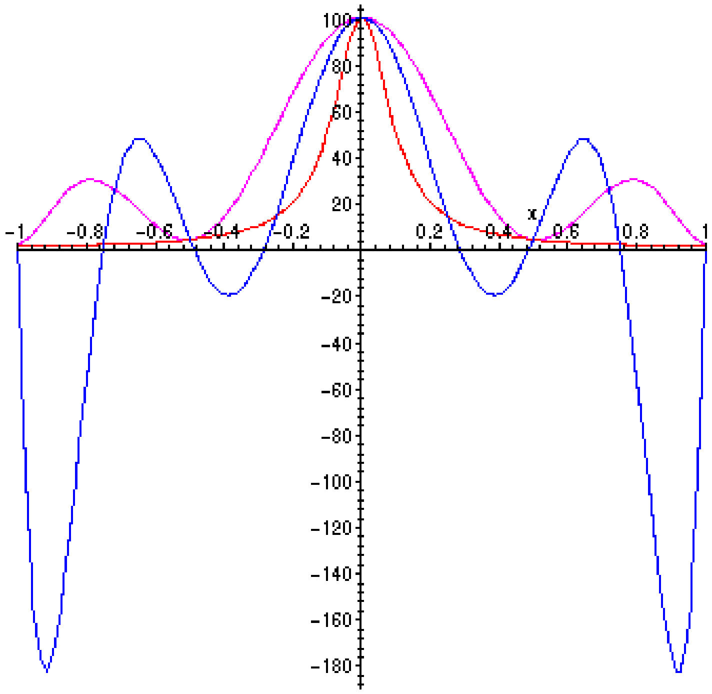
Chapitre 03 - Fonctions polynomiales



Représentation graphique de fonctions polynomiales

Problème

Un célèbre historien du premier siècle, pendant la guerre juivo-romaine a été pris au piège dans une caverne avec un groupe de 40 soldats, cernés par des Romains. La légende dit que, préférant la mort à la capture, les captifs décidèrent de former un cercle et de tuer la troisième personne vivante rencontrée en suivant le parcours autour du cercle à partir d'une personne choisie, ceci jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une personne, cette personne devant se suicider. L'historien, également un peu mathématicien, pas très enthousiaste à l'idée de mourir, trouva rapidement la bonne place dans le cercle afin de rester en vie. Comment procéda-t-il ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] Monômes, polynômes

1 Donner des exemples puis rappeler les définitions de « monôme » et « polynôme », de « coefficient » et de « degré ».

2 Qu'entend-t-on par « terme dominant » et « terme constant »?

3 Un polynôme peut être donné sous forme développée ou factorisée. Donner des exemples.

4 Pourquoi la forme factorisée est-elle souvent très utile ?

2 [Souvenirs] Opérations sur les polynômes

1 Les règles de calcul pour les additions, soustractions et multiplications de polynômes sont les règles usuelles de l'algèbre. Soit les polynômes $P(x)=2x^5+4x^3-6x+1$, $Q(x)=-3x^3+x^2$ et $R(x)=1-x^4$. Effectuer les opérations suivantes :

a. $3Q(x)$ **b.** $P(x)+Q(x)$ **c.** $P(x)-R(x)$ **d.** $Q(x)R(x)$

2 Que peut-on dire du degré de $\alpha\cdot P(x), P(x)+Q(x), P(x)-Q(x), P(x)\cdot Q(x)$ (où $\alpha\in\mathbb{R}$) par rapport aux degrés de $P(x)$ et $Q(x)$? Enoncer et discuter des conjectures.

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

3 [Activité] Fonctions polynomiales

1 Une **fonction réelle** f est **polynomiale de degré *n*** si elle est égale à une fonction de forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$. Beaucoup de lettres ... Expliciter la nature de chacune (variable ? constante ?) ainsi que les valeurs qu'elles peuvent représenter.

2 Donner des exemples de fonctions polynomiales et de fonctions non polynomiales.

3 Donner des exemples de fonctions polynomiales de degré 0, 1, 2 et 3. Que sait-on déjà à propos de ces fonctions ?

4 [Activité] Utilité

Un troupeau de cerfs est introduit sur une petite île. Une collaboration entre biologistes et mathématiciens permet de créer un modèle pour la croissance de cette population : $Q(t)=-t^4+21t^2+100$.

a. Expliquer ce que représentent ces deux variables.

b. Représenter graphiquement cette fonction.

c. Quel est le domaine des valeurs intéressantes pour le problème. Ce modèle vous paraît-il bon ? Justifier.

5 [Activité] Exploration graphique

Utiliser GeoGebra pour explorer les représentations graphiques de plusieurs fonctions polynomiales de degrés supérieurs à 2.

6 [Activité] Représentations graphiques

1 Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x)=x^3-x^2-4x+4$.

a. Déterminer ses **zéros** et donner son **tableau de signes**.

b. Calculer quelques images puis **représenter graphiquement** f.

2 Mêmes questions avec $f(x)=x^4-4x^3+3x^2$.

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 4 à 6

7 [Activité] Difficulté !

Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x)=3x^3-2x^2+x-2$.

a. Pourquoi est-il plus difficile de déterminer les zéros de f ?

b. Pensez-vous qu'il en existe ? Enoncer la réponse sous forme d'une conjecture.

8 [Activité] Divisions et factorisation

1 Effectuer les divisions euclidiennes avec reste suivantes :

a. 108 par 4. **b.** 37 par 8. **c.** 1234 par 3. **d.** 3742 par 5.

2 Diviser deux polynômes :

a. En s'inspirant des divisions précédentes, effectuer la **division polynomiale** de x^3-3x^2+x+5 par $x-2$. Quels sont le **quotient** et le **reste** de cette division ?

b. Effectuer la division de x^4+3x^3-3x-1 par x^2-2 . Quels sont le quotient et le reste de la division ?

c. Effectuer la division de $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$ par x^2+1 . Quels sont le quotient et le reste de la division ?

3 A l'aide du résultat précédent, factoriser au maximum le polynôme $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$.

4 Les résultats précédents vous permettent-ils de factoriser les polynômes x^3-3x^2+x+5 et x^4+3x^3-3x-1 ? Pourquoi ?

9 [Activité] Division par (x-c)

1 Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

a. Calculer $f(1)$, $f(4)$, $f(-3)$ et $f(-2)$.

b. Déterminer le reste de la division de $f(x)$ par $(x-1)$, $(x-4)$, $(x+3)$ et $(x+2)$.

2 On dit que $g(x)$ **divise** $f(x)$ ou que $f(x)$ **est divisible par** $g(x)$, si le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$ est nul.

Illustrer cette définition en donnant des exemples.

3 Que constate-t-on en comparant les points 1 a et 1 b ? Énoncer une conjecture.

4 Démontrer cette conjecture. Ce résultat s'appelle le **théorème du reste nul.**

5 La fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^3+6x^2-x-30$ est-elle divisible par $x+5$? Si oui, donner la factorisation complète de $f(x)$.

6 La fonction polynomiale f définie par $f(x)=14x^4-31x^3+4x^2-31x-10$ est-elle divisible par $x-2$? Si oui, donner la factorisation complète de $f(x)$.

7 Enoncer la réciproque et la contraposée du théorème du reste nul. Sont-elles vraies ?

8 Pour répondre aux deux questions 5. et 6. utilise-t-on le théorème du reste nul, sa réciproque ou sa contraposée ?

10 [Activité] Un peu d'exercice

1 Montrer que $x^{10}-1$ est divisible par $x-1$.

2 Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 5 qui admette 1, 2, 3, 4 et 5 comme racines.

3 Trouver tous les polynômes $P(x)$ de degré 4 qui admettent –1, 2, 3 et 5 comme racines.

4 Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 6 qui admet –1, 2, 3 et 5 comme uniques racines.

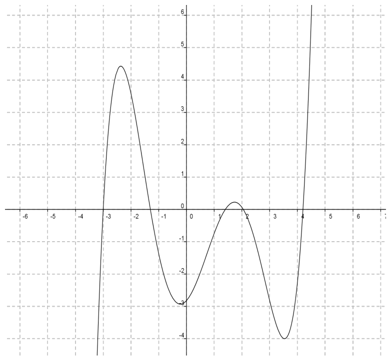
5 Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 3 dont les racines sont 0, 1 et –2 et tel que $P(2)=4$.

6 Trouver un polynôme $P(x)$ de degré 3 divisible par x^2+4 , dont l'unique racine est –3 et dont l'ordonnée à l'origine est 2.

7 Déterminer la valeur du nombre m tel que que le polynôme x^3-2x^2+3x+m soit divisible par $x-3$.

8 Est-il possible de trouver un nombre n tel que le polynôme $3x^3+(nx)^2-7x+3n$ soit divisible par $x-3$.

9 Soit f une fonction polynomiale dont on donne une représentation graphique :



Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

i Alors $(x+3)$ divise $f(x)$.

ii Alors le reste de la division de $f(x)$ par $(x+2)$ est positif.

10 Conjecture : Soit $h(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ une fonction polynomiale telle que $a+b+c+d+e+f=0$, alors $h(x)$ est divisible par $(x-1)$. Vrai ou faux? Justifier.

11 [Activité] Retour sur la difficulté !

Grâce à la division polynomiale, nous pouvons désormais résoudre notre problème difficile, soit trouver les zéros de la fonction polynomiale f définie par $f(x)=3x^3-2x^2+x-2$.

a. Trouver un zéro "au flair" .

b. Utiliser la division polynomiale pour factoriser $f(x)$.

c. Conclure.

Remarque : on améliorera ensuite l'étape « au flair » ...

12 [Activité] Zéros entiers

1 On considère le polynôme $x^4-3x^3+5x^2-9x+6$.

a. Parmi les nombres -3, 2, 5 et 7, y a-t-il une racine de ce polynôme? Quels nombres peut-on exclure directement sans faire de calcul ?

b. Donner une liste de tous les racines entières possibles de ce polynôme, en utilisant les propriétés observées à la question précédente.

2 **Théorème sur les zéros entiers d'une fonction polynomiale à coefficients entiers**

Soit $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$ une fonction polynomiale **à coefficients entiers**. Si c est un zéro non nul entier de $f(x)$ alors c divise a_0 .

a. Illustrer avec le cas $f(x)=x^3-3x^2+2$. Factoriser $f(x)$. Cette fonction a-t-elle d'autres zéros?

b. Trouver les racines entières du polynôme $x^4-9x^2+4x+12$ puis le factoriser.

c. Trouver les racines entières du polynôme $\frac{2}{3}x^4-6x^2+\frac{8}{3}x+8$ puis le factoriser.

13 [Aller plus loin] Démonstration

Démontrer le théorème sur les zéros entiers d'une fonction polynomiale à coefficients entiers.

14 [Aller plus loin] Zéros rationnels

Théorème sur les zéros rationnels d'une fonction polynomiale à coefficients entiers

Soit $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$ une fonction polynomiale à coefficients entiers. Si $\frac{c}{d}$ est un zéro rationnel (non nul) de $f(x)$ avec $\frac{c}{d}$ irréductible, alors :

i le numérateur c du zéro est un diviseur de a_0 ;

ii le dénominateur d du zéro est un diviseur de a_n .

a. Illustrer avec le cas $f(x)=2x^3+x^2+x-1$.

b. Trouver les racines rationnelles du polynôme suivant : $4x^4-4x^3+x^2-4x-3$, puis le factoriser.

15 [Aller plus loin] Démonstration

Démontrer le théorème sur les zéros rationnels d'une fonction polynomiale à coefficients entiers.

16 [Aller plus loin] Plus difficile ?

Factoriser le plus possible le polynôme $300x^4-205x^3-58x^2+19x+4$.

Voir la théorie 5 à 10 et les exercices 7 à 21

17 [Aller plus loin] Représentation graphique

Esquisser une représentation graphique des fonctions f définies par :

a. . $f(x)=2x^3+x^2+x-1$

b. $f(x)=4x^4-4x^3+x^2-4x-3$

18 [Aller plus loin] Représentation graphique+

Proposer une courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=300x^4-205x^3-58x^2+19x+4$.

