^{-100x}=0.01^{x-4}$ **c.** $2^x=4\sqrt{2}$

Voir la théorie 7 et l'exercice 14

12 [Activité] Applications

1 On peut utiliser les fonctions exponentielles pour décrire la **croissance** de certaines populations. Par exemple, supposons qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour. S'il y a au départ 1000 bactéries, nous obtenons le tableau suivant, où t est le temps en jours et $f(t)$ le nombre de bactéries au temps t :

t	0	1	2	3	4
$f(t)$	1000	2000	4000	8000	16000

a. Exprimer $f(t)$ en fonction de t.

b. Représenter graphiquement la fonction f.

c. En déduire le nombre de bactéries à t = 1,5 jours.

d. En déduire le temps qu'il faut approximativement pour décupler le nombre de bactéries à partir du temps t=0.

2 Certaines quantités physiques *décroissent* de manière exponentielle. Dans de tels cas, si a est la base de la fonction exponentielle, alors $0<a<1$. L'un des exemples les plus communs de décroissance exponentielle est la **décomposition d'une substance radioactive**, ou isotope. La **demi-vie d'un isotope** est le temps nécessaire pour que la moitié d'un échantillon donné se désintègre. La demi-vie est la principale caractéristique utilisée pour distinguer une substance radioactive d'une autre. L'isotope ^{210}Po du polonium a une demi-vie d'environ 140 jours, c'est-à-dire qu'étant donné une certaine quantité de ^{210}Po, la moitié se désintégrera en 140 jours.

a. S'il y a au départ 20 milligrammes de ^{210}Po, combien en restera-t-il après 140 jours ? 280 jours ? 560 jours ?

b. Exprimer $Q(t)$ la quantité restante après t jours en fonction de t (en jours).

c. Représenter graphiquement la fonction Q.

d. Combien de temps faut-il approximativement pour qu'il ne reste plus que 1 milligramme de ^{210}Po ?

3 L'**intérêt composé** est une bonne illustration de la croissance exponentielle. Si une somme d'argent C_0, le capital, est investie à un taux d'**intérêt simple** i, alors l'intérêt à la fin de la première période d'intérêt est le produit $C \cdot i$, où i est exprimé sous forme décimale.

a. Si le capital initial C_0 est de 1000 fr. et si le taux d'intérêt est 9% par an, quel est l'intérêt à la fin d'une année ? Et quel est le nouveau capital ?

b. On réinvestit ce capital à la fin de la période d'intérêt, quel sera alors le nouveau capital à la fin de la deuxième année ?

c. Si on continue à réinvestir, quel sera le capital après t années ?

d. Exprimer $C(t)$, le capital après t années, en fonction de t, d'un taux d'intérêt i et d'un capital initial C_0 inconnus.

e. Si on souhaite disposer d'un capital de 1500.- après 10 ans et si le taux d'intérêt est 3% par an, combien doit-on investir initialement ?

f. Si le capital initiale C_0 est de 1000.- et si le taux d'intérêt est 5% par an, après combien d'années approximativement aura-t-on 2000.- ?

g. Combien de temps faut-il pour doubler un capital C_k donné ?

13 [Aller plus loin] La vraie vie ...

Savez-vous comment les banques gèrent ces questions d'intérêts dans la réalité?

Voir la théorie 8 à 10 et les exercices 15 à 20

14 [Aller plus loin] *e* comme Euler

1 Supposons que la somme de 1000 fr. soit investie à un taux d'intérêt composé de 9%. Calculer le nouveau montant du capital après une année si l'intérêt a été capitalisé :

a. trimestriellement
b. mensuellement
c. par semaine
d. par jour
e. chaque heure
f. chaque minute

Que constate-t-on ?

2 Poser $C_0 = 1$, $i = 1$ et $t = 1$ dans la formule de l'intérêt composé; qu'obtient-on pour $C(t)$?

3 Calculer la valeur de cette expression pour n=1;10;100;...;1000000000. Que constate-t-on ?

4 Par le calcul différentiel et intégral, on peut montrer que si n croît indéfiniment, la valeur de l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend (c'est-à-dire qu'elle se rapproche toujours plus) vers un nombre irrationnel, noté e. Ce nombre se présente dans l'étude de nombreux phénomènes physiques. 2,718 est la valeur approchée couramment utilisée pour approximer e.

5 La **fonction exponentielle naturelle *exp*** est définie par $\exp(x)=e^x$, pour tout nombre réel x. Représenter graphiquement cette fonction.

6 Si le nombre de périodes d'intérêt n par an croît indéfiniment, on dit que l'intérêt est **composé continu**. La formule de l'intérêt composé continu est alors la suivante :

$$C(t)=C_0 e^{it}$$

où C_0 est le capital investi initialement, i le taux d'intérêt annuel exprimé sous forme décimale, t le nombre d'années pendant lesquelles C_0 est investi et $C(t)$ le montant après t années.

Appliquer la formule de l'intérêt composé continu avec C_0 = 20000, i = 0.08 et t = 5.

15 [Aller plus loin] Formule de l'intérêt composé continu

1 On considère la formule de l'intérêt composé $C(t)=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$. Poser $\frac{i}{n}=\frac{1}{k}$, d'où $n=ki$ et $nt=kit$ et récrire la formule dans ce cas.

2 Pour **l'intérêt composé continu**, on accepte l'idée que le nombre n de périodes d'intérêt par an croît indéfiniment, ce qu'on note $n\rightarrow+\infty$; on a alors aussi $k\rightarrow+\infty$. En utilisant le fait que $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\rightarrow e$ lorsque $k\rightarrow+\infty$, on obtient dans la formule de l'intérêt composé :

$$C_0\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{it} \rightarrow C_0(e)^{it}=C_0 e^{it}\text{, quand } k\rightarrow+\infty$$

Refaire le raisonnement en montrant toutes les étapes.

