Quelques exercices récapitulatifs sur les chapitres 1 à 3

1 Factoriser au maximum l'expression $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$.

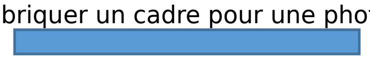
2 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = 4 - x^2$.

a. Représenter graphiquement f et g sur [-2;3] en calculant algébriquement les points d'intersection des deux courbes.

b. Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions S de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

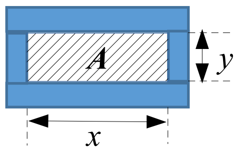
c. Vérifier la réponse obtenue en (b) en résolvant algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

d. Soit S l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ déterminée en (c).
Est-il vrai que l'ensemble solution T de l'inéquation $g(x) \geq f(x)$ est $T = \mathbb{R} \setminus S$? Justifier.

3 Un photographe désire fabriquer un cadre pour une photo rectangulaire à partir d'une planchette de 24 cm x 1 cm : 

Il souhaite que l'aire intérieure du cadre A (hachurée) soit maximale.

a. Exprimer la relation algébrique entre les dimensions x et y du rectangle hachuré.

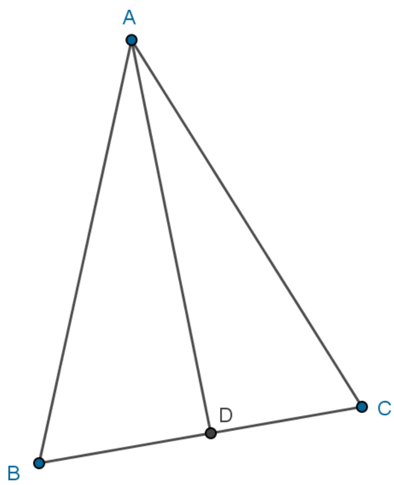


b. Déterminer l'expression $A(x)$ de l'aire intérieure en fonction de x.

c. Calculer la valeur maximale de A et en déduire les dimensions de l'intérieur du cadre.

4 Donner la définition d'un losange puis démontrer que les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu.

5 On considère le triangle ΔABC isocèle en A ainsi que la médiane passant par A et D.



a. Reporter sur le croquis ci-contre les informations que l'on peut déduire des définitions.

b. Montrer que les triangles ΔABD et ΔADC sont isométriques.

c. Montrer que les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{ADC}$ sont droits.

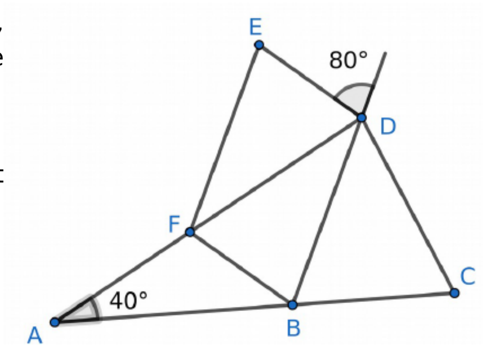
d. Montrer que la droite d_{AD} est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$.

e. Montrer que la droite d_{AD} est aussi la médiatrice du segment $[BC]$.

6 $A,$ B et C sont alignés, $A,$ F et D sont alignés, $BDEF$ est un parallélogramme, d_{BD} est la bissectrice de $\widehat{ADC}$, $\Delta\, ADB$ est isocèle en B :

a. Montrer que les triangles $\Delta\, BCD$ et $\Delta\, FDB$ sont isométriques.

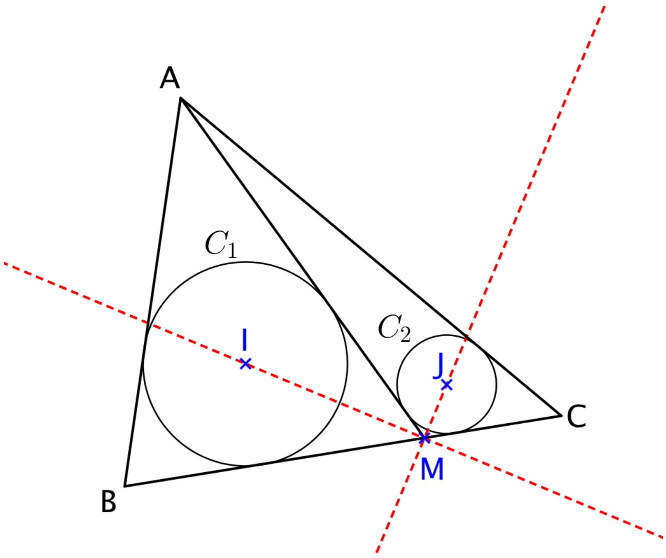
b. Montrer que $\overline{ED}=\overline{BC}$.