19 [Activité] Multiplicité des zéros et représentation graphique de fonctions polynomiales

1 Pour chacune des fonction polynomiales suivantes, trouver ses zéros puis la représenter graphiquement :

a. $f(x)=x+2$

b. $g(x)=(x+2)^2$

c. $h(x)=(x+2)^3$

d. $j(x)=(x+2)^4$

e. $k(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

f. $l(x)=x^4-11x^3+43x^2-69x+36$

g. $m(x)=x^4-9x^3+27x^2-31x+12$

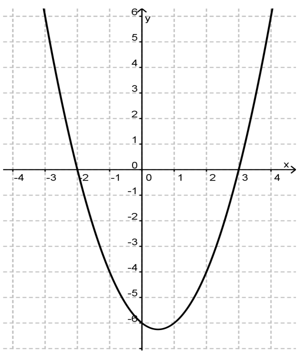
2 Soit c un zéro d'une fonction polynomiale f. La **multiplicité** de c est l'exposant auquel apparaît le facteur $(x - c)$ dans la forme factorisée de f.

a. Quelle est la multiplicité de chacun des zéros des fonctions f, g, h, j, k, l, m ?

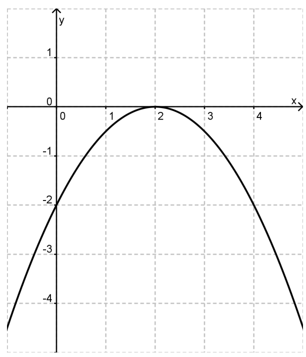
b. Quel lien y a-t-il entre la multiplicité d'un zéro d'une fonction et sa représentation graphique ? Énoncer une conjecture.

3 Pour chacune des représentations graphiques ci-dessous, déterminer l'expression algébrique d'une fonction polynomiale de plus petit degré lui correspondant :

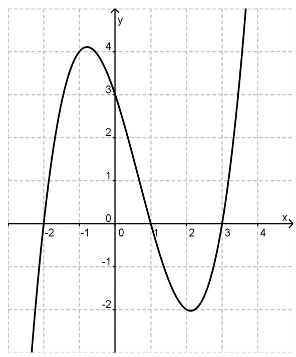
a.



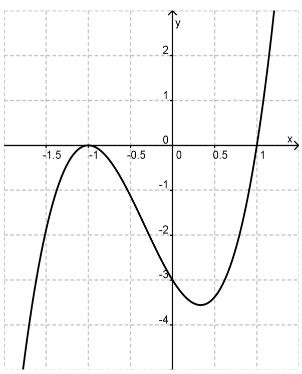
b.



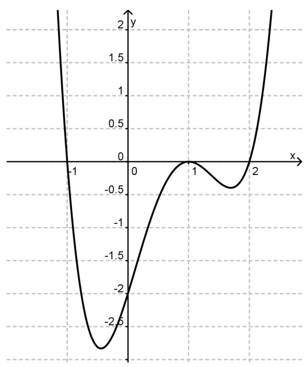
c.



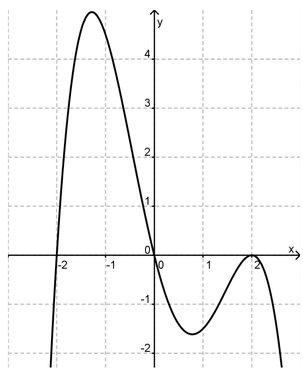
d.



e.



f.



Voir la théorie 11 et les exercices 22 à 28

20 [Souvenirs] Inégalités

1 Dans ce parc de loisirs, certaines attractions sont réservées à des enfants d'une taille bien précise.

Attraction 1	Attraction 2	Attraction 3	Attraction 4
Réservée aux enfants de moins de 1,40 m.	Réservée aux enfants d'au moins 1,40 m.	Interdite aux enfants de 1,40 m et moins.	Interdite aux enfants de plus de 1,40 m.

Soit t la taille d'un enfant en mètres. Écrire pour chaque attraction une inégalité (par exemple $t \leqslant 1{,}40$) traduisant le fait que l'enfant est autorisé à y participer.

2 On considère l'inégalité $-7<-3$. Déterminer l'inégalité obtenue si :

a. on additionne 5 des deux côtés.

b. on soustrait 4 des deux côtés.

c. les deux côtés sont multipliés par $\frac{1}{3}$.

d. les deux côtés sont multipliés par $-\frac{1}{3}$.

3 On considère l'inégalité $4>-5$. Déterminer l'inégalité obtenue si :

a. on additionne 7 des deux côtés.

b. on soustrait -5 des deux côtés.

c. on divise les deux côtés par 6.

d. on divise les deux côtés par -6.

21 [Activité] Le jeu des erreurs

Chercher et expliquer les erreurs commises ci-dessous :

Résoudre l'inéquation $2x+5<3x-1$	Résoudre l'inéquation $-x+3 \geqslant 5$	Encadrer x sachant que $1 \leqslant -3x < 2$
$2x+5-2x<3x-1-2x$ $5<x-1$ $5+1<x-1+1$ donc $x<6$ 0 6 solutions	$-x+3-3 \geqslant 5-3$ $-x \geqslant 2$ $x \geqslant -2$ -2 0 solutions	$1\left(-\frac{1}{3}\right) \leqslant (-3x)\left(-\frac{1}{3}\right) < 2\left(-\frac{1}{3}\right)$ $-\frac{1}{3} \leqslant x < -\frac{2}{3}$ pas de solutions

22 [Activité] Problèmes

1 Sonia a eu 5 notes au cours du trimestre. Sa moyenne est actuellement de 4,3. Quelle note doit elle obtenir au minimum à son prochain test pour que sa moyenne devienne supérieure ou égale à 4,8 ? Quelle conclusion en tirez-vous ?

2 Le *Guiness Book des records mondiaux* rapporte que les bergers allemands peuvent faire des sauts de 3 m de haut. Si la distance s (en m) au-dessus du sol après t secondes est donnée par l'équation $s=-4{,}9t^2+7{,}3t+0{,}3$, pendant combien de secondes le chien est-il à plus de 2,7 m au-dessus du sol ?

23 [Activité] Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes et donner la réponse sous forme d'intervalle, puis interpréter graphiquement :

a. $3x-2>4$

b. $9+\frac{1}{3}x\geq 4-\frac{1}{2}x$

c. $(2x-3)(4x+5)\leq(8x+1)(x-2)$

d. $x^2-2x-5>3$

e. $6x-8>x^2$

f. $2x^3\geq\frac{4}{3}x^2$

24 [Activité] Inéquations +

Résoudre l'inéquation $-3(2x-6)(-4x+8)(x^2+1)(x^2-9)(-x^2+3x-8)\leq 0$ et donner la réponse sous forme d'intervalle.

Voir la théorie 12 à14 et les exercices 29 à 43

25 [Aller plus loin] Valeur absolue et (in)équations

1 Rappeler la définition de la valeur absolue d'un nombre et donner des exemples.

2 Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x)=|2x-3|$.

3 En lisant le graphique, répondre aux questions suivantes:

a. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)=0$? Interpréter graphiquement.

b. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)=1$? Interpréter graphiquement.

c. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)=-2$? Interpréter graphiquement.

d. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)<3$? Interpréter graphiquement.

e. Et à quelles conditions a-t-on $f(x)\geqslant 5$? Interpréter graphiquement.

f. Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x)<-3$? Interpréter graphiquement.

4 Tracer dans le même repère la fonction g définie par $g(x)=\frac{x}{2}+1$.

5 Pour quelles valeurs de x a-t-on $g(x)>f(x)$? Interpréter graphiquement.

6 En déduire une stratégie pour résoudre une inéquation avec valeur absolue... sans tracer de graphique précis.

7 S'exercer avec les problèmes ci-dessous :

a. $|3x-5|\leqslant 7$

b. $|5-3x|\leqslant 7$

c. $|3x-1|>0$

d. $|1-2x|>x-1$

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 44 à 46

1 [Souvenirs] Monômes, polynômes

Définition

Soient :
- ☐ n un entier naturel
- ☐ x une variable réelle
- ☐ a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, … , a_2, a_1, a_0 des constantes réelles
- ☐ a_n non nulle

alors on dit que :
- ☐ un **monôme à une variable x** est une expression égale à une expression de la forme $a_n x^n$
- ☐ un **polynôme à une variable x** est une expression égale à une expression de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Remarque : on note souvent $P(x)$, $Q(x)$,.. des polynômes en x.

Vocabulaire

- ☐ n est le **degré** du polynôme
- ☐ a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, … , a_2, a_1, a_0 sont les **coefficients** du polynôme
- ☐ le monôme $a_n x^n$ est appelé le **terme dominant**, car lorsque x devient très grand, il l'emporte sur tous les autres termes
- ☐ le coefficient a_0 s'appelle le **terme constant**, car il ne dépend pas de la variable x.

Exemples

- ☐ x^4 est un polynôme de degré 4 et de coefficients $a_4 = 1, a_3 = a_2 = a_1 = a_0 = 0$
- ☐ $2x^3 - 5x^2 + \frac{1}{3}x - \pi$ est un polynôme de degré 3 et de coefficients $a_3 = 2, a_2 = -5, a_1 = \frac{1}{3}, a_0 = -\pi$
- ☐ $\sqrt{x} + 12$ n'est pas un polynôme
- ☐ $2x^2 + \frac{1}{x}$ n'est pas un polynôme

Cette écriture s'appelle la forme additive du polynôme. Il existe également une forme dite multiplicative ou factorisée, le polynôme s'écrivant sous la forme de produits de polynômes de plus petits degrés, les **facteurs**.

Exemples

- ☐ $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$ est un polynôme de degré 2, deux facteurs de degré 1
- ☐ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ est de degré 3, un facteur de degré 1, un de degré 2

Remarque : par convention, le **polynôme nul**, soit $P(x)$=0, n'a pas de degré.

2 [Souvenirs] Opérations avec des polynômes

Addition de polynômes

Pour **additionner ou soustraire** deux polynômes, on additionne ou soustrait les coefficients des monômes de mêmes degrés des polynômes.

Exemple : soient les polynômes $P(x)=3x^2+5$ et $Q(x)=7x^5-5x^2-3x+1$. Calculer leur somme et leur différence.

- ☐ $P(x)+Q(x)=(3x^2+5)+(7x^5-5x^2-3x+1)=(0+7)x^5+(3-5)x^2+(0-3)x+(5+1)$
  $=7x^5-2x^2-3x+6$
- ☐ $P(x)-Q(x)=(3x^2+5)-(7x^5-5x^2-3x+1)=(0-7)x^5+(3-(-5))x^2+(0-(-3))x+(5-1)$
  $=-7x^5+8x^2+3x+4$

Multiplication de polynômes

Pour **multiplier** deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier polynôme par chaque terme du deuxième (distributivité) et on réduit la somme obtenue.

Exemple : soient les polynômes $P(x)=3x^2+5$ et $Q(x)=7x^5-5x^2-3x+1$. Calculer leur produit.

$$P(x)\cdot Q(x)=(3x^2+5)\cdot(7x^5-5x^2-3x+1)=21x^7-15x^4-9x^3+3x^2+35x^5-25x^2-15x+5$$
$$=21x^7+35x^5-15x^4-9x^3-22x^2-15x+5$$

Remarque: on écrit la réponse dans l'ordre décroissant des termes.

Voir les exercices 1 à 3

3 [A savoir] Fonctions polynomiales

Définition

Une fonction réelle f est **polynomiale de degré n** si elle est égale à une fonction de forme $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, où :
- ☐ n est un entier naturel
- ☐ x est une variable réelle
- ☐ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ sont des constantes réelles, avec a_n non nulle

Exemples

- ☐ La fonction f définie par $f(x)=2x^3-5x^2+\frac{1}{3}x-\pi$ est une fonction polynomiale de degré 3 et de coefficients $a_3=2$, $a_2=-5$, $a_1=\frac{1}{3}$, $a_0=-\pi$.
- ☐ La fonction f définie par $f(x)=x^4$ est une fonction polynomiale de degré 4 et de coefficients $a_4=1$, $a_3=a_2=a_1=a_0=0$.