16 [Aller plus loin] La loi de croissance

La formule de l'intérêt composé continu est un cas particulier de la **loi de croissance.** Soit q_0 la valeur d'une quantité q au temps t = 0 (c'est-à-dire que q_0 est la valeur initiale de q). Si q change à chaque instant selon un taux proportionnel à sa valeur actuelle, alors on aura une quantité $q(t)=q_0 e^{T \cdot t}$ après un temps t où T > 0 est le **taux de croissance**.

Si T < 0 on parle de le **taux de régression** de q.

La population d'une ville en 1970 était de 153'800 habitants. En admettant que la population croisse constamment de 5% par an, calculer le nombre d'habitants actuel.

17 [Aller plus loin] En savoir plus sur *e*

1 e est ainsi nommé en honneur de Léonard Euler, l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire. Quand et où a-t-il vécu? De quelle nationalité était-il ? Pourquoi est-il célèbre ? Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler .

2 e est une des constantes les plus utilisée en mathématique. Grâce aux ordinateurs, on en connaît de plus en plus de décimales (10^{11} en 2007!). On « retrouve » cette constante dans de nombreux domaines des mathématiques apparemment tous différents. voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_de_N%C3%A9per.

Voir la théorie 11 à 13 et les exercices 21 à 26

1 [Souvenirs] Calculer avec les puissances entières

Définition [puissance d'exposant entier positif]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

La **puissance n-ième de a**, notée a^n, est définie par : $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$

a est appelé la **base** et n l'**exposant** de l'expression a^n.

Remarques :

- $a^1 = a$
- a^2 se lit « a (au) carré », en référence à l'aire d'un carré de côté a.
- a^3 se lit « a (au) cube », en référence au volume d'un cube d'arête a.

Théorème [propriétés des puissances d'exposants entiers positifs]

Si $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, alors :

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Définition [puissance d'exposant nul]

Soit a un nombre réel <u>non nul</u> ($a \in \mathbb{R}^*$). Alors on définit : $a^0 = 1$

Remarque : 0^0 n'est pas défini.

Définition [puissance d'exposant entier négatif]

Soit a un nombre réel <u>non nul</u> ($a \in \mathbb{R}^*$) et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on définit : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Exemple 1 : Calculer $(-2)^{-3}$.

On utilise les définitions des puissances et l'ordre des opérations :

$$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-8)} = -\frac{1}{8}$$

Exemple 2 : Comparer $(5^3)^2$, $5^{(3^2)}$, 5^{2^3} et 5^7

On ramène tous les nombres à une même base ou à un même exposant pour pouvoir les comparer facilement :

$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$, $5^{(3^2)} = 5^9$, $5^{2^3} = 5^{(2^3)} = 5^8$, donc $(5^3)^2 < 5^7 < 5^{2^3} < 5^{(3^2)}$.

2 [Aller plus loin] Grandes sommes

Théorème [somme des puissances successives]

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

Exemple : Calculer $5^2+5^3+...+5^{98}$.

$$5^2+5^3+...+5^{98}=(1+5+5^2+5^3+...+5^{98})-(1+5)=\frac{5^{99}-1}{5-1}-6=\frac{5^{99}-1}{4}-6=\frac{5^{99}-25}{4}$$

3 [Souvenirs] Calculer avec des racines carrées

Définition [racine carrée]

La **racine carrée** d'un nombre positif ou nul a est le nombre **positif ou nul** b tel que $b^2=a$.

Notation

La racine carrée se note avec le symbole $\sqrt{\ }$, par exemple $\sqrt{12}$ pour la racine carrée de 12.

Exemples :

$\sqrt{16}=4$, car $4\geq 0$ et $4^2=16$ [**et il est faux d'écrire que $\sqrt{16}=\pm 4$!**]

$\sqrt{-16}$ n'existe pas, car aucun nombre élevé au carré est égal à -16 .

Théorème [propriétés des racines carrées]

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls et n un entier naturel non nul :

1 $\sqrt{a^2}=a$ et $(\sqrt{a})^2=a$

2 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

3 $\sqrt{a^n}=(\sqrt{a})^n$

4 Si $b>0$, alors $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention : en général $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Par exemple, $5=\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}=7$.

Simplifier une expression contenant une ou plusieurs racines carrées

1 Effectuer les multiplications et divisions à l'aide des propriétés.
2 Extraire les facteurs carrés de la racine.
3 Ne pas laisser de racine au dénominateur (rendre le dénominateur rationnel).

Exemple 1 : calculer la valeur exacte de $\sqrt{45}\sqrt{5}$.

On utilise les propriétés des racines pour ramener tout sous une même racine et on factorise : $\sqrt{45}\sqrt{5}=\sqrt{45\cdot 5}=\sqrt{5\cdot 9\cdot 5}=\sqrt{5^2\cdot 3^2}=\sqrt{(5\cdot 3)^2}=5\cdot 3=15$

Exemple 2 : écrire le nombre $\sqrt{32}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux nombres entiers positifs, b étant le plus petit possible.

$\sqrt{32}$ =

=

=

=

On fait apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un entier.

On décompose la racine carrée du produit puis on applique la définition d'une racine carrée.

Exemple 3 : Réduire la différence $2\sqrt{72}-7\sqrt{18}$.

=	⟵	On décompose 72 et 18 pour faire apparaître le produit d'un **carré parfait** (le plus grand possible) par un même entier.
$=2\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}-7\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}$	⟵	On décompose la racine carrée de chacun des produits.
=	⟵	On applique la définition d'une racine carrée.
=	⟵	$\sqrt{2}$ est un facteur commun aux deux termes.
=	⟵	On factorise par $\sqrt{2}$.
$=-9\sqrt{2}$	⟵	On réduit et on obtient la résultat sous forme de valeur exacte.