7 Soit $\Delta\ ABC$ un triangle et M un point quelconque de $[\ BC\ ]$.

On considère les deux cercles :

- C_1 inscrit dans le triangle $\Delta\ ABM$, de centre *I*.
- C_2 inscrit dans le triangle $\Delta\ ACM$, de centre *J*.



Démontrer que les droites d_{IJ} et d_{JM} sont perpendiculaires.

8 Déterminer l'équation du cercle C de centre $O(2\,;-5)$ auquel appartient le point $B(-3\,;7)$.

9 Soient le cercle C d'équation $x^2+y^2=5$ et la droite d_1 d'équation $x-2\,y-3=0$.

a. Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_2 qui est parallèle à d_1 et qui passe par le point $A(3\,;-2)$.

b. Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle C et la droite d_1 .

c. Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle C et l'axe Oy.

10 Calculer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle C d'équation $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ et la droite d d'équation $-x+4y-4=0$, puis les représenter graphiquement dans un même repère.

11 On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x)=2x^4-6x^3-12x^2+12x+16$.

a. Calculer $f(-1)$ et $f(4)$.

b. Déterminer exactement tous les zéros de f.

c. Factoriser f au maximum.

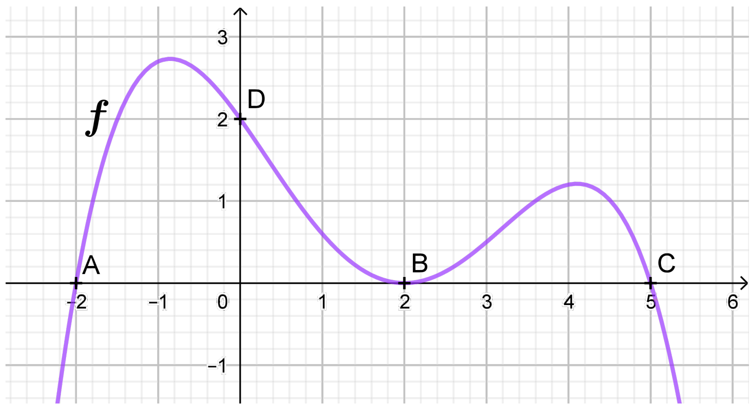
12 On considère la fonction $f(x)=\frac{1}{5}(x-3)(1-x)(2x+5)$.

a. Donner le tableau des signes de la fonction f.

b. Déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)<0$.

c. Représenter graphiquement la fonction f.

13 On considère la représentation graphique ci-dessous, où f est une fonction polynomiale telle que les points $A(-2;0)$, $B(2;0)$, $C(5;0)$ et $D(0;2)$ appartiennent à la la courbe représentative :



Déterminer une expression algébrique de degré minimal pour f en indiquant toutes les étapes du raisonnement.

14 On considère la fonction $f(x)=(x+2)^2(1-x)$.

a. Construire le tableau des signes de f.

b. Résoudre l'inéquation $f(x)\geq 4$.

c. Sur une feuille quadrillée, tracer la courbe représentative de f, en utilisant les réponses aux questions précédentes.

15 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{x}{2}-\sqrt{2}\geq 2x-\frac{1}{3}$

b. $10x^3-4x<3x^2$

16 On considère l'inéquation $x+4>x^2$.

a. Esquisser dans un même repère une représentation graphique de la droite d'équation $y=x+4$ et de la parabole d'équation $y=x^2$ pour $x\in[-3;3]$.

b. Expliquer en français ou indiquer dans le repère à quoi correspondent les solutions de l'inéquation $x+4>x^2$.

c. Faire une estimation graphique de la solution de cette inéquation.

d. Déterminer la solution exacte de l'inéquation $x+4>x^2$.

17 Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse ; justifier précisément votre réponse en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les définitions et théorèmes vus au cours :

a. Si f est une fonction polynomiale qui a exactement 4 zéros, alors f est une fonction polynomiale de degré 4

b. Si f est divisible par $(x-3)^2$, alors $f(9)$ = 0.

c. L'équation $x^2+4x+y^2=0$ est l'équation d'un cercle de rayon 4

d. Si $x\leq 1$, alors $x^2\leq x$

e. $x^{2017}-2^{2017}$ est divisible par $x-2$

f. Il n'existe aucun polynôme $A(x)$ tel que $A(3)$ = 0, $A(1)$ = 0 et $A(0)$ = 1.

g. Pour tout nombre réel x, on a $-x\leq x^2$