4 [A savoir] Tableau de signes et représentation graphique d'une fonction polynomiale

Pour étudier les signes de la fonction, on commence par déterminer l'ensemble des zéros, puis on construit le **tableau de signes**. En calculant encore quelques images, on peut obtenir une **représentation graphique** de f :

Exemple 1 : représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x)=x^3-x^2-4x+4$

$$f(x)=x^3-x^2-4x+4 \;=\; x^2(x-1)-4(x-1) \;=\; (x-1)(x^2-4) \;=\; (x-1)(x-2)(x+2)$$

$$\text{donc} \quad Z_f=\{-2\,;1\,;2\}$$

On insère dans la première colonne les facteurs de la forme factorisée de f et dans la premières ligne les zéros de f ; on peut également déjà indiquer les valeurs nulles pour les zéros :

x		-2		1		2	
x - 1				0			
x – 2						0	
x + 2		0					
$f(x)$							

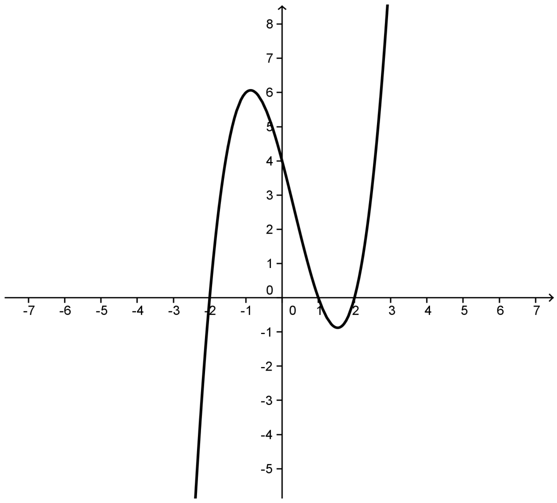
chacun des facteurs est une expression de degré 1 du type $y=ax+b$, dont les courbes représentatives sont des droites de pentes positives ; ces trois expressions sont donc négatives pour des valeurs inférieures au zéro et positives pour des valeurs supérieures au zéro ; on l'indique dans le tableau :

x		-2		1		2	
x - 1	–	-	-	0	+	+	+
x – 2	-	-	-	-	-	0	+
x + 2	–	0	+	+	+	+	+
$f(x)$							

Le signe de $f(x)$ – la dernière ligne - se détermine colonne par colonne : dans chaque intervalle, le calcul de l'expression de $f(x)$ étant le résultat de la multiplication par tous les facteurs, on peut utiliser la **règle des signes** :

x		-2		1		2	
x - 1	–	-	-	0	+	+	+
x – 2	-	-	-	-	-	0	+
x + 2	–	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

On calcule encore quelques images : $f(0)=4$, $f(-1)=6$, $f(3)=10$ et $f(0{,}5)=-0{,}875$ et on peut proposer une représentation graphique de f cohérente avec tous les résultats obtenus :



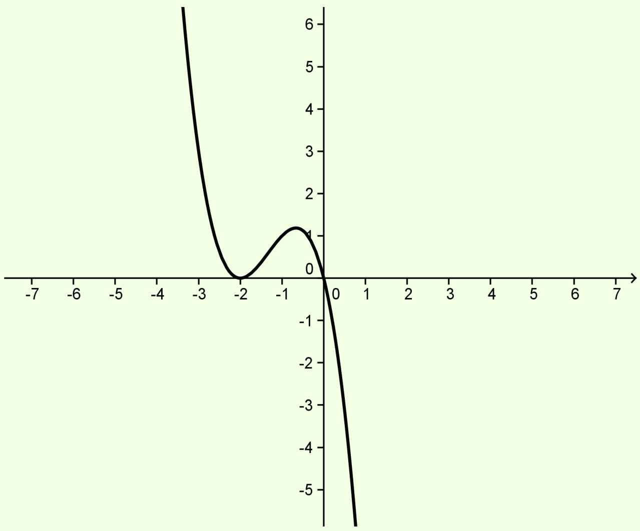
Exemple 2 : représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x)=-x^3-4x^2-4x$

$f(x)=-x^3-4x^2-4x \;=\; -x(x^2+4x+4) \;=\; -x(x+2)^2$,donc $Z_f=\{-2;0\}$

Tableau de signes :

x		-2		0	
$-x$	+	+	+	0	-
$x+2$	-	0	+	+	+
$x+2$	–	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	+	0	-

$f(-1)=1$, $f(-3)=3$ et $f(1)=-9$



Voir les exercices 4 à 6

5 [A savoir] Racines d'un polynôme, zéros d'une fonction polynomiale

Définition

Les **racines** d'un polynôme $P(x)$ sont les solutions de l'équation $P(x)=0$.
Autrement dit, un nombre c tel que $P(c)=0$ est une **racine** de $P(x)$.
Ainsi, les racines du polynôme $P(x)$ sont les zéros de la fonction polynomiale P définie par $P(x)$.

Remarque : rechercher la factorisation d'un polynôme en facteurs du premier degré est équivalent à rechercher les racines de ce polynôme.

Théorème (sans démonstration)

Tout polynôme peut être exprimé en un produit de polynômes du premier et/ou du deuxième degré à discriminant négatif.
Ainsi : **un polynôme de degré n a au plus n racines (distinctes ou non).**

6 [Souvenirs] Division euclidienne

Définition

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Effectuer la **division euclidienne de a par b**, c'est trouver deux entiers q et r tels que : $a=b\cdot q+r$ et $0\leq r<b$.
q est le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne.

Exemple: effectuer la division euclidienne de 183 par 12.

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \cline{2-2} 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On a donc : $183=12\cdot 15+3$ avec $3<12$, ou bien : $\frac{183}{12}=15+\frac{3}{12}$.

7 [A savoir] Division polynomiale

Définition

$$\begin{array}{c|c} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array}$$

Effectuer la **division d'un polynôme $f(x)$ par un autre polynôme $g(x)$**, c'est trouver deux polynômes $q(x)$ et $r(x)$ tels que : $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ avec le degré de $r(x)$ strictement plus petit que celui de $g(x)$.
$q(x)$ est le **quotient** et $r(x)$ le **reste** de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

Théorème de la division polynomiale

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes de degrés n et m. Alors il existe un unique polynôme $q(x)$ de degré n-m et un unique polynôme $r(x)$ de degré d où $0\leq d<m$ tels que $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$.

Remarque : la division est terminée lorsqu'on arrive à un polynôme qui est soit nul, soit de degré plus petit que le diviseur.

Exemple: effectuer la division de $f(x)=3x^4-2x^2+5x-1$ par $g(x)=x^2-2x$.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 3x^4 \qquad\quad -2x^2+5x-1 & \underline{x^2-2x} \\
\underline{-(3x^4-6x^3)} & 3x^2+6x+10 \\
\qquad\quad 6x^3-2x^2 & \\
\qquad \underline{-(6x^3-12x^2)} & \\
\qquad\qquad\quad 10x^2-5x & \\
\qquad\qquad \underline{-(10x^2-20x)} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 25x-1 &
\end{array}
$$

On a donc : $3x^4-2x^2+5x-1=(x^2-2x)(3x^2+6x+10)+(25x-1)$,

Remarque : avant d'effectuer la division, toujours ordonner les polynômes selon les puissances décroissantes de x et laisser un espace pour les monômes manquants.

Définition

On dit que $g(x)$ **divise** $f(x)$ ou que $f(x)$ **est divisible par** $g(x)$ si et seulement si le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$ est nul, c'est-à-dire si $r(x) = 0$. Dans ce cas $f(x) = g(x)\cdot q(x)$.

8 [A savoir] Théorème du diviseur

Théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $f(c)= 0$, alors $(x - c)$ divise $f(x)$.

Réciproque du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $(x - c)$ divise $f(x)$, alors $f(c) = 0$.

Théorème du diviseur

*les 2 précédents théorèmes étant vrais, il s'agit d'une **équivalence** :*

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle. Alors on a : $(x - c)$ divise $f(x)$ si et seulement si $f(c)= 0$

Contraposée du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $(x - c)$ ne divise pas $f(x)$, alors $f(c)\neq 0$.

Contraposée de la réciproque du théorème du reste nul

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
Si $f(c) \neq 0$, alors $(x - c)$ ne divise pas $f(x)$.

*les 2 précédents théorèmes étant vrais, il s'agit d'une **équivalence** :*

Soit $f(x)$ une fonction polynomiale et c une constante réelle.
$(x - c)$ ne divise pas $f(x)$ si et seulement si $f(c) \neq 0$

9 [A savoir] Trouver les racines entières d'un polynôme / les zéros entiers d'une fonction polynomiale

Théorème [zéros entiers d'une fonction polynomiale <u>à coefficients entiers</u>]

Soit $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ une fonction polynomiale <u>à coefficients entiers</u>.
Si c est un zéro non nul <u>entier</u> de f, alors c est un diviseur de a_0 .

Remarque : on utilise la contraposée de théorème ; si c n'est pas un diviseur de a_0 , alors c ne peut pas être un zéro non nul <u>entier</u> de f

Exemple : factoriser au maximum $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$

Les zéros entiers possibles de f se trouvent parmi les diviseurs de – 6 :
$\text{Div}_{-6}=\{\pm 1, \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$

- $f(1)=1^3+2\cdot 1^2-5\cdot 1-6=-8$, donc 1 n'est pas un zéro de f
- $f(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)-6=0$, donc – 1 est un zéro de f
- $f(2)=2^3+2\cdot 2^2-5\cdot 2-6=0$, donc 2 est un zéro de f
- $f(-2)=(-2)^3+2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-6=4$, donc – 2 n'est pas un zéro de f
- $f(-3)=(-3)^3+2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)-6=0$, donc – 3 est un zéro de f

f est de degré 3 donc f peut avoir au maximum 3 zéros. On les a tous trouvés !

Donc $f(x)=(x+1)(x-2)(x+3)$.

Remarque : on peut également déterminer les racines d'un polynôme / les zéros d'une fonction polynomiale à coefficients rationnels !

Exemple : trouver les zéros de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2+x+2$

(autrement dit : trouver les racines du polynôme $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^3-2x^2+x+2$)

On écrit $f(x)$ comme $f(x)=\frac{1}{2}(x^4-x^3-4x^2+2x+4)$. Du coup, chercher ses zéros revient à chercher ceux la fonction g définie par $g(x)=x^4-x^3-4x^2+2x+4$.

Les zéros entiers possibles de g se trouvent parmi les diviseurs de 4 :
$\text{Div}_4=\{\pm 1, \pm 2; \pm 4\}$

- $g(1)=1^4-1^3-4\cdot 1^2+2\cdot 1+4=2$, donc 1 n'est pas un zéro de g
- $g(-1)=(-1)^4-(-1)^3-4\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)+4=0$, donc – 1 est un zéro de g
- $g(2)=2^4-2^3-4\cdot 2^2+2\cdot 2+4=0$, donc 2 est un zéro de g
- $g(-2)=(-2)^4-(-2)^3-4\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)+4=8$, donc – 2 n'est pas un zéro de g
- $g(4)=140$, donc 4 n'est pas un zéro de g
- $g(-4)=252$, donc – 4 n'est pas un zéro de g

Donc g a deux zéros entiers : – 1 et 2.

On effectue la division polynomiale de $g(x)$ par $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$ et on obtient : $g(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2)$

Il reste à déterminer les zéros de (x^2-2) : on peut factoriser $(x^2-2)=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Finalement, on obtient donc : $f(x)=\frac{1}{2}[(x+1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})]$, et donc $Z_f=\{-\sqrt{2};-1;\sqrt{2};2\}$

10 [Aller plus loin] Trouver les racines rationnelles d'un polynôme, les zéros rationnels d'une fonction polynomiale

Théorème [zéros rationnels d'une fct polynomiale à coefficients entiers]

Soit $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ avec $a_n\neq 0$ une fonction polynomiale à coefficients entiers.

Si $\frac{c}{d}$ est un zéro (non nul) rationnel de f avec $\frac{c}{d}$ irréductible, alors :

- le numérateur c du zéro est un diviseur de a_0 ;
- le dénominateur d du zéro est un diviseur de a_n.

Attention : ce théorème et le précédent permettent de dresser la liste des zéros entiers puis rationnels possibles d'une fonction polynomiale à coefficient entiers, mais ne dit rien sur les éventuels zéros irrationnels de la fonction.