Définition

Le **conjugué d'une expression** du type $x-y$ (respectivement $x+y$) est l'expression $x+y$ (respectivement $x-y$).
Multiplier par le conjugué est utilisé pour rendre rationnel un dénominateur qui ne l'est pas.

Exemple: Rendre rationnel le dénominateur de $\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ et simplifier au maximum.

On **multiplie par le conjugué** et on utilise les propriétés des racines :

$$\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{18}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{18}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{3}-\sqrt{18}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2}$$
$$=\sqrt{54}+\sqrt{9}-\sqrt{36}-\sqrt{6}=\sqrt{9\cdot 6}+3-6-\sqrt{6}=3\sqrt{6}-3-\sqrt{6}=2\sqrt{6}-3$$

Voir les exercices 1 à 5

4 [A savoir] Racines n-ièmes

Définition

Soit $a\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $n>1$.

1 Si n est pair, la **racine n-ième de a**, notée $\sqrt[n]{a}$ est, <u>si il existe</u>, le nombre réel <u>positif</u> b tel que la puissance n-ième de b donne a.

2 Si n est impair, la **racine n-ième de a**, notée $\sqrt[n]{a}$ est le nombre réel b tel que la puissance n-ième de b donne a.

Exemples :

- ☐ $\sqrt[3]{8}=2$, car $2^3=8$.
- ☐ $\sqrt[3]{-8}=-2$, car $(-2)^3=-8$.
- ☐ $\sqrt[4]{81}=3$, car $3^4=81$.
- ☐ $\sqrt[4]{-81}$ n'existe pas, car aucun nombre élevé à la puissance 4 est égal à -81.

Remarques : soit a un nombre réel positif ou nul et n un entier naturel non nul :

- ☐ $\sqrt[2]{a}$ se note $\sqrt{a}$ et se lit « racine carrée de a ».
- ☐ $\sqrt[3]{a}$ se lit « racine cubique de a ».
- ☐ $\sqrt{a^2}=|a|$ pour tout nombre réel a.
- ☐ $\sqrt[2n+1]{a}$ est un nombre réel quelque soit la valeur de a et pour tout entier naturel non nul n.

Théorème [propriétés des racines n-ièmes]

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls et m et n deux entiers naturels non nuls ; alors on a :

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ et $\sqrt[n]{a^n}=a$
2. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
4. Si $b>0$, alors $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

Exemple : Simplifier au maximum $\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[3]{a^6}}}$, où $a\in\mathbb{R}$.

On utilise les propriétés et définitions des racines :

$$\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt[3]{a^6}}}=\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a^4\cdot a^2}}=\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[3]{a^6}}=\sqrt[3]{a\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^3}=a$$

5 [A savoir] Puissances rationnelles

Définition [puissance d'exposant du type 1/n]

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors on définit : $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$.

Définition [puissance d'exposant rationnel]

Soit $a\in\mathbb{R}_+$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $m\in\mathbb{Z}$. Alors on définit : $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Exemple: Calculer $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-1.5}$ et donner la réponse sous forme simplifiée au maximum et sans exposants négatifs ou fractionnaires :

On utilise les propriétés des puissances et des racines :

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-1.5}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt[2]{\left(\frac{1}{9}\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^3}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}^{\,3}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}=\frac{1}{\frac{1}{3^3}}=3^3=27$$

Théorème [propriétés des puissances d'exposants rationnels]

Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n, m \in \mathbb{Q}$, alors, on a:

1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2 $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

3 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

4 $\left(a \cdot b\right)^m = a^m \cdot b^m$

Remarques :

☐ on a défini a^n pour tout n entier ; il est possible de démontrer le théorème ci-dessous pour toutes les puissances rationnelles ;

☐ il serait trop complexe de définir ici également a^n pour tout n irrationnel ; cependant, ceci est possible. De même, il est possible de démontrer que le théorème ci-dessus est bien vrai pour des nombres m et n irrationnels et donc pour des nombres m et n réels.

Exemple 1 : Calculer $2^{\sqrt{3}}2^{2\sqrt{3}}$ et donner la réponse sous forme simplifiée au maximum.

On utilise une propriété des puissances appliquée à des puissances irrationnelles :

$2^{\sqrt{3}}2^{2\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}+2\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$

Exemple 2 : Simplifier au maximum $(4a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (8a^2)^{\frac{1}{5}}$.

On utilise les propriétés des puissances :

$$(4a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (8a^2)^{\frac{1}{5}} = (4a^3 \cdot 8a^2)^{\frac{1}{5}} = (32a^{3+2})^{\frac{1}{5}} = (32a^5)^{\frac{1}{5}} = ((2a)^5)^{\frac{1}{5}} = (2a)^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 2a$$

Exemple 3 : Écrire $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ à l'aide de puissances d'exposants rationnels puis donner la réponse sous forme simplifiée au maximum et sans exposants négatifs ou fractionnaires.

On utilise les propriétés des puissances et des racines :

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{a}$$

Voir les exercices 6 à 12

6 [A savoir] Fonctions exponentielles

Définition [fonction exponentielle]

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. On définit la **fonction exponentielle de base *a*** par :

$$\begin{array}{rcl} \exp_a : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \rightarrow & \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

Remarques :

☐ dans cette définition, c'est l'exposant qui varie et la base qui est constante ;

☐ on exclut les cas $a = 0$, $a = 1$ et $a < 0$, car, alors on n'est pas en présence d'un phénomène exponentiel ;

☐ cette définition est explicite pour des $x \in \mathbb{Q}$ puisque nous avons défini les puissances rationnelles ; par contre, nous devons accepter de travailler également avec des exposants irrationnels (càd $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) bien que nous ne soyons pas capable à ce stade de les définir ...

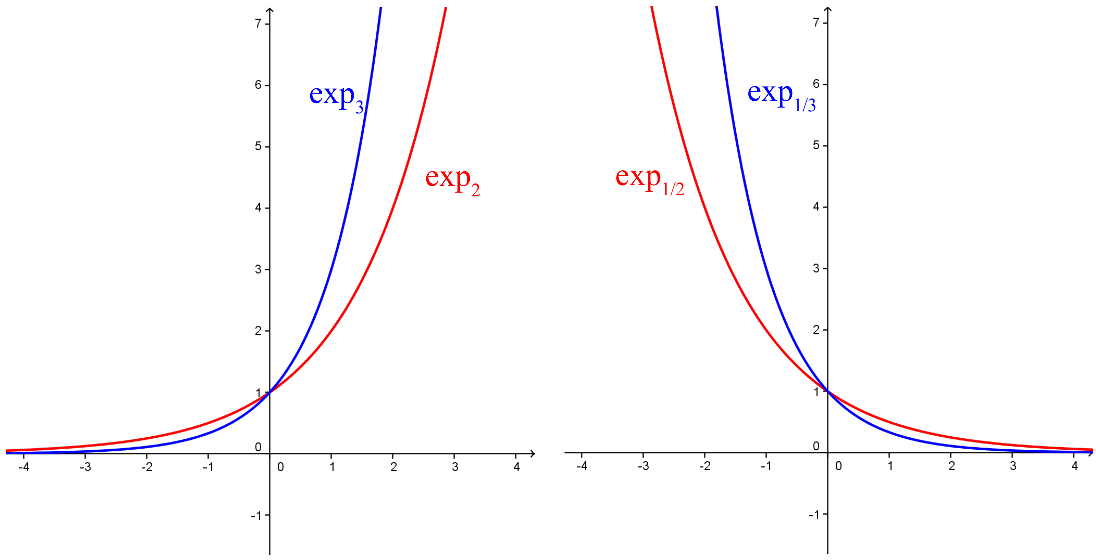
Théorème [signe d'une fonction exponentielle] – sans démonstration

Si f est une fonction exponentielle de base a, alors $f(x)$ est strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$

Théorème [(dé)croissance d'une fonction exponentielle] – sans démonstration

Si f est une fonction exponentielle de base a, alors :
☐ Si $a > 1$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
☐ Si $0 < a < 1$: f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

Exemple : représenter graphiquement les fonctions définies par $\exp_2(x)$, $\exp_3(x)$, $\exp_{1/2}(x)$ et $\exp_{1/3}(x)$.



Voir l'exercice 13

7 [A savoir] Équations exponentielles « simples »

Marche à suivre pour résoudre des équations exponentielles simples

Certaines équations exponentielles peuvent se résoudre assez simplement; il s'agit:
☐ de transformer l'équation en une équation équivalente du type $a^{expression\,1} = a^{expression\,2}$;
☐ en déduire que $expression\,1 = expression\,2$;
☐ de résoudre cette dernière équation à l'aide des méthodes connues.

Remarque : la 2e étape sera formellement discutée dans le chapitre suivant lorsque nous parlerons de bijectivité.

Exemple : résoudre l'équation $49^{3x}=7^{x+1}$.

On transforme en une même base, on utilise les propriétés des puissances et on conclut grâce à la remarque ci-dessus :

$$49^{3x}=7^{x+1} \Leftrightarrow (7^2)^{3x}=7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{2\cdot 3x}=7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{6x}=7^{x+1} \Leftrightarrow 6x=x+1 \Leftrightarrow 5x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$$

Donc $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

Remarque : toutes les équations exponentielles ne peuvent cependant être résolues ainsi, comme par exemple l'équation $13^{3x}=7^{x+1}$. Il faudra trouver une autre méthode. La solution sera apportée par les logarithmes (à suivre).

Voir l'exercice 14

8 [A savoir] Croissance exponentielle

Théorème [loi de croissance exponentielle]

Si on considère une quantité Q dont la valeur **augmente** d'un taux T (sous forme décimale) par période (année, mois, jour, ...), et si Q_0 est la valeur initiale de cette quantité, alors la valeur $Q(t)$ de cette quantité après t périodes est donnée par :

$$Q(t)=Q_0(1+T)^t$$

Exemple : la population du canton de Genève croît au taux de 2% par année. Elle est actuellement de 466'918 habitants. Si ce taux se maintient, combien y aura-t-il d'habitants dans le canton de Genève dans 5 ans ?

On a : $Q_0=466'918$, $T=0.02$, $t=5$, d'où $Q(5)=466'918(1+0.02)^5 \simeq 515'515$.

9 [A savoir] Décroissance exponentielle

Théorème [loi de décroissance exponentielle]

Si on considère une quantité Q dont la valeur **diminue** d'un taux T (sous forme décimale) par période (année, mois, jour, ...) et si Q_0 est la valeur initiale de cette quantité, alors la valeur $Q(t)$ de cette quantité après t périodes est donnée par :

$$Q(t)=Q_0(1-T)^t$$

Exemple : une machine dont la valeur à neuf est de 100'000 perd chaque année 12% de sa valeur résiduelle. Quelle est la valeur de cette machine 8 ans après l'avoir acheté ?

On a : $Q_0=100'000$, $T=0.12$, $t=8$, d'où $Q(8)=100'000(1-0.12)^8 \simeq 35'963$.

10 [A savoir] Intérêts composés

Définitions [intérêt simple ou composé]

Un capital initial produit des **intérêts simples** si les intérêts sont calculés sur ce capital initial une unique fois, en utilisant le taux donné.
Il produit des **intérêts composés** si on définit des périodes de temps après lesquelles les intérêts sont calculés, et que les intérêts générés après chaque période sont ajoutés au capital pour produire eux-aussi de nouveaux intérêts.