Exemple : factoriser au maximum $h(x)=4x^4+3x^2-1$

Les zéros entiers possibles de h se trouvent parmi les diviseurs de – 1 : $\text{Div}_{-1}=\{\pm 1\}$

$h(1)=6$ et $h(-1)=6$, donc h n'a pas de zéro entier.

$a_0=-1$: $\text{Div}_{-1}=\{\pm 1\}$ et $a_4=4$: $\text{Div}_4=\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

Les zéros rationnels possibles de h se trouvent parmi les nombres : $\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}\right\}$

$h(\frac{1}{2})=0$, $h(-\frac{1}{2})=0$, $h(\frac{1}{4})\neq 0$, $h(-\frac{1}{4})\neq 0$. Donc $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont les uniques zéros rationnels de h.

On effectue la division polynomiale de $h(x)$ par $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$, c'est-à-dire par $(x^2-\frac{1}{4})$ et on obtient : $h(x)=(x^2-\frac{1}{4})(4x^2+4)$, ce qu'on écrit

$$h(x)=(\frac{4x^2-1}{4})4(x^2+1)=(4x^2-1)(x^2+1)=(2x-1)(2x+1)(x^2+1)$$

Comme x^2+1 n'est pas factorisable, la factorisation de $h(x)$ est complète.

Voir les exercices 7 à 21

11 [A savoir] Déterminer l'expression algébrique d'une fonction à partir de sa représentation graphique

Définition

Si, dans l'écriture d'une fonction polynomiale sous forme factorisée, un facteur (x - c) apparaît m fois, alors c est un zéro de **multiplicité m** de la fonction polynomiale.

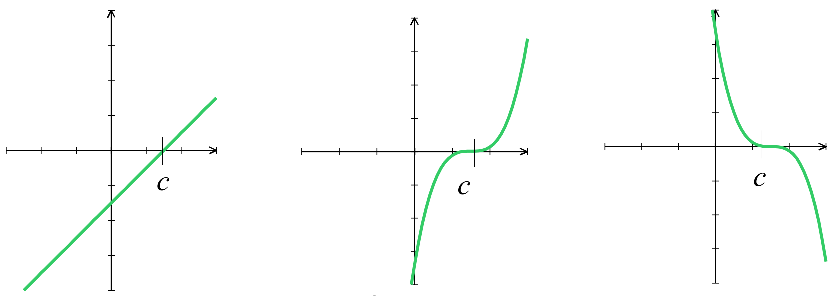
Exemples :

- $f(x)=(2x+1)(x-3)^2$: f a deux zéros $-\dfrac{1}{2}$ et 3 ; $-\dfrac{1}{2}$ est un zéro de multiplicité 1 et 3 un zéro de multiplicité 2
- $g(x)=(x^2+4)(x-1)^3(x+2)$: g a deux zéros 1 et – 2 ; 1 est un zéro de multiplicité 3 et – 2 un zéro de multiplicité 1

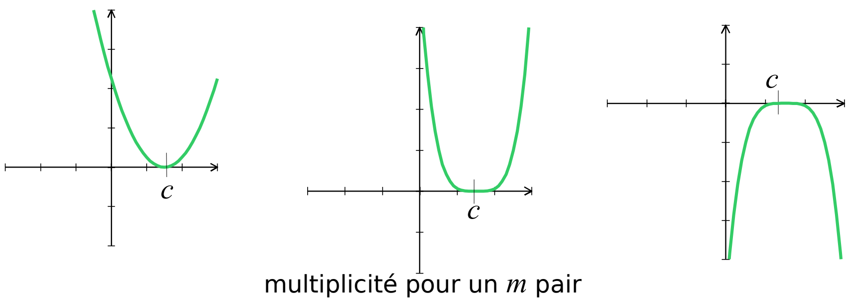
Théorème

Soit c un zéro d'une fonction polynomiale f. La forme générale du graphique de f au voisinage de (c ;0) dépend de la multiplicité m de c .

- Si m est impair, alors f change de signe en (c; 0).
- Si m est pair, alors f ne change pas de signe en (c; 0).

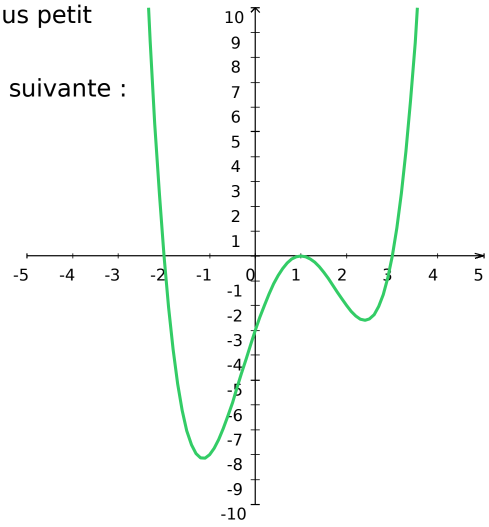


multiplicité pour un m impair



multiplicité pour un m pair

Exemple : déterminer la fonction polynomiale de plus petit degré correspondant à la représentation graphique suivante :



☐ La courbe intercepte l'axe des abscisses en trois points : (-2;0), (1;0) et (3;0).
Les zéros de la fonction sont donc – 2 , 1 et 3.

☐ En (–2;0) et en (3;0), la fonction change de signe, donc – 2 et 3 sont des zéros de multiplicité impaire. De plus la courbe « passe tout droit » dans les deux cas. Ainsi la multiplicité de ces deux zéros est 1.

☐ En (1;0) la fonction ne change pas de signe, donc 1 est un zéro de multiplicité paire : disons m=2 afin que le degré de la fonction soit le plus petit possible.

L'expression algébrique de la fonction est de la forme : $f(x)=a(x+2)(x-1)^2(x-3)$

avec a un nombre réel à déterminer...

☐ Sur le graphique, on lit l'ordonnée à l'origine : – 3, donc f(0) = – 3.

Calculons : $f(0)=a(0+2)(0-1)^2(0-3)=-6a$. Donc $-6a=-3 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

☐ Finalement $f(x)=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2(x-3)$ (c'est une fonction de degré 4.)

Voir les exercices 22 à 28

12 [A savoir] Inéquations à une inconnue

Définition

Une **inéquation à une inconnue** est une relation du type <, >, ≤ ou ≥ entre deux expressions algébriques, contenant une variable qu'on note le plus souvent x.

$a < b$	signifie « a est strictement plus petit que b »
$a \leq b$	signifie « a est plus petit ou égal à b »
$a > b$	signifie « a est strictement plus grand que b »
$a \geq b$	signifie « a est plus grand ou égal à b »

Exemples

- $x+5\leq 9$ et $y^2-4>0$ sont des inéquations à une inconnue (x puis y).

Définition

Une **solution de l'inéquation** est une valeur qui, lorsqu'on l'attribue à la variable x, transforme l'inéquation en une inégalité vraie.

Exemples

- – 2 est une solution de l'inéquation $5x-2<2x+3$ car si on substitue x par – 2, on obtient $5\cdot(-2)-2<2\cdot(-2)+3\Leftrightarrow -12<-1$, qui est vraie.
- 3 n'est pas une solution de $5x-2<2x+3$ car $5\cdot 3-2<2\cdot 3+3\Leftrightarrow 13<9$ est fausse.

Définitions

Résoudre une inéquation, c'est déterminer toutes les solutions de l'inéquation.
L'**ensemble des solutions d'une inéquation** est l'ensemble qui contient exactement toutes les solutions de l'inéquation. On le note en général sous forme d'**intervalle**.

Exemples

- si on considère l'inéquation $x+5\leq 9$, alors $S=]-\infty;4]$.
- si on considère l'inéquation $y^2-4>0$, alors $S=]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.
- si on considère l'inéquation $x^2<0$, alors $S=\emptyset$.

Définition

Deux inéquations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions.

Exemples

- $x+5\leq 9$ et $x\leq 4$ sont des inéquations équivalentes, car $S=]-\infty;4]$ pour les deux !
- $x+1<9$ et $x\leq 0$ ne sont pas des inéquations équivalentes, car l'ensemble des solutions de la première est $S=]-\infty;8[$ et celui de la seconde $S=]-\infty;0]$

Théorème sur les inéquations équivalentes (sans démonstration)

1. Si on additionne ou on soustrait aux deux membres d'une inéquation un même nombre, on obtient une nouvelle inéquation équivalente.
2. Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement positif, on obtient une nouvelle inéquation équivalente.
3. Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une inéquation par un même nombre strictement négatif, on obtient une nouvelle inéquation équivalente en changeant le sens de l'inégalité.

13 [A savoir] Inéquations du premier degré

Définition

Une **inéquation du 1er degré** (à une variable) est une inéquation équivalente à une inéquation de la forme $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b\leq 0$ ou $ax+b\geq 0$ où x est une variable réelle et a et b sont des constantes réelles avec a non nulle.

Résoudre une inéquation du premier degré

Pour résoudre une inéquation du 1er degré, il faut isoler l'inconnue. Pour cela, on transforme l'inéquation en une autre inéquation qui lui est équivalente, selon les exemples ci-dessus.

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $3x - 5 \leq 2x + 3$

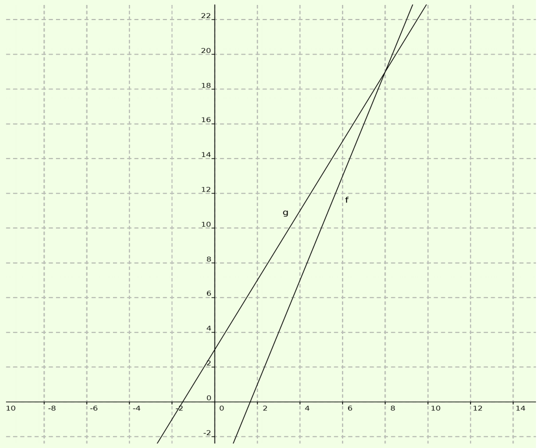
$$\begin{aligned} & 3x-5 \leq 2x+3 \\ \Leftrightarrow\ & 3x-5-2x \leq 2x+3-2x \\ \Leftrightarrow\ & x-5 \leq +3 \\ \Leftrightarrow\ & x-5+5 \leq 3+5 \\ \Leftrightarrow\ & x \leq 8 \end{aligned}$$

Si on additionne (ou on soustrait) le même nombre réel aux deux membres d'une inéquation, on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

On écrit finalement $S =]-\infty ; 8]$.

Interprétation graphique : si on pose $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 2x + 3$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-\infty ; 8]$, la valeur de $f(x)$ est inférieure ou égale à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessous" de celle de g pour ces valeurs.

Ce n'est pas le cas pour les autres valeurs de x.



Exemple 2 : résoudre l'inéquation $2x + 1 \geq -9$

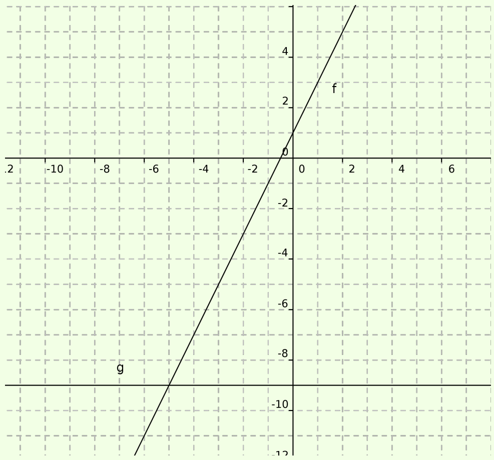
$$\begin{aligned} & 2x+1 \geq -9 \\ \Leftrightarrow\ & 2x+1-1 \geq -9-1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x \geq -5 \end{aligned}$$

Si on multiplie par le même nombre réel <u>strictement positif</u> les deux membres d'une inéquation, alors on obtient une nouvelle inéquation équivalente à la première.

On écrit finalement $S = [-5 ; +\infty[$.

Interprétation graphique : si on pose $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -9$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x appartenant $[-5 ; +\infty[$ à , la valeur de $f(x)$ est supérieure ou égale à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessus" de celle de g pour ces valeurs.

Ce n'est pas le cas pour les autres valeurs de x.



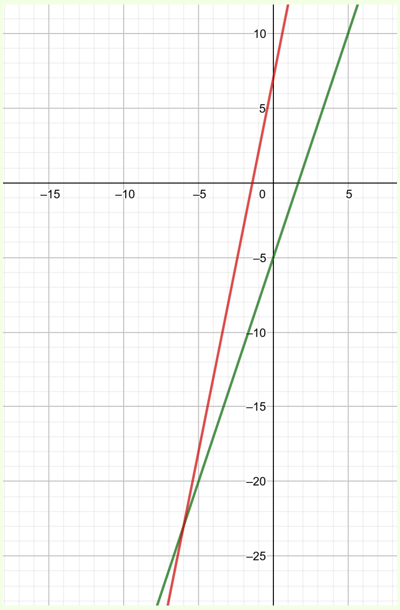
Exemple 3 : résoudre l'inéquation $3x - 5 > 5x + 7$

$$3x-5>5x+7$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x-5+5>5x+7+5$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x>5x+12$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x-5x>5x+12-5x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x<-6$$

Si on divise par le même nombre réel strictement négatif les deux membres d'une inéquation, alors on obtient une nouvelle inéquation équivalente à la première en changeant le sens de l'inégalité.

On écrit finalement $S=]-\infty;-6[$

Interprétation graphique : si on pose $f(x)=3x-5$ et $g(x)=5x+7$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-\infty;-6[$ la valeur de $f(x)$ est strictement supérieure à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessus" de celle de g pour ces valeurs.



14 [A savoir] Inéquations de degré supérieur à un

Définition

Une **inéquation de degré supérieur à un** (à une variable) est une inéquation équivalente à une inéquation de la forme $p(x) < 0$, $p(x) > 0$, $p(x) \leq 0$ ou $p(x) \geq 0$, où x est une variable réelle et $p(x)$ est un polynôme de degré supérieur à un.

Deux idées incontournables

1 Il est plus facile de connaître le signe d'une expression que de la comparer à une valeur donnée ou variable. On va donc s'efforcer d'écrire les inéquations de degré supérieur à un sous la forme :

expression < 0 **expression ≤ 0** **expression > 0** **expression ≥ 0**

2 Il est plus facile de déterminer le signe d'un produit que celui d'une somme et ceci grâce à la « règles des signes ». On va donc s'efforcer d'écrire l'expression algébrique de l'inéquation sous forme factorisée.

Résoudre une inéquation de degré supérieur à un

Pour résoudre une inéquation de degré supérieur à un, on procède ainsi : on commence par la transformer en une inéquation équivalente dans laquelle un des deux membres est égal à 0, puis on factorise le plus possible (idéalement pour obtenir des facteurs de degrés 1 ou 2 ou des polynômes dont on peut aisément connaître le signe, puis on utilise un tableau de signe pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $2x^2 - x < 3$

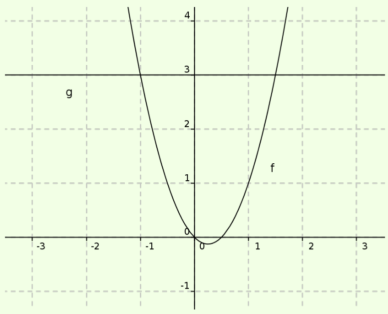
$2x^2 - x - 3 < 3 - 3$	⟵	On soustrait 3 à chaque membre de l'inéquation pour avoir le membre de droite égal à 0
$\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x - 3 < 0$		
$\Leftrightarrow \quad (x+1)(2x-3) < 0$	⟵	On factorise.

On détermine le tableau de signes :

x		– 1		$\frac{3}{2}$	
$(x + 1)$	–	0	+	+	+
$(2x – 3)$	–	–	–	0	+
$(x+1)(2x – 3)$	+	0	–	0	

$S =]-1 ; \frac{3}{2}[$ ⟵ On conclut en décrivant l'ensemble des solutions

Interprétation graphique : si on pose $f(x) = 2x^2 - x$ et $g(x) = 3$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-1 ; \frac{3}{2}[$, la valeur de $f(x)$ est strictement inférieure à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessous" de celle de g pour ces valeurs. Ce n'est pas le cas pour les autres valeurs de x.



Exemple 2 : résoudre l'inéquation $x - 3 < x^2$

$x - 3 - x^2 < x^2 - x^2$	⟵	On soustrait x^2 à chaque membre de l'inéquation pour avoir le membre de droite égal à 0
$\Leftrightarrow \quad x - 3 - x^2 < 0$		
$\Leftrightarrow \quad -x^2 + x - 3 < 0$		

$\Delta = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) = -11 < 0$

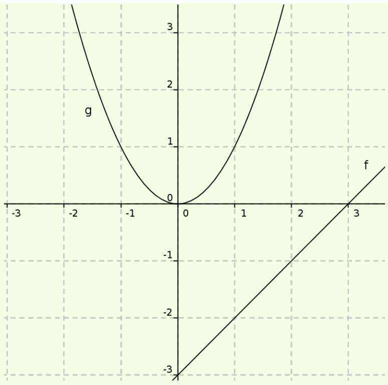
on en déduit le signe de l'expression $-x^2 + x - 3$ ⟵ On calcule le discriminant

On détermine le tableau de signes :

x	
$-x^2 + x - 3$	- - - - - - - - - - - - -

$S = \mathbb{R}$ ⟵ On conclut en décrivant l'ensemble des solutions

Interprétation graphique : si on pose $f(x)=x-3$ et $g(x)=x^2$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x, la valeur de $f(x)$ est strictement inférieure à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessous" de celle de g pour ces valeurs.



Remarque : si on avait considéré l'inéquation $x-3>x^2$, on aurait trouvé $S=\varnothing$!

Exemple 3 : résoudre l'inéquation $2(x+1)^2>(x+2)^2-1$

$$2(x+1)^2-((x+2)^2-1)>(x+2)^2-1-((x+2)^2-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(x+1)^2-(x+2)^2+1>0$$

On soustrait $(x+2)^2-1$ à chaque membre de l'inéquation pour avoir le membre de droite égal à 0

$$\Leftrightarrow \quad 2(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)+1>0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2-1>0$$

On développe puis on réduit.

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)(x+1)>0$$

On factorise.

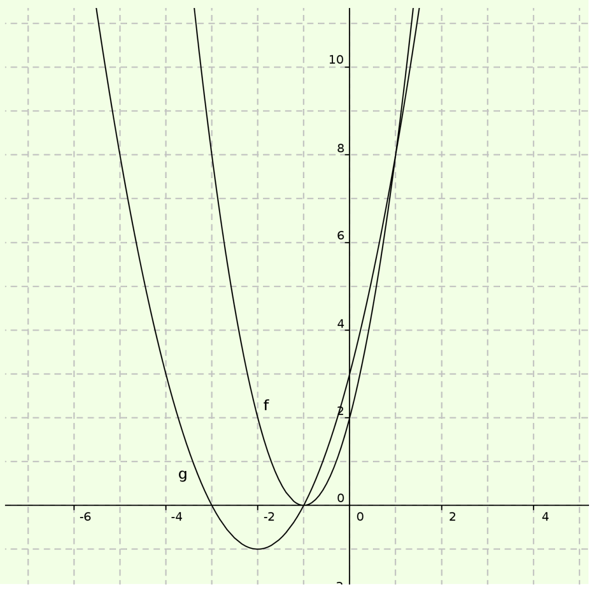
x		-1		1	
$(x-1)$	–	–	–	0	+
$(x+1)$	–	0	+	+	+
$(x-1)(x+1)$	+	0	–	0	+

$S=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

On conclut en décrivant la solution.

Interprétation graphique :

si on pose $f(x)=2(x+1)^2$ et $g(x)=(x+2)^2-1$ et qu'on représente graphiquement ces deux fonctions, on observe que pour toutes les valeurs de x appartenant à $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, la valeur de $f(x)$ est strictement supérieure à celle de $g(x)$; la courbe représentative de f est "au-dessus" de celle de g pour ces valeurs.
Ce n'est pas le cas pour les autres valeurs de x.



Exemple 4 : résoudre l'inéquation $-2(2x-4)(-x+5)(x^2+9)(x-1)^4(-x^2+x-1)<0$

$-2(2x-4)(-x+5)(x^2+9)(x-1)^4(-x^2+5x+1)<0$ ⟵ L'inéquation est déjà sous la forme factorisée avec le membre de droite égal à 0

Pour $-x^2+x-1$: $\Delta=1^2-4\cdot(-1)\cdot(-1)=-3<0$ donc il n'y a pas de zéros ; l'expression est toujours négative, car représentée par une parabole concave

Pour x^2+9 : pas de zéros, l'expression est toujours positive

Pour $(x-1)^4$: cette expression est nulle pour x = 1 et toujours positive sinon

Le signe des autres expressions est facile à déterminer pour le tableau de signes :

x		-1		1		2		5	
-2	–	–	-	-	-	-	–	-	-
2x - 4	-	-	-	-	-	0	+	+	+
- x + 5	+	+	+	+	+	+	+	0	-
x^2+9	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$(x-1)^4$	+	+	+	0	+	+	+	+	+
$-x^2+x-1$	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$-2(2x-4)(-x+5)(x^2+9)(x-1)^4(-x^2+5x+1)$	-	0	-	0	-	0	+	0	-

$S=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;2[\cup]5;+\infty[$ ⟵ On conclut en décrivant la solution.

Voir les exercices 28 à 43

15 [Aller plus loin] Équations contenant une valeur absolue

Définition

La **valeur absolue** d'un nombre réel x (ou distance à zéro), notée $|x|$, est définie ainsi :

$$|x|=\begin{cases} x, \text{ si } x\geq 0 \\ -x, \text{ si } x<0 \end{cases}$$

Remarque : par conséquent, la valeur absolue est toujours un nombre positif !

Exemples

$|3|=3$; $|-5|=-(-5)=5$; $|\pi-4|=-(\pi-4)=4-\pi$

Définition

La **valeur absolue** d'une expressions réelle $f(x)$, notée $|f(x)|$, est définie ainsi :

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{ si } f(x)\geq 0 \\ -f(x), \text{ si } f(x)<0 \end{cases}$$

Exemples

$$|4-2x|=\begin{cases} 4-2x, \text{ si } 4-2x\geq 0 \\ -(4-2x), \text{ si } 4-2x<0 \end{cases} = \begin{cases} 4-2x, \text{ si } x\leq 2 \\ 2x-4, \text{ si } x>2 \end{cases}$$

Résoudre une équation contenant une valeur absolue

Exemple 1 : résoudre l'équation $|3-2x|=4$

Cas 1 : $3-2x\geq 0$, càd $x\leq\dfrac{3}{2}$

$$|3-2x|=4 \Leftrightarrow 3-2x=4$$

$$\Leftrightarrow\ -2x=1\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{1}{2}$$

La solution satisfait $x\leq\dfrac{3}{2}$,

donc on la conserve

Cas 2 : $3-2x<0$, càd $x>\dfrac{3}{2}$

$$|3-2x|=4 \Leftrightarrow -(3-2x)=4$$

$$\Leftrightarrow\ 2x=7\ \Leftrightarrow\ x=\frac{7}{2}$$

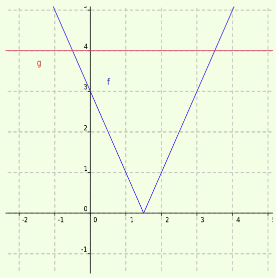
La solution satisfait $x>\dfrac{3}{2}$,

donc on la conserve

$$S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right\}$$

Interprétation graphique :

si on pose $f(x)=|3-2x|$ et $g(x)=4$, la représentation graphique de la fonction f intersecte celle de g pour $x=-\dfrac{1}{2}$ et $x=\dfrac{7}{2}$



Exemple 2 : résoudre l'équation $|3-2x|=4x-3$

Cas 1 : $3-2x\geq 0$, càd $x\leq\dfrac{3}{2}$

$$|3-2x|=4x-3 \Leftrightarrow 3-2x=4x-3$$

$$\Leftrightarrow\ -6x=-6\ \Leftrightarrow\ x=1$$

La solution satisfait $x\leq\dfrac{3}{2}$,

donc on la conserve.