Théorème [intérêt composé]

Si C_0 est le capital investi initialement, i le taux d'intérêt annuel (sous forme décimale), n le nombre de périodes d'intérêt par an, t le nombre d'années pendant lesquelles le capital C_0 est investi, alors le montant $C(t)$ obtenu après t années est donné par :

$$C(t)=C_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Exemple: si on veut disposer de 2000 fr. après 2 ans et 3 mois, investis au taux de 12% par an capitalisé mensuellement, quel capital initial doit-on investir ?

On a : $C(t)=2000$, $i=0.12$, $n=12$, $t=2.25$, d'où

$$2000=C_0\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12\cdot 2.25} \Leftrightarrow C_0=\frac{2000}{(1.01)^{12\cdot 2.25}}\simeq 1528.81 \text{ fr.}$$

Remarque : si l'intérêt est capitalisé annuellement, c'est-à-dire s'il n'y a qu'une période d'intérêt par an (n=1), alors le théorème ci-dessus devient : $C(t)=C_0(1+i)^t$ (on retrouve la loi de croissance exponentielle).

Voir les exercices 15 à 21

11 [Aller plus loin] e et la fonction *exp*

Définitions [nombre e et fonction exp]

e est le nombre irrationnel valant 2,71828 quand il est approximé à 5 décimales ($e\simeq 2.71828$). On peut le trouver ainsi : l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tend vers e , lorsque n devient très grand (n tend vers l'infini).
La **fonction exponentielle naturelle,** notée **exp**, est définie par

$$\begin{aligned} \exp:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\to \exp(x)=e^x \end{aligned}$$

Remarques :

☐ e est un nombre irrationnel. Pour utiliser une valeur précise (mais toujours approchée) du nombre e, il faut utiliser judicieusement la calculatrice.

☐ Euler est un célèbre mathématicien suisse (Bâle 1707- St-Pétersbourg 1783) considéré comme l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps.

12 [Aller plus loin] Intérêt composé continu

Définitions [intérêt composé continu]

Un capital initial produit des **intérêts composés continus** si on considère des intérêts composés où l'on paye un grand nombre n de périodes, puis qu'on imagine que ce nombre n tend vers l'infini. c'est-à-dire qu'on calculerait l'intérêt un nombre infini de fois, soit de manière **continue**.

Théorème [intérêt composé continu]

Si C_0 est le capital investi initialement, i le taux d'intérêt annuel exprimé sous forme décimale, t le nombre d'années pendant lesquelles le capital C_0 est investi et $C(t)$ le montant après t années, alors on a :

$$C(t)=C_0 e^{it}$$

Exemple : quelle somme d'argent déposée sur un compte épargne à un taux de 1.25% par an d'intérêt composé continu rapportera un montant de 10'000.- après 6 ans ?

On a : $i=0.0125$, $t=6$, $C(6)=10'000$, d'où

$$10'000=C_0\cdot e^{0.0125\cdot 6} \quad \Leftrightarrow \quad C_0=\frac{10'000}{e^{0.0125\cdot 6}}\simeq 9'277$$

13 [Aller plus loin] Loi de croissance (continue)

Théorème [loi de (dé)croissance continue]

Si q_0 est la valeur d'une quantité q au temps t = 0 (c'est-à-dire que q_0 est la valeur initiale de q), et si q change à chaque instant selon un taux proportionnel à sa valeur actuelle, alors, après un temps t, on aura une quantité :

$$q(t)=q_0 e^{T\cdot t}$$

Si $T>0$, on parle de **taux de croissance** de q.
Si $T<0$, on parle de **taux de décroissance** de q.

Exemple: en 1982, la population des Etats-Unis était d'environ 227 millions d'habitants. La population a continué de croître de manière régulière au taux de 0.7% par an. Calculer le nombre d'habitants actuel (en 2021) en faisant l'hypothèse que ce taux de croissance est resté constant.

On a : $q_0=227'000'000$, $T=0.007$, $t=39$, d'où

$$q(39)=227'000'000\cdot e^{0.007\cdot 39}\simeq 298'255'356$$

Voir les exercices 22 à 27

Puissances et racines

1 Effectuer les calculs suivants « à la main » :

a. $2^4 \cdot 3^4$

b. $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$

c. $(-a)^4 \cdot (-2b)^3 \cdot c^4$

d. $3^7 \cdot (-3)^7 \cdot \frac{1}{9^2} \cdot \frac{1}{27^2}$

2 Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme la plus simplifiée possible :

a. $\sqrt{0}$ **b.** $\sqrt{625}$ **c.** $\sqrt{0.0009}$

3 Simplifier au maximum ; si nécessaire, rendre rationnel le dénominateur :

a. $\sqrt{12}\sqrt{3}$

b. $\sqrt{\sqrt{4}}$

c. $\sqrt{18}$

d. $\sqrt{243}$

e. $\sqrt{50}$

f. $\sqrt{1000}$

g. $\frac{2}{\sqrt{18}}$

h. $\frac{3}{2\sqrt{12}}$

i. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$

j. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

k. $\frac{3}{4-\sqrt{5}}$

l. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

4 Simplifier au maximum :

$$2\sqrt{40}-2\sqrt{90}+\sqrt{4000}-5\sqrt{10}$$

Voir la théorie 1 à 3

Puissances rationnelles, racines n-ièmes

5 Effectuer les calculs suivants en donnant les résultats sous forme la plus simplifiée possible :

a $\sqrt[4]{625}$

b $\sqrt[5]{32}$

c $\sqrt[6]{729}$

d $\sqrt[3]{-0.027}$

e $\sqrt[3]{0.000008}$

6 Simplifier au maximum :

a. $\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{5}$

b. $\sqrt{2^6}$

c. $\sqrt[14]{4^7}$

d. $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$

e. $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

f. $\sqrt[4]{\sqrt{256}}$

g. $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

h. $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$

i. $\sqrt[3]{54}$

j. $\sqrt[4]{80}$

7 Simplifier au maximum :

$$\sqrt{5^4}+2\sqrt[3]{5^6}-3\sqrt[4]{5^8}+4\sqrt[7]{5^{14}}-5\sqrt[13]{5^{26}}$$

8 Simplifier au maximum ($a \in \mathbb{R}_+$) :

a. $\sqrt[3]{a\sqrt{a^2\sqrt{a^4}}}$ **b.** $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ **c.** $\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$

9 Ordonner en ordre croissant $\left(2^2\right)^3$, $2^{(2^2)}$, $\left(2^{33}\right)^{0.5}$ et $4^{(2^2)}$.

10 Écrire à l'aide de radicaux les expressions suivantes :

a. $3^{\frac{5}{6}}$

b. $0^{\frac{1}{5}}$

c. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

d. $25^{0.5}$

e. $(0.0625)^{\frac{1}{4}}$

f. $32^{0.2}$

g. $2^{-\frac{1}{2}}$

11 Écrire à l'aide de puissances d'exposants rationnels les expressions suivantes :

a. $\sqrt[11]{5^6}$

b. $\sqrt[4]{4^2}$

c. $\sqrt{a^6}$

d. $\sqrt[n]{a^{2n}}$

e. $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^6$

f. $\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^3$

g. $\left(\sqrt[5]{a^3}\right)\cdot\left(\sqrt[5]{a}\right)^2$

h. $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[2n]{a}$

i. $\left(\sqrt[2n]{\sqrt[n]{a}}\right)^{3n}$

j. $\frac{\sqrt[3]{a^5}\sqrt[6]{a}}{a^3}$

k. $\sqrt{a}\sqrt[5]{a^3}\left(\sqrt[10]{a}\right)^4$

12 Conjectures vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $a, b \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}=a+b$

b. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{Q}$, alors $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

c. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{Q}$, alors $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$.

Voir la théorie 4 à 5

Fonctions exponentielles

13 Tracer dans un même repère orthonormé une représentation graphique approximative des fonctions exponentielles suivantes :

a. $f(x)=2^x$

b. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

c. $f(x)=0.1^x$

d. $f(x)=100^x$

Voir la théorie 6

Equations exponentielles

14 Résoudre les équations suivantes :

a. $3^{2x+3}=3^{x^2}$

b. $3^{3x+2}=9^{x^2}$

c. $2^{-100x}=0.5^{x-4}$

d. $13^x=1$

e. $5^{x+2}\cdot 25^{-x}=625$

f. $4^{x-3}=8^{4-x}$

Voir la théorie 7

Problèmes exponentiels

15 Le nombre de bactéries dans une culture croît de 600 à 1800 entre 7h et 9h du matin. En supposant que la croissance soit exponentielle, le nombre $f(t)$ de bactéries t heures après 7h du matin est donné par $f(t)=600\cdot 3^{\frac{t}{2}}$.

a. Donner approximativement le nombre de bactéries dans la culture à 8h, à 10h et à 11h du matin.

b. Représenter le graphique de f pour $0\le t\le 4$.

16 L'isotope radioactif ^{210}Bi du bismuth a une demi-vie de 5 jours. S'il y a 100 mg de ^{210}Bi au temps $t = 0$, alors la quantité résiduelle $f(t)$ après t jours est donnée par $f(t)=100\cdot 2^{-\frac{t}{5}}$.

a. Quelle quantité de ^{210}Bi reste-t-il après 5 jours ? 10 jours ? 12.5 jours ?

b. Représenter le graphique de f pour $0\le t\le 30$.

17 Quel capital obtient-on après 18 ans si on investit un capital initial de 1200.- à un taux de 2% par an ?

18 Donner le taux d'intérêt annuel en % pour lequel on a placé un montant de 3'000.- pour obtenir un solde de 3725.- en onze ans.

19 Au cours d'une enquête sur la population d'une commune, on a constaté une diminution du nombre d'habitant d'environ 5% chaque année. Si, au début, le nombre d'habitants N_0 de la commune était de 10'000 :

a. déterminer le nombre d'habitants, $N(1)$, à la fin de la première année ;

b. déterminer le nombre d'habitants, $N(3)$, à la fin de la troisième année ;

c. exprimer $N(t)$, le nombre d'habitants à la fin de la t-ième année, en fonction de t et N_0.

d. déterminer le nombre d'habitants à la fin de la dixième année.

20 L'île de Manhattan a été vendue 24 fr. en 1626. A combien se monterait cette somme en 1996 si elle avait été investie à 6% par an, capitalisé trimestriellement ?

21 Pascal apporte à la banque, le 19 janvier 2004, la somme de 12'500 fr. Le 19 janvier 2012, l'intérêt s'élève à 3'077,25 fr. A quel taux d'intérêt par an, capitalisé semestriellement, avait-il placé son argent ?

Voir la théorie 8 à 10

e, *exp*, croissances continues

22 Quelle somme investie à un taux de 11% par an d'intérêt composé continu procurera un montant de 100000 francs après 18 années ?

23 En 1985, on estimait la population de l'Inde à 762 millions d'habitants ; la population a continué de croître de manière régulière au taux de 2.2% par an. En supposant que ce taux de croissance élevé reste constant, calculer le nombre d'habitants actuel en Inde.

24 En science de la pêche, une cohorte est l'ensemble des poissons nés une même année. On suppose habituellement que le nombre $N(t)$ de poissons encore en vie t années plus tard est donné par une fonction exponentielle. Pour le flétan du Pacifique, $N(t)=N_0 e^{-0.2t}$ où N_0 est la taille initiale de la cohorte. Donner approximativement le pourcentage du nombre de poissons d'origine encore en vie 10 ans plus tard.

25 En 1971, le salaire minimal aux Etats-Unis était de 6.40 fr. En admettant que le taux d'inflation soit de 5% par an, calculer le salaire minimal équivalent actuel.