Cas 2 : $3-2x<0$, càd $x>\dfrac{3}{2}$

$$|3-2x|=4x-3 \Leftrightarrow -(3-2x)=4x-3$$

$$\Leftrightarrow\ -2x=0\ \Leftrightarrow\ x=0$$

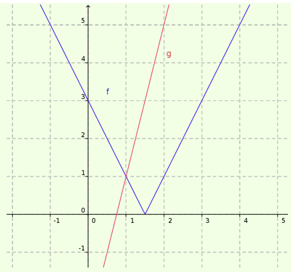
La solution ne satisfait pas $x>\dfrac{3}{2}$,

donc on ne la conserve pas.

$$S=\{1\}$$

Interprétation graphique :

si on pose $f(x)=|3-2x|$ et $g(x)=4x-3$, la représentation graphique de la fonction f intersecte celle de g pour $x=1$



16 [Aller plus loin] Inéquations contenant une valeur absolue

Théorème

Soient a et b deux expressions réelles, alors $|a|<b \Leftrightarrow -b<a<b$

Remarque : si b est un nombre positif, cela signifie que $a\in]-b;+b[$

Ce cas de figure implique que les deux conditions ($-b<a$ **et** $a<b$) soient satisfaites simultanément.

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $|3-2x|<4$

$|3-2x|<4 \Leftrightarrow -4<3-2x<4$ — par le théorème, l'expression est dans l'intervalle $]-4;+4[$

$\Leftrightarrow -4-3<3-2x-3<4-3$ ⟵ isoler x en soustrayant 3

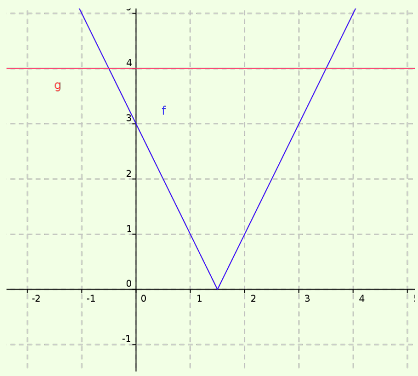
$\Leftrightarrow -7<-2x<1$ ⟵ réduire

$\Leftrightarrow 3,5>x>-0,5$ ⟵ diviser par -2 (attention au sens de l'inégalité)

$S=]-0,5;3,5[$ ⟵ donner la réponse sous forme d'intervalle

Interprétation graphique :

si on pose $f(x)=|3-2x|$ et $g(x)=4$, la représentation graphique de la fonction f est strictement "au-dessous" de celle de g pour des valeurs de x appartenant à $]-0,5;3,5[$



Exemple 2 : résoudre l'inéquation $|2x+5|\leqslant 2-x$

$\Leftrightarrow x-2\leqslant 2x+5$ et $2x+5\leqslant 2-x$ ⟵ théorème (séparation des deux conditions)

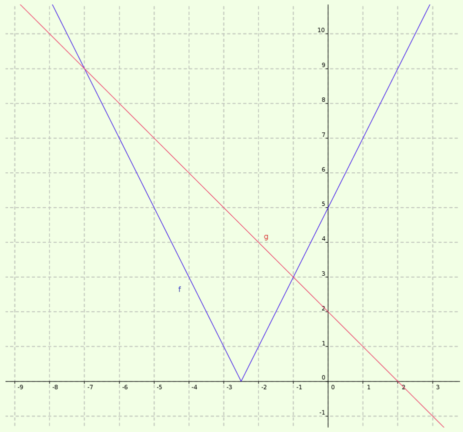
$\Leftrightarrow \ -7 \leqslant x \text{ et } 3x \leqslant -3$ ⟵ rassembler les termes semblables pour isoler x

$\Leftrightarrow \ -7 \leqslant x \text{ et } x \leqslant -1$ ⟵ diviser

$S = [-7 ; -1]$ ⟵ donner la réponse sous forme d'intervalle

Interprétation graphique :

si on pose $f(x) = |2x+5|$ et $g(x) = 2-x$, la représentation graphique de la fonction f est strictement "au-dessous" de celle de g pour des valeurs de x appartenant à $[-7 ; -1]$



Remarque : il peut arriver que les deux conditions ($-b < a$ **et** $a < b$) soient contradictoires !

Exemple 3 : résoudre l'inéquation $|2x-1| < x-1$

$\Leftrightarrow \ 1-x < 2x-1 \text{ et } 2x-1 < x-1$ ⟵ théorème ValAbs1 (séparation des deux conditions)

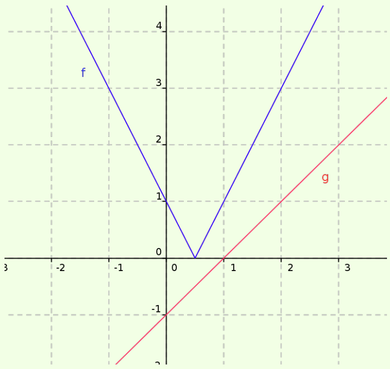
$\Leftrightarrow \ 2 < 3x \text{ et } x < 0$ ⟵ rassembler les termes semblables pour isoler x

$\Leftrightarrow \ \frac{2}{3} < x \text{ et } x < 0$ ⟵ diviser

$S = \emptyset$ ⟵ conclusion : les deux conditions sont incompatibles!

Interprétation graphique :

si on pose $f(x) = |2x-1|$ et $g(x) = x-1$, la représentation graphique de la fonction f n'est jamais strictement "au-dessous" de celle de g.



Théorème

Soient a et b deux expressions réelles, alors $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \text{ ou } a > b$

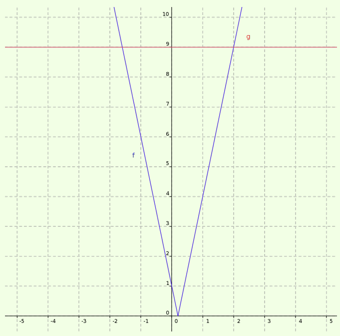
Ce cas de figure implique que l'une des conditions ($a < -b$ **ou** $a > b$) soit satisfaite. Il peut se produire que l'une des deux conditions soit suffisante et l'autre négligeable (voir ex 3).

Exemple 1 : résoudre l'inéquation $|5x-1| > 9$

$\Leftrightarrow\ 5x-1 < -9 \text{ ou } 5x-1 > 9$	$\longleftarrow$	théorème
$\Leftrightarrow\ 5x-1+1 < -9+1 \text{ ou } 5x-1+1 > 9+1$	$\longleftarrow$	isoler x en ajoutant 1
$\Leftrightarrow\ 5x < -8 \text{ ou } 5x > 10$	$\longleftarrow$	réduire
$\Leftrightarrow\ x < -1.6 \text{ ou } x > 2$	$\longleftarrow$	diviser par 5
$S =]-\infty ; -1.6[\cup]2 ; +\infty[$	$\longleftarrow$	donner la réponse sous forme d'intervalle

Interprétation graphique :

si on pose $f(x)=|5x-1|$ et $g(x)=9$, la représentation graphique de la fonction f est strictement "au-dessous" de celle de g pour des valeurs de x appartenant à $S=]-\infty ; -1,6[\cup]2 ; +\infty[$



Exemple 2 : résoudre l'inéquation $|3x-5| \geqslant x+1$

$\Leftrightarrow\ 3x-5 \leqslant -x-1 \text{ ou } 3x-5 \geqslant x+1$	$\longleftarrow$	théorème
$\Leftrightarrow\ 4x \leqslant 4 \text{ ou } 2x \geqslant 6$	$\longleftarrow$	isoler x
$\Leftrightarrow\ x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 3$	$\longleftarrow$	diviser
$S =]-\infty ; 1] \cup [3 ; +\infty[$	$\longleftarrow$	donner la réponse sous forme d'intervalle

Exemple 3 : résoudre l'inéquation $|x-5| \geqslant 3-4x$

$\Leftrightarrow\ x-5 \leqslant 4x-3 \text{ ou } x-5 \geqslant 3-4x$	$\longleftarrow$	théorème
$\Leftrightarrow\ -2 \leqslant 3x \text{ ou } -8 \geqslant -5x$	$\longleftarrow$	isoler x
$\Leftrightarrow\ -\frac{2}{3} \leqslant x \text{ ou } \frac{8}{5} \leqslant x$	$\longleftarrow$	diviser (attention au sens de l'inégalité)
$S = \left[-\frac{2}{3} ; +\infty\right[$	$\longleftarrow$	conclusion : la première condition est suffisante ! donner la réponse sous forme d'intervalle

Voir les exercices 44 à 46

Exercices d'entraînement

Polynômes et opérations

1 Soient $P(x)=3x^7-2x^6+x^5-3$ et $Q(x)=x^7+x^6-2$ deux polynômes.

Calculer

$\frac{3}{7}\cdot P(x), -3\cdot Q(x), P(x)\cdot Q(x), P(x)-3\cdot Q(x)$

Donner les résultats sous forme simplifiée.

2 Soient les deux polynômes $P(x)=(1-x)^2(x+3)$, $Q(x)=(2x+6)(x^2+1)$ Quels sont les degrés des polynômes $P(x)$, $Q(x)$, $P(x)+Q(x)$ et $P(x)\cdot Q(x)$?.

3 Vrai ou Faux ? Justifier les réponses.

a. La somme d'un polynôme de degré 3 et d'un polynôme de degré 2 est un polynôme de degré 3.

b. Si un polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

c. La somme de deux polynômes de degré 4 est un polynôme de degré 4.

Voir la théorie 1 à 2

Fonctions polynomiales

4 Pour chacune des fonctions f suivantes, construire un tableau des signes, puis esquisser une représentation graphique de f à l'aide de quelques images :

a. $f(x)=x^4-4x^2$

b. $f(x)=9x-x^3$

c. $f(x)=x^3-3x^2-9x+27$

d. $f(x)=\frac{1}{4}x^3-2$

e. $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+1$

5 On veut construire une boîte rectangulaire ouverte à partir d'une feuille de carton de 20 cm sur 30 cm en coupant à chaque coin un carré d'aire x^2 et en pliant les côtés.

a. Déterminer le D_{vip} .

b. Montrer que le volume de la boîte est donné par la fonction $V(x)=4x^3-100x^2+600x$

c. Donner toutes les valeurs positives de x telles que $V(x)>0$ et représenter le graphique de V pour $x>0$.

6 Un météorologue a déterminé que la température T (en °F) pour une certaine période de 24 heures en hiver est donnée par la formule $T(t)=\frac{1}{20}t(t-12)(t-24)$ pour $0\le t\le 24$ où t est le temps en heures et t=0 correspond à 6 heures du matin.

a. Quand a-t-on T>0 et T<0 ?

b. Représenter le graphique de T.

c. Montrer que la température a été de 32 °F à un moment donné entre midi et 13 heures.

Voir la théorie 3 à 4

Zéros

7 Déterminer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a. $f(x)=2x^3-x^2-4x-5$ $g(x)=x+1$

b. $f(x)=x^6-1$ $g(x)=x^3+2x^2+2x+1$

c. $f(x)=-3x^4-5x^3+x+37$ $g(x)=x+2$

d. $f(x)=4x^4+2x-3x^2-2$ $g(x)=4x^2+1$

e. $f(x)=6x^2-9x+12$ $g(x)=x-\frac{2}{3}$

f. $f(x)=2,1x^3-0,91x^2+0,47x-0,04$ $g(x)=x-0,1$

8 Trouver un polynôme $f(x)$ dont la division par x^2-x+1 donne comme quotient $2x^2+1$ et comme reste $x-1$.

9 La fonction polynomiale $f(x)=x^3-2x^2-2x-3$ est-elle divisible par $x+4$? Si oui, donner la factorisation complète de $f(x)$.

10 La fonction polynomiale $f(x)=x^3+4x^2+4x+1$ est-elle divisible par $x+1$? Si oui, donner la factorisation complète de $f(x)$.

11 Trouver une fonction polynomiale f de degré 3 dont les zéros sont –2, 1, 3 et telle que f(–1)=16.

Exercices d'entraînement

12 Dans chaque cas, déterminer la valeur des nombres a et/ou b pour que les divisions suivantes donnent un reste nul :

a. $(x^3+ax-5):(x-1)$

b. $(3x^4-ax^3+8x^2-2ax-20):(x-2)$

c. $(x^3+ax^2+bx+6):(x^2-5x+6)$

13 Montrer que $x-c$ n'est pas un diviseur de $f(x)=3x^4+x^2+5$, quel que soit le nombre entier c.

14 Vrai ou faux ? Justifier.

$x-y$ est un diviseur de x^n-y^n pour tout entier positif n.