26 Soit f la fonction définie par $f(x)=x^2(-2e^{-2x})+2xe^{-2x}$. Déterminer les zéros de f.

27 Résoudre l'équation $e^{x^2}=e^{7x-12}$.

Voir la théorie 11 à 13

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

28 Effectuer les calculs suivants « à la main » en donnant les résultats sous forme la plus simplifiée possible :

a. $\sqrt{\frac{25}{36}}$ **f.** $\sqrt{\frac{100}{841}}$

b. $\sqrt{0.0016}$ **g.** $\sqrt[3]{729}$

c. $\sqrt[3]{1000}$ **h.** $\sqrt[4]{0.0001}$

d. $\sqrt[3]{-343}$ **i.** $\sqrt[3]{0.064}$

e. $\sqrt[6]{64}$ **j.** $\sqrt[3]{0.125}$

29 Simplifier au maximum :

a. $\sqrt[8]{2187}\cdot\sqrt[8]{3}$ **c.** $\sqrt[5]{2^{10}}$

b. $\sqrt{2^2}$ **d.** $\sqrt[16]{3^8}$

30 Simplifier au maximum (en extrayant les facteurs carrés de la racine) :

a. $\sqrt{300}$ **d.** $\sqrt{80}$

b. $\sqrt{54}$ **e.** $\sqrt{250}$

c. $\sqrt{125}$ **f.** $\sqrt{7000}$

31 Rendre rationnel le dénominateur des nombres suivants et simplifier au maximum :

a. $\frac{3}{\sqrt{6}}$ **e.** $\frac{3}{2+\sqrt{7}}$

b. $\frac{2}{3\sqrt{12}}$ **f.** $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

c. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ **g.** $\frac{3\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

d. $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ **h.** $\frac{\sqrt{15}-2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2}$

32 Simplifier l'écriture :

a. $\sqrt{5+\sqrt{21}}+\sqrt{5-\sqrt{21}}$

b. $\sqrt{\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

33 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier sans utiliser la calculatrice.

a. Conjecture : $\sqrt{6}+\sqrt{2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$

b. Conjecture : $\sqrt{4+\sqrt{12}}=1+\sqrt{3}$

34 Les expressions $(0.1)^0$, 2^{-3}, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, $(-4)^{-3}$, $(\sqrt{2})^{-1}$, 0^{-2}, $(-6)^0$, 0^0 correspondent-elles à un nombre réel ? Si oui, lequel ? Sinon pourquoi ?

35 Écrire à l'aide de puissances d'exposants rationnels les expressions suivantes :

a. $\sqrt[4]{a^8}$ **e.** $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

b. $\left(\sqrt{a^3}\right)^{12}$ **f.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$

c. $\left(\sqrt{a^4}\right)^{2n}$ **g.** $\sqrt[n]{\sqrt{a}}$

d. $\left(\sqrt[3]{a}\right)^2\cdot\sqrt[3]{a}$ **h.** $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128}$

36 Résoudre les équations suivantes:

a. $7^{x+6}=7^{3x-4}$ **d.** $2^x-16\cdot 2^{3x-2}=0$

b. $3^{2x+3}=3^{x^2}$ **e.** $5^{2x+1}=\sqrt{5\sqrt{125}}$

c. $27^{x-1}=9^{2x-3}$ **f.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}=2$

37 Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Supposons que pour une dose initiale de 10 mg, la quantité $A(t)$ dans le corps après t heures est donnée par $A(t)=10\cdot(0.8)^t$.

a. Donner approximativement la quantité de médicament dans le corps 8h après la dose initiale.

b. Quel pourcentage du médicament encore présent dans le corps est éliminé chaque heure ?

38 Quelle somme d'argent investie à un taux d'intérêt de 5% par an rapportera 25'000 fr. après 3 ans ?

39 Si un fonds d'épargne rapporte un intérêt de 10% annuel capitalisé semestriellement, quelle somme d'argent investie produira la somme de 5000 fr. après 1 an ?

40 Si une certaine marque de voiture est vendue V_0 francs, son prix après t années est donné par $V(t)=0.78\cdot V_0\cdot(0.85)^{t-1}$. Si le prix à l'origine était de 10'000 fr., calculer au franc près le prix après :

a. 1 an **b.** 4 ans **c.** 7 ans

41 Si 1'000 fr. sont déposés sur un compte d'épargne à un taux de 8.25% par an d'intérêt composé continu, calculer le montant à disposition après 5 années.

42 Sous certaines conditions, la pression atmosphérique p (en mmHg) à l'altitude de h mètres est donnée par $p=734\,e^{-0.000113\,h}$. Quelle est la pression à l'altitude de 12000 mètres ?

43 Le modèle de Jens est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille des enfants d'âge préscolaire. Si y est la taille (en centimètres) et x l'âge (en années), alors $y=79.041+6.39\,x-e^{3,261-0.993\,x}$ pour $\frac{1}{4}\leq x\leq 6$. D'après le calcul différentiel et intégral, le taux de croissance R (en cm/année) est donné par $R=6.39+0.993\,e^{3.261-0.993\,x}$. Calculer la taille et le taux de croissance d'un enfant de 1 an.

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

28

a. 5/6 **b.** 0.04 **c.** 10 **d.** -7 **e.** 2 **f.** 10/29 **g.** 9 **h.** 0.1 **i.** 0.4 **j.** 0.5

29

a. 3 **b.** 2 **c.** 4 **d.** $\sqrt{3}$

30

a. $10\sqrt{3}$ **b.** $3\sqrt{6}$ **c.** $5\sqrt{5}$ **d.** $4\sqrt{5}$ **e.** $5\sqrt{10}$ **f.** $10\sqrt{70}$

31

a. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **b.** $\frac{\sqrt{3}}{9}$ **c.** $\sqrt{3}+2$ **d.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ **e.** $-2+\sqrt{7}$ **f.** $\frac{17-4\sqrt{10}}{43}$ **g.** $\frac{32+5\sqrt{10}}{18}$ **h.** $\sqrt{3}$

32

a. $\sqrt{14}$ **b.** 2

33

a. Faux car en calculant les carrés des deux membres, on obtient les nombres $8+4\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ qui ne sont pas égaux.

b. Vrai car en calculant les carrés des deux membres, on obtient le nombre $4+2\sqrt{3}$ des deux côtés.

34 $(0.1)^0=1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$

$(-4)^{-3}=-\frac{1}{64}$

$(\sqrt{2})^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

0^{-2} n'est pas un nombre réel car la division par 0 n'est pas définie

$(-6)^0=1$

0^0 n'est pas un nombre réel car pas défini.

35

a. a^2 **b.** a^{18} **c.** a^{4n} **d.** a **e.** $a^{\frac{25}{12}}$ **f.** $a^{\frac{1}{6}}$ **g.** $a^{\frac{1}{2n}}$ **h.** 2^2

36

a. S={5} **b.** S={-1;3} **c.** S={3} **d.** S={-1} **e.** S={ $\frac{1}{8}$ } **f.** S={7}

37

a. 1.678 mg **b.** 20%

38 21595.94 fr.

39 4535.15 fr.

40

a. 7800 fr. **b.** 4790 fr. **c.** 2942 fr.

41 1510.59 fr.

42 189.14 mmHg

43

y = 75.77 cm ; R = 15.98 cm/année

Exercices d'approfondissement

1 Effectuer les calculs suivants « à la main » :

a. $(-1)^n \cdot (-1)^{n+2}$ **b.** $5+5^2+\ldots+5^{10}$

c. $5 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot 5^{10}$

2 Simplifier au maximum $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$.

3 *Puissances irrationnelles*

Comment faire pour définir une puissance irrationnelle, par exemple $2^{\sqrt{2}}$?

4 *N-gones*

a. Calculer la valeur exacte du côté d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

b. Même question pour un 16-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1.

5 *Tartaglia*

Le mathématicien Niccolo Tartaglia (1500-1557) savait résoudre les équations du troisième degré du type $x^3=px+q$, où p et q sont des nombres positifs. Sa méthode a été généralisée sous la forme d'une formule par un autre mathématicien de la Renaissance italienne, Jerôme Cardan (1501-1576), formule qui s'exprime dans notre langage algébrique :

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

a. Appliquer cette formule à l'équation : $x^3=6x+40$.

b. Calculer les valeurs de $(2\pm\sqrt{2})^3$ et exprimer la solution trouvée au point **a.** sous une forme plus simple.

c. Cette équation admet-elle d'autres solutions réelles ?

6 *Fibonacci*

L'image de la première page du dossier faire référence à la célèbre suite de Fibonacci.

a. Qu'est-ce que « la suite de Fibonacci »?

b. Qui était Fibonacci?

c. Quel rapport avec des lapins?

d. Peut-on parler dans ce cas de croissance exponentielle?

7 En 1840, l'Angleterre subit une épidémie touchant le bétail appelée épizootie. Le nombre approximatif de nouveaux cas relevés tous les 28 jours est donné dans le tableau ci-dessous. A cette époque, le « London Daily » faisait la terrible prévision que le nombre de nouveaux cas allait croître indéfiniment. William Farr fit une prévision correcte du moment où le nombre de nouveaux cas atteindrait son maximum. Des deux fonctions:

$f(t)=653(1.028)^t$ et $g(t)=54700\,e^{\frac{-(t-200)^2}{7500}}$

l'une modélise la prévision du journal et l'autre celle de William Farr ; t est en jours, $t=0$ correspondant au 12 août 1840.

Date	Nouveaux cas
12.08	506
9.09	1289
7.1	3487
4.11	9597
2.12	18'817
30.12	33'835
27.01	47'191

a. Représenter chaque fonction avec les données dans une fenêtre de [0 ; 400] sur [0 ; 60'000].

b. Déterminer quelle fonction modélise la prévision de William Farr.

c. Déterminer la date où le nombre de nouveaux cas a atteint son maximum.

8 Soit la fonction réelle définie par $f(x)=2^{-x^2}$. Représenter graphiquement f.

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

John von Neumann
mathématicien américain d'origine hongroise (1903-1957)

A savoir en fin de chapitre

Puissances entières, racines carrées

✔ base/exposant ; puissances entières ; propriétés des puissances ;

✔ racines carrées ; propriétés des racines ; rendre rationnel le dénominateur d'une fraction ; multiplication par le conjugué ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 5

Puissances rationnelles, racines n-ièmes

✔ définition des puissances rationnelles ; définition des racines n-ièmes ;

✔ manipuler des puissances et des racines n-ièmes pour calculer et simplifier ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 6 à 12

Fonctions exponentielles

✔ fonctions exponentielles, valeurs possibles pour la base ; représentation graphique ;

Voir la théorie 6 et l'exercice 13

Equations exponentielles

✔ équations exponentielles ; résoudre des équations exponentielles simples ;

Voir la théorie 7 et l'exercice 14

(Dé)croissance exponentielle, intérêts composés

✔ différence entre situations « puissance », « racine » et « exponentielle » ;

✔ formules de croissance exponentielle et de décroissance exponentielle ;

✔ résoudre des problèmes de (dé)croissance exponentielle ;

Voir la théorie 8 à 10 et les exercices 15 à 21

Nombre e, fonction exp, intérêts composés continus, loi de croissance continue

✔ le nombre *e* ; la fonction *exp* ;

✔ problèmes d'intérêts composés continus et loi de croissance continue.

Voir la théorie 11 à 13 et les exercices 22 à 27

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch05

Notes personnelles