15 Factoriser les polynômes suivants :

a. $3x^2-5x+2$

b. $x^3-6x^2+11x-6$

c. $x^4+2x^3-5x^2-6x$

d. x^3-3x^2+3x-2

e. $6x^4-5x^3-23x^2+20x-4$

f. $2x^4-3x^3-35x^2-9x+45$

16 On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3+x^2+x-4$

a. Montrer qu'elle n'a pas de zéro rationnel.

b. A l'aide de GeoGebra, déterminer un zéro réel de cette fonction au millième.

17 Donner une fonction polynomiale de degré 4 admettant:

a. exactement trois zéros : 1, 2 et 3

b. exactement deux zéros : – 5 et 7

c. un seul zéro : 4

d. aucun zéro

18 Montrer que les fonctions f définies ci-dessous admettent un zéro entre a et b :

a. $f(x)=x^3-4x^2+3x-2;\quad a=3,\ b=4$

b. $f(x)=-x^4+3x^3-2x+1;\quad a=2,\ b=3$

c. $f(x)=x^5+x^3+x^2+x+1;\quad a=-\dfrac{1}{2},\ b=-1$

19 Factoriser le polynôme $12x^4+16x^3+x^2-4x-1$

20 Factoriser les polynômes suivants :

a. $x^4-2x^3-4x^2+2x+3$

b. $3x^3+x^2-6x-4$

21 Problème : factorisation de la fonction $f(x)=x^4+4$.

a. Montrer que cette fonction n'a aucun zéro rationnel.

b. Peut-on en déduire que cette fonction n'est pas factorisable ?

c. Tenter la factorisation à l'aide de l'astuce suivante: $x^4+4 = x^4+\mathbf{4x^2}+4-\mathbf{4x^2}$

Voir la théorie 5 à 10

Représenter graphiquement

22 Trouver les zéros des fonctions polynomiales suivantes, leur tableau de signes et les représenter graphiquement :

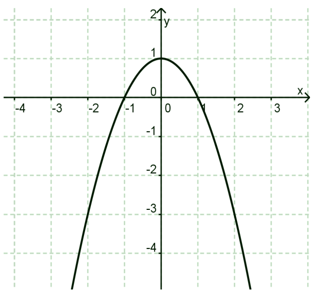
a. $f(x)=x^3+5x^2-2x-24$

b. $g(x)=6x^4+5x^3-17x^2-6x$

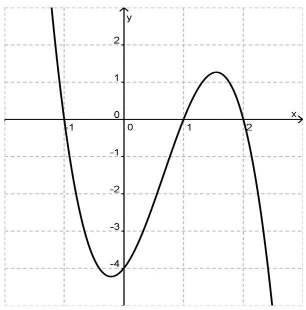
c. $h(x)=3x^3+4x^2\pm5x-2$

23 Pour chacune des représentations graphiques ci-dessous, déterminer une fonction polynomiale de plus petit degré lui correspondant :

a.

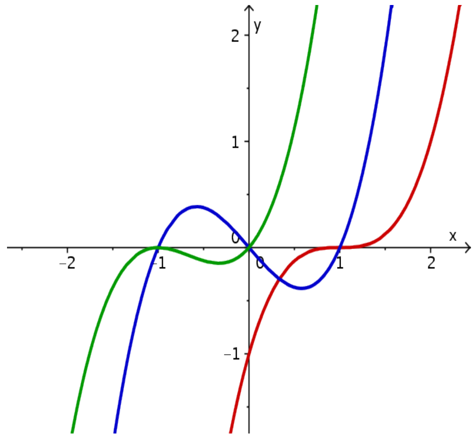


b.



Exercices d'entraînement

24 Retrouver la courbe correspondant à la représentation graphique de chacune des fonctions f, g et h définies par $f(x)=(x-1)^3$, $g(x)=x^3-x$, $h(x)=x\cdot(x+1)^2$



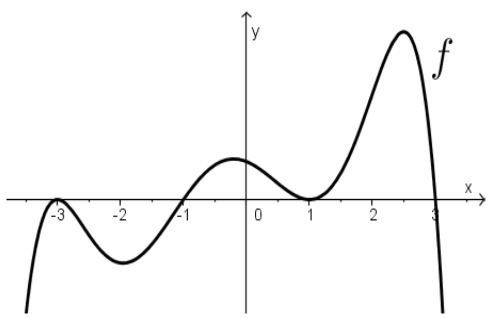
25 Soit le polynôme $P(x)=4x^4+12x^3+9x^2-2x-3$.

a. Factoriser complètement $P(x)$.

b. Pour quelles valeurs de x a-t-on $P(x)<0$?

26 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

a. On considère une fonction polynomiale f dont on donne une représentation graphique :



i La fonction f représentée ci-contre possède quatre zéros, donc f est de degré 4.

ii La fonction f est divisible par $(x+3)^2$

iii Le reste de la division de f par $(x+2)$ est positif.

b. Le théorème des zéros rationnels montre que la fonction $g(x)=x^5-\frac{9}{4}x^3-\frac{3}{2}x+1$ n'a aucune racine rationnelle.

27 Dix jours après une pollution, un biologiste prélève un échantillon d'eau dans une rivière, et estime le nombre de bactéries présentes à 1000.

Un autre échantillon, prélevé 5 jours plus tard, ne contient plus de trace de la bactérie.

Le biologiste estime qu'au moment de la pollution, la bactérie n'était pas présente non plus, et a du apparaître progressivement, puis se reproduire de plus en plus. Ensuite la population a probablement atteint un maximum, avant de diminuer brusquement.

Le biologiste voudrait estimer la quantité de bactéries après 5 jours.

a. Représenter graphiquement cette situation.

b. Repérer les zéros de la fonction représentée, et leur multiplicité.

c. Proposer l'expression algébrique d'une fonction polynomiale de degré 3 qui modélise cette situation.

d. Avec ce modèle, estimer le nombre de bactéries après 5 jours.

28 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si f est une fonction polynomiale de degré n, alors f a toujours n zéros.

b. Si une conjecture est vraie, sa réciproque est fausse.

c. Si f est une fonction réelle, alors 2 admet toujours au moins une préimage.

d. Si f est une fonction de degré 2, alors son tableau de signes ne peut pas être totalement négatif.

e. Si f est une fonction de degré 1, alors sa pente est toujours un nombre rationnel.

f. Si $a \in Z$ et $b \in Z$ et si f est une fonction réelle définie par $f(x) = ax^3+bx+1$, alors –1 ou 1 sont des zéros de f.

g. Si f est une fonction telle que $f(a) = -f(a)$ pour un certain nombre a, alors f admet au moins un zéro.

h. Si $A(x)$ est de degré 3, alors $A(x)$ possède exactement trois racines.

i. Si $A(x)$ est de degré 3 et si $B(x)$ est de degré 2, alors $A(x)B(x)$ est de degré 5.

j. Si $B(x)$ divise $A(x)$, alors $(B(x))^2$ divise $(A(x))^2$.

k. Le sommet de la parabole $f(x)=2x^2-4x+4$ se trouve au point (1; 2).

Voir la théorie 11

Inéquations

29 Expliquer, en justifiant, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a. $x < x + 1$ pour tout nombre x.

b. $2x \geqslant x$ pour tout nombre x.

c. $x < 0$ pour tout nombre x.

30

a. Quelles sont, parmi les nombres -2 ; 0 et 2, des solutions de l'inéquation $5x \leq 10$?

b. Le nombre 3 est-il solution de l'inéquation $x+1>0$? Et le nombre -1 ?

c. Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation $2x+1>0$? Et le nombre 0 ?

d. Le nombre 3 est-il solution de l'inéquation $5x+1 \leq 0$? Et le nombre -3 ?

31 La conjecture suivante est-elle vraie ? Justifier.
Conjecture : L'inéquation $2x^2+3x-2 \geq 0$ est équivalente à l'inéquation $2x^4+3x^3-2x^2 \geq 0$

32

a. Écrire une inéquation dont -5 est solution.

b. Écrire une inéquation dont 0 et 4 sont solutions.

c. Écrire une inéquation dont -1 est solution mais pas -2.

33 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2(x+2)+0{,}1>0{,}2$

b. $(x+2)^2 \leqslant (x-3)^2$

c. $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}<\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}$

34 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2(x + 5) > (x + 3) - (x - 1)$

b. $4 - (2x - 1) \leqslant 3(4x + 1)$

35 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $5x \leqslant 5x - 2$

c. $3x + 9 \geqslant 9 + 3x$

b. $5x \leqslant 5x + 2$

36 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{x-1}{4}<\frac{2x-3}{2}+5$

b. $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}>\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}$

c. $(x+3)(x-1)>(x+2)^2+5$

d. $2(x+1)^2<(x+2)^2-7$

37 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $x(x-2)(x+4)>0$

b. $(x-3)(x+2)^2 \leqslant 0$

c. $(x-3)(x+2)^2>0$

d. $x^2(x-1)(x+1) \geqslant 0$

e. $x^2(x-2)(x+3)<0$

f. $3(x+1)^3(2x+5)<0$

38 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $4x^2 \leqslant 36$

b. $(x+3)^2>6(x+1)$

c. $x^2<3(2x-3)$

d. $(x+1)^2 \geqslant x^2-1$

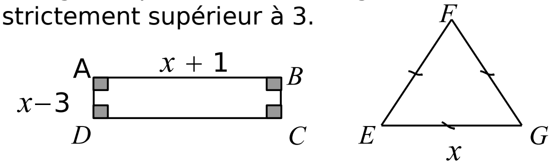
39 Après avoir ajouté 5 au triple d'un nombre, on obtient un nombre négatif. Que peux-tu dire du nombre choisi au départ ?

40 Un cinéma propose deux tarifs. *Tarif 1* : 7,50.- la place et *Tarif 2* : 5,25.- la place sur présentation d'une carte d'abonnement de 27.- valable un an.

a. On désigne par x le nombre de places achetées au cours d'une année. On note $P1$ le prix payé avec le tarif 1 et $P2$ le prix payé avec le tarif 2. Exprimer $P1$ et $P2$ en fonction de x.

b. À partir de combien de places a-t-on intérêt à s'abonner ?

41 $ABCD$ est un rectangle et EFG est un triangle équilatéral; x désigne un nombre strictement supérieur à 3.

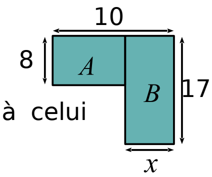


a. Exprimer le périmètre de $ABCD$ et le périmètre de EFG en fonction de x.

b. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le périmètre du rectangle est strictement inférieur à celui du triangle.

42 Un bureau de recherche emploie 27 informaticiens et 15 mathématiciens. On envisage d'embaucher le même nombre x d'informaticiens et de mathématiciens. Combien faut-il embaucher de spécialistes de chaque sorte pour que le nombre de mathématiciens soit au moins égal aux deux tiers du nombre d'informaticiens ?

43 Pour quelles valeurs de x le périmètre du rectangle A est-il supérieur à celui du rectangle B ?



Voir la théorie 12 à 14

Valeurs absolues

44 Résoudre les équations suivantes :

a. $|x+3|=0,01$

b. $|x+2|+0,1=0,2$

45 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|x+3|<0,01$

b. $|x+2|+0,1\geqslant 0,2$

c. $2|-11-7x|-2>10$

d. $|7x+2|>-2$

46 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|x+3|<x-2$

b. $|2x-1|\geqslant x+4$

c. $|x+2|<-x$

Voir la théorie 15 à 16

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

47 Soient les deux polynômes $P(x)=x^5-2x^3+x^2-1$, $Q(x)=x^5-x^2-1$.

Calculer : $2\dfrac{P}{3}$, $5Q$, $P\cdot Q$, $P-Q$. Donner les résultats sous forme simplifiée.

48 Déterminer le quotient et le reste si on divise $f(x)$ par $p(x)$:

a. $f(x)=2x^4-x^3-3x^2+7x-12;\ p(x)=x^2-3$

b. $f(x)=3x^3+2x-4;\quad p(x)=2x^2+1$

c. $f(x)=7x+2;\quad p(x)=2x^2-x-4$

d. $f(x)=9x+4;\quad p(x)=2x-5$

49 Soient les polynômes $g(x)=2x^2+1$, $q(x)=5x^2-3x$ et $r(x)=-x+1$. Déterminer le polynôme $f(x)$ tel que la division de f par g donne q comme quotient et r comme reste.

50 Déterminer un polynôme $f(x)$ de coefficient dominant 1, ayant le degré et les zéros indiqués.

a. degré 3; zéros $-2,0,5$

b. degré 3; zéros $\pm 2,3$

c. degré 4; zéros $-2,\pm 1,4$

d. degré 4; zéros $-3,0,1,4$

51 Utiliser la division pour montrer que c est un zéro de $f(x)$.

a. $f(x)=3x^4+8x^3-2x^2-10x+4;\quad c=-2$

b. $f(x)=4x^3-9x^2-8x-3;\quad c=3$

c. $f(x)=4x^3-6x^2+8x-3;\quad c=\dfrac{1}{2}$

d. $f(x)=27x^4-9x^3+3x^2+6x+1;\quad c=-\dfrac{1}{3}$

52 Déterminer toutes les valeurs de k telles que $f(x)=kx^3+x^2+k^2x+3k^2+11$ soit divisible par le polynôme $x+2$.

53 Vrai ou faux ? Justifier.

$x+y$ est un diviseur de x^n-y^n pour tout entier positif n pair.

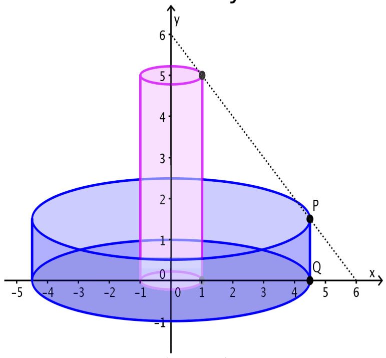
54 Vrai ou faux ? Justifier.

$x+y$ est un diviseur de x^n+y^n pour tout entier positif n impair.

55 Considérons un point $P(x;y)$ du

premier cadran sur $y=6-x$, et le segment vertical PQ montré sur la figure.

a. Si PQ tourne autour de l'axe des y, déterminer le volume V du cylindre obtenu.



b. Pour quel point $P(x;y)$ avec $x\neq 1$, le volume V est-il le même que celui du cylindre de rayon 1 et de hauteur 5 selon la figure?

56 Factoriser les polynômes suivants :

a. $x^3-9x^2+26x-24$

b. $x^3-9x^2+11x+21$

c. $x^4+6x^3+13x^2+12x+4$

d. $x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

e. $2x^3-8x-3x^2-3$

f. $6x^3+13x^2+x-2$

57 Montrer que l'équation n'a pas de solutions rationnelles :

a. $x^3+3x^2-4x+6=0$

b. $3x^3-4x^2+7x+5=0$

58 Déterminer toutes les solutions de l'équation :

a. $x^3-x^2-10x-8=0$

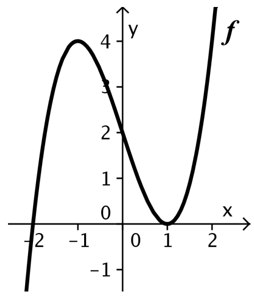
b. $2x^3-3x^2-17x+30=0$

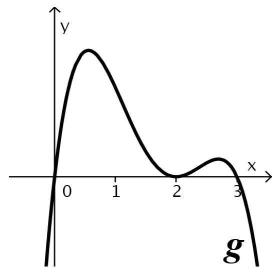
c. $x^4+3x^3-30x^2-6x+56=0$

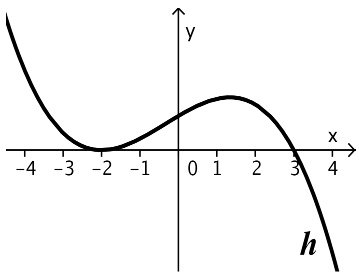
d. $6x^5+19x^4+x^3-6x^2=0$

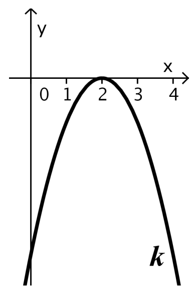
59 Factoriser la fonction polynomiale $f(x)=x^4+7x^3+13x^2-3x-18$, sachant que -3 est un zéro double de cette fonction.

60 Pour chacune des représentations graphiques ci-dessous, déterminer une fonction polynomiale de degré minimal lui correspondant :

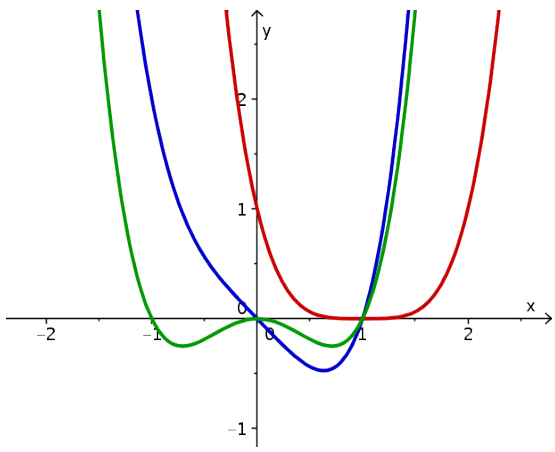
a.


b.


c.


d.


61 Retrouver la courbe correspondant à la représentation graphique de chacune des fonctions f, g et h suivantes : $f(x)=(x-1)^4$, $g(x)=x^4-x$, $h(x)=x^4-x^2$



Exercices d'entraînement

62 Sachant que a est un nombre tel que $a < 3$, recopier et compléter par une inégalité :

a. $a + 3$ ...

b. $a - 3$ ...

c. $3a$ ...

d. $-3a$ ...

e. $-a$ ...

f. $a\sqrt{3}$ ...

g. $2a + 2$ ...

h. $3a - \pi$ ...

i. $-3a + 3$ ...

63 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $3x-6\geqslant 0$

b. $5x+3<8$

c. $2x+3>5x-6$

64 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $4x^2+11x+6>0$

b. $11x^2+31x+20<0$

c. $3x^2+36x<-108$

d. $36x^2\geqslant 120x-100$

e. $0\leqslant 13x^2+32x+29$

f. $22x\geqslant 10x^2+13$

65 La distance de freinage d(en m) d'une voiture roulant à v km/h est données par l'équation $d=0,2v+0,006v^2$. Déterminer les vitesses qui permettent des distances de freinage inférieures à 11,4m.

66 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|2x+5|<4$

b. $|3x-9|>0$

67 Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|x-3|<x+2$

b. $|2x+1|\geqslant -x-4$

c. $|-x+3|<2x-5$

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

47 $2\frac{P}{3} = \frac{2}{3}x^5-\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}$,

$5Q = 5x^5-5x^2-5$,

$P\cdot Q = x^{10}-2x^8-x^4+2x^3+1$,

$P-Q = -2x^3+2x^2$.

48 Quotient et reste :

b. $2x^2-x+3$; $4x-3$

c. $\frac{3}{2}x$; $\frac{1}{2}x-4$

d. 0 ; $7x+2$

e. $\frac{9}{2}$;

49 $f(x)=10x^4-6x^3+5x^2-4x+1$

50 Polynômes $f(x)$ de coefficients dominant 1 :

a. $x(x+2)(x-5)=x^3-3x^2-10$

b. $(x-2)(x+2)(x-3)=x^3-3x^2-4x+12$

c. $(x+2)(x^2-1)(x-4)=x^4-2x^3-9x^2+2x+8$

d. $x(x+3)(x-1)(x-4)=x^4-2x^3-11x^2+12x$

51 Montrer que le reste est nul :

a. $f(-2)=48-64-8+20+4=0$

b. $f(3)=108-81-24-3=0$

c. $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+4-3=0$

d. $f(-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-2+1=0$

52 $-8k+4-2k^2+3k^2+11=0$, donc $k=3$ ou $k=5$

53 La proposition est vraie :

Si $f(x)=x^n-y^n$, et n pair, alors $f(-y)=0$

54 La proposition est vraie:

Si $f(x)=x^n+y^n$, et n impair, alors $f(-y)=0$

55

a. $V=\pi x^2(6-x)$

b. $\left(\frac{5+\sqrt{45}}{2};\frac{7-\sqrt{45}}{2}\right)$

56 Factorisations :

a. $(x-2)(x-3)(x-4)$

b. $(x+1)(x-3)(x-7)$

c. $(x+1)^2(x+2)^2$

d. $(x-3)^4$

e. $2(x+\frac{1}{2})(x+1)(x-3)$
$=(2x+1)(x+1)(x-3)$

f. $6(x+\frac{1}{2})(x+2)(x-\frac{1}{3})$
$=(2x+1)(x+2)(3x-1)$

57 Les zéros possibles ne satisfont pas l'équation:

a. $\pm 1;\pm 2;\pm 3;\pm 6$

b. $\pm 1;\pm 5;\pm\frac{1}{3};\pm\frac{5}{3}$

58 Solutions des équations :

a. $-2;-1;4$

b. $-3;2;\frac{5}{2}$

c. $-7;\pm\sqrt{2};4$

d. $-3;-\frac{2}{3};0$ (zéro double)$;\frac{1}{2}$

59 $f(x)=(x+3)^2(x-1)(x+2)$

60 $f(x)=(x-1)^2(x+2)$
$g(x)=-x(x-2)^2(x-3)$
$h(x)=-(x+2)^2(x-3)$
$k(x)=-(x-2)^2$.

61

a. $f(x)$: courbe rouge
b. $g(x)$: courbe bleue
c. $h(x)$: courbe verte

62

a. $a+3<6$

b. $a-3<0$

c. $3a<9$

d. $-3a>-9$

e. $-a>-3$

f. $a\sqrt{3}<3\sqrt{3}$

g. $2a+2<8$

h. $3a-\pi<9-\pi$

i. $3a-\pi<9-\pi$

j. $-3a+3>-6$

63

a. $[2;+\infty[$

b. $]-\infty;1[$

c. $]-\infty;3[$

64

a. $]-\infty;-2[\cup\left]-\frac{3}{4};+\infty\right[$

b. $\left]-\frac{20}{11};-1\right[$

c. $\emptyset$ **d.** $\mathbb{R}$ **e.** $\mathbb{R}$ **f.** $\emptyset$

65 $0\leq v<30$

66

a. $\left]-\frac{9}{2};-\frac{1}{2}\right[$

b. $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$

67

a. $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b. $\mathbb{R}$

c. $\left]\frac{8}{3};+\infty\right[$

« Les mathématiciens étudient le soleil et la lune et oublient ce qu'ils ont sous les pieds. »

Diogène
Philosophe grec cynique (v. 404-323 av. J.-C.)

A savoir en fin de chapitre

Polynômes et opérations

✔ polynômes : degré, coefficients, terme dominant, terme constant ;

✔ opérations standard entre polynômes : additionner, soustraire, multiplier deux polynômes ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 3

Fonctions polynomiales

✔ fonctions polynomiales ; zéros, tableau de signes ; esquisse d'une représentation graphique de la fonction ;

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 4 à 6

Recherche des zéros

✔ division polynomiale ; racines d'un polynôme, zéros d'une fonction polynomiale ;

✔ théorèmes du diviseur et sur les zéros entiers, recherche des zéros entiers ;

✔ * théorème sur les zéros rationnels, recherche des zéros rationnels ;

Voir la théorie 5 à 10 et les exercices 7 à 21

Représentation graphique

✔ esquisse de la représentation graphique d'une fonction polynomiale ;

✔ déterminer l'expression algébrique d'une fonction polynomiale à partir de sa représentation graphique ;

Voir la théorie 11 et les exercices 22 à 28

Inéquations

✔ inéquation ; solution d'une inéquation ;

✔ théorème sur les inéquations équivalentes ; résoudre une inéquation ; modéliser ;

Voir la théorie 12 à 14 et les exercices 29 à 43

Valeurs absolues

✔ valeur absolue d'un nombre, d'une expression ;

✔ résoudre une équation ou une inéquation contenant une valeur absolue.

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 44 à 46

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch03