Chapitre 02 - Raisonner en géométrie

Avertissement : ce chapitre fait directement suite aux chapitres 8 et 9 « De Thalès à Pythagore » et « Cercles » du Manuel Sesamath.ch de 1re année maturité gymnasiale[1] ; il est donc très fortement conseillé de les avoir étudiés - dans l'esprit proposé, soit comme une introduction à la construction mathématique et à la démonstration – avant d'aborder ce chapitre[2].

L'école d'Athènes, par Raphaël (1511)

Problème

Timotée possède vingt jetons numérotés de 1 à 20 et vingt boîtes. Il veut ranger ses jetons dans des boîtes de telle sorte que toutes les boîtes utilisées (au moins deux) contiennent le même nombre de jetons et que la somme des numéros des jetons contenus dans chacune des boîtes utilisées soit toujours la même.
Combien de boîtes Timotée utilisera-t-il ?

1 *voir http://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-1e/les-fichiers-a-telecharger/pdf*

2 *voir également http://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-1e/complements pour y trouver de nombreuses fiches résumé qui explicitent et résument la démarche.*

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] La boîte à outils

Reprendre, discuter et illustrer la « boîte à outils » à notre disposition à l'issue de la 1re année après avoir en particulier étudié les angles, les triangles, les théorèmes de Thalès et Pythagore ainsi que leurs réciproques et contraposées : http://sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09

1 Quelle est la différence entre axiome, définition et théorème ?

2 On considère la conjecture suivante : « Soient d_1 et d_2 deux droites parallèles. Si la droite d_3 est perpendiculaire à d_1, alors d_3 est perpendiculaire à d_2 ». Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

3 On considère les conjectures suivantes :

Conjecture 1 : Un parallélogramme est un rectangle.

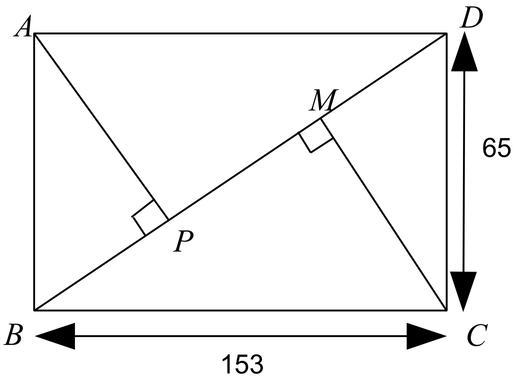
Conjecture 2 : Un rectangle est un parallélogramme.

a. Les énoncer sous forme d'implication.

b. Comment s'appelle la conjecture 2. par rapport à la conjecture 1 ?

c. Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

4 Soit $ABCD$ un rectangle :



a. Établir la liste des données issues de cette figure, en usant des bonnes notations.

b. Quelles sont les mesures supplémentaires que l'on peut connaître ?

c. Déterminer $\overline{MP}$ en justifiant précisément toutes les étapes des calculs.

Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 3

2 [Activité] Un nouvel outil : les triangles isométriques

1 Définition

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si ils peuvent être superposés l'un à l'autre. Cela est équivalent à dire que tous leurs côtés et tous leurs angles ont des mesures égales deux-à-deux. Dans ce cas, on note: $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Illustrer cette situation.

2 Cas d'isométrie des triangles

a. Quels sont les différents critères nécessaires et suffisants pour que deux triangles quelconques soient isométriques ?

b. Euclide établit trois cas d'isométrie des triangles. Dans notre langage, cela s'écrit ainsi :

Axiome C-C-C (côté-côté-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs des trois côtés de ΔABC sont égales aux longueurs des trois côtés de ΔEFG , alors les deux triangles sont isométriques.

Axiome C-A-C (côté-angle-côté)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs de deux côtés et de l'angle adjacent à ces deux côtés sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Axiome A-C-A (angle-côté-angle)

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si la longueur d'un côté et des deux angles adjacents à ce côté sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Illustrer ces situations par des exemples.

c. Montrer que les situations A-A-A et C-A-C avec un des deux côtés non adjacent à l'angle ne permettent pas dans tous les cas d'affirmer que les triangles sont isométriques :

3 S'exercer

a. Dans les situations suivantes, dire si on peut conclure que les triangles sont isométriques ; si oui, identifier le cas d'isométrie concerné et identifier les données isométriques :

i. Deux triangles ΔABC et ΔDEF tels que $\overline{AB}=\overline{DE}=5$, $\widehat{ABC}=32°$, $\widehat{FDE}=112°$ et $\widehat{BCA}=\widehat{EFD}=42°$.

ii. Deux triangles ΔABC et ΔDEF tels que $\overline{AC}=\overline{EF}=6$, $\widehat{CBA}=\widehat{DEF}=63°$ et $\widehat{BAC}=\widehat{FDE}=58°$.

iii. Deux triangles ΔABC , rectangle en B, et ΔDEF , rectangle en E, tels que $\overline{AC}=\overline{DF}=5$ et $\overline{AB}=\overline{DE}=3$.

b. Reprendre la figure de l'activité précédente et déterminer tous les triangles isométriques.

3 [Activité] Parallélogramme

a. Donner la définition de « parallélogramme ».

b. Enoncer et démontrer le théorème sur les côtés du parallélogramme.

4 [Activité] Ne pas confondre définition et théorème !

a. Démontrer le théorème suivant attribué à Thalès :

> *Thalès A 20 : Proclus (410/12-485)*
> Il faut rendre grâce à l'antique Thalès, entre autres découvertes, pour le théorème suivant : car on dit qu'il fut le premier à découvrir et à énoncer que les angles à la base de tout triangle isocèle sont égaux, bien qu'il ait appelé semblables, selon une terminologie plus ancienne, les angles qui sont égaux.
> *Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide, 250, 20.*

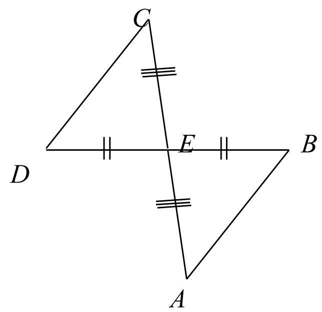
Rappeler la définition de « triangle isocèle » puis démontrer ce théorème sur les triangles isocèles attribuée par Proclus à Thalès.

b. Énoncer et démontrer un théorème concernant les angles d'un triangle équilatéral.

5 [Activité] Conjecturer … puis démontrer

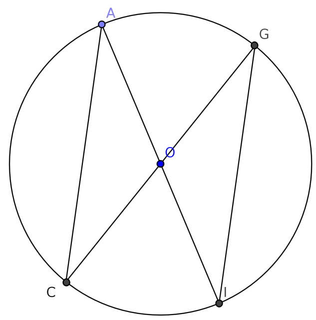
a. Dans la situation ci-dessous, que peut-on dire des triangles ΔABE et ΔDEC .

Justifier.



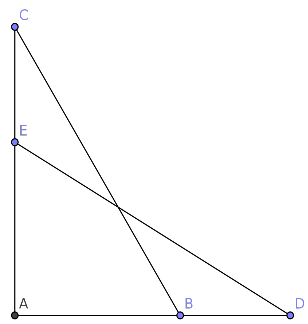
b. On considère la situation suivante dans laquelle O est le centre du cercle, A, O, I et C, O, G sont alignés.

Que conjecturer à propos de $\overline{AC}$ et $\overline{IG}$? Justifier.



c. On considère la situation ci-dessous dans laquelle $\widehat{ADE}=\widehat{ACB}$, $\overline{AC}=\overline{AD}$ et $\overline{CE}=\overline{BD}$:

Que conjecturer à propos de triangles isométriques ?
Justifier.



d. Énoncer et démontrer une propriété concernant le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme.

e. Supposons que dans un triangle$\Delta\ ABC$, un angle soit égal à la différence des deux autres. Que peut-on conjecturer à propos de$\Delta\ ABC$? Démontrer cette conjecture.

6 [Activité] Tout ensemble

Soient $ABCD$ un parallélogramme, M un point quelconque de $[AD]$, N le symétrique de A par rapport à M, P le point d'intersection de d_{CM} et d_{BN}. Que peut-on conjecturer quant à l'intersection I de d_{AP} avec $[CD]$?

Indication : GeoGebra peut s'avérer utile pour explorer une situation et aider à conjecturer.

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 4 à 14

7 [Activité] Droites remarquables du triangle

1 Bissectrices d'un angle

a. Rappeler la définition de la **bissectrice** d'un angle.

b. Construire avec GeoGebra la bissectrice d'un angle que vous avez construit ; faire bouger dynamiquement la construction. Choisir un point quelconque situé sur la bissectrice et mesurer les distances entre ce point et chacune des demi-droites sur lesquelles est construit l'angle ? E

c. Soit un point A et deux demi-droites issues de A à partir desquelles on construit la bissectrice b, et soit P un point quelconque de b. Enoncer une conjecture concernant la distance entre P et les deux-demis droites.

d. Démontrer la conjecture énoncée au point précédent.

e. Représenter avec GeoGebra les trois bissectrices d'un triangle quelconque. Qu'observe-t-on ? Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois bissectrices ? La démontrer.

2 Un cercle

a. Soit $\Delta\, ABC$ un triangle, I l'intersection de ses bissectrices, et r la distance entre I et un côté du triangle. Représenter la situation avec GeoGebra et tracer le cercle Γ de centre I et de rayon r. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à Γ ? La démontrer.

3 Médiatrice d'un segment

a. Rappeler la définition de la **médiatrice** d'un segment $[AB]$.

b. Soit m la médiatrice d'un segment $[AB]$ et P un point quelconque de m. Enoncer une conjecture concernant les distances entre P et A et entre P et B.

c. Démontrer la conjecture énoncée au point précédent.

d. Représenter avec GeoGebra les trois médiatrices d'un triangle quelconque. Qu'observe-t-on ? Quelle conjecture peut-on énoncer quant à ces trois médiatrices ? La démontrer.

4 **Un autre cercle**

Soit ΔABC un triangle, I l'intersection de ses médiatrices, et r la distance entre I et A. Représenter la situation avec GeoGebra et tracer le cercle Γ de centre I et de rayon r. Quelle conjecture peut-on énoncer quant à Γ ? La démontrer.

5 **Médianes d'un triangle**

a. Rappeler la définition des **médianes** d'un triangle.

b. Représenter avec GeoGebra les trois médianes d'un triangle quelconque ; faire bouger dynamiquement la construction. Quelle conjecture peut-on énoncer ?

c. Quelle relation y a-t-il entre le centre de gravité du triangle et les médianes ?

6 **Hauteurs d'un triangle**

a. Rappeler la définition des **hauteurs** d'un triangle.

b. Représenter avec GeoGebra les trois hauteurs d'un triangle quelconque ; faire bouger dynamiquement la construction. Quelle conjecture peut-on énoncer ?

8 [Activité] Calculer

Soient A(-5;6), B(3;2) et C(-1;-4) les sommets d'un triangle ΔABC. Déterminer le point d'intersection O des médiatrices du triangle ΔABC et l'équation du cercle circonscrit ainsi que l'aire du disque.

9 [Aller plus loin] Démontrer comme Euler

1 Démontrer les conjectures énoncées dans les points précédents au sujet des médianes et des hauteurs du triangle.

2 Qu'observe-t-on à propos de certains points d'intersections des droites remarquables du triangle ? Énoncer une conjecture.

3 Qui était Euler ?

10 [Activité] Exploration

Dans un triangle ΔABC , K et L sont les pieds des hauteurs issues de B et C. Par où passe la médiatrice du segment $[KL]$? Explorer, énoncer une conjecture, démontrer.

Voir la théorie 8 à 9 et les exercices 17 à 24

1 [Souvenirs] Boîte à outils initiale pour démontrer : étapes 1-2

Des notions fondamentales

- ☐ le **plan**, les **points**, les **sous-ensembles de points** ;
- ☐ **l'appartenance**, **l'union** et **l'intersection** ;
- ☐ les **droites**, **demi-droites**, **segments**, **surfaces**.

Des définitions

- ☐ **angle**, angle **plein** *[Déf «α plein»]*, angle **plat** *[Déf «α plat»]*, angle **droit** *[Déf «α droit»]*
- ☐ angles **complémentaires** *[Déf «α compl»]*, **supplémentaires** *[Déf «α suppl»]*, **opposés** *[Déf «α opp »]*, **correspondants** *[Déf «α corr»]*, **alternes-internes** *[Déf «α alt-int»]*

Encore des notions fondamentales

- ☐ **distance** entre deux points, **longueur**, **aire**, **mesure** d'un angle.

Des définitions

- ☐ droites **sécantes**, **parallèles** *[Déf «dr. par.»]*, **perpendiculaires** *[Déf «dr. perp.»]*

5 axiomes initiaux

- ☐ un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts ;
- ☐ un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une (ligne) droite ;
- ☐ étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre ;
- ☐ tous les angles droits sont de mesure égale ;
- ☐ par un point extérieur à une droite, on peut mener une et une seule parallèle à cette droite

Remarque : le dernier axiome est exprimé de façon moderne et équivalente ; Euclide écrit dans ses Eléments : « si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est strictement inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté. »

Un axiome important

- ☐ deux angles correspondants sont égaux (c'est-à-dire « de mesures égales ») si et seulement si les droites qui les portent sont parallèles *[Ax «α corr»]*

Des théorèmes démontrés

- ☐ des angles opposés sont égaux *[Thm «α opp»]*
- ☐ des angles alternes-internes sont égaux si et seulement si les droites qui les portent sont parallèles *[Thm « α alt-int»]*

Des définitions

- ☐ **triangle**, **côtés**, **sommets**, **côtés opposés** ;
- ☐ triangle **rectangle** *[Déf «Δ rect»]*, **isocèle** *[Déf «Δ isoc»]*, **équilatéral** *[Déf «Δ équi»]* ;

☐ **quadrilatère** *[Déf «quadrilatère»]*, **trapèze** *[Déf «trapèze»]*, **parallélogramme** *[Déf «parallélogramme»]*, **rectangle** *[Déf «rectangle»]*, **losange** *[Déf «losange»]*, **carré** *[Déf «carré»]* ;

☐ **polygone** (régulier), **côtés**, **sommets**

Des notations

☐ angle : $\widehat{ABC}$ ou α, β, γ, ϵ, ...

☐ triangle : ΔABC et les notations usuelles dans le triangle

Des théorèmes non démontrés

☐ aires des quadrilatères *[Thm «aires»]*

☐ les côtés opposés d'un parallélogrammes sont de longueurs égales *[Thm «parallélogr.»]*

☐ un triangle isocèle a deux angles égaux *[thm«Δ isoc»]*

Des théorèmes démontrés

☐ la somme angles d'un triangle est égale à 180° *[Thm «ΣαΔ=180»]*

☐ un triangle équilatéral a trois angles égaux à 60° *[thm«Δ équi»]*

2 [Souvenirs] Boîte à outils initiale pour démontrer : étape 3

Des définitions

☐ **côtés correspondants** *[Déf «côtés corr »]*

☐ **triangles semblables** *[Déf «Δ sembl »]*

Une notation

☐ triangles semblables : $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Un théorème démontré (et sa contraposée)

☐ théorème de Thalès *[Thm «Thales»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Thales»]*

Un théorème non démontré (et sa contraposée)

☐ réciproque du théorème de Thalès *[Thm «récipr-Thales»]* et sa contraposée *[Thm « contr-recipr-Thales»]*

3 [Souvenirs] Boîte à outils initiale pour démontrer : étapes 4-5

Un théorème démontré (et sa contraposée)

☐ théorème de Pythagore *[Thm «Pyth»]* et sa contraposée *[Thm «contr-Pyth»]*

Un théorème non démontré (et sa contraposée)

☐ réciproque du théorème de Pythagore *[Thm «récipr-Pyth»]* et sa contraposée *[Thm « contr-recipr-Pyth»]*

Des théorèmes démontrés

☐ théorème de la hauteur *[Thm «hauteur»]*
☐ théorème de Euclide *[Thm «Euclide»]*

4 [Souvenirs] Boîte à outils initiale pour démontrer – étape 6

Des définitions

☐ **cercle** (**centre**, **rayon**), **disque**, **secteur**, **longueur d'arc**, **angle au centre**, **angle inscrit**

Des théorèmes non démontrés

☐ relation mesure d'angle, longueur d'arc, aire du secteur *[Thm «rel. α/arc/sect»]*
☐ théorème tangente au cercle *[Thm «tg cercle»]*

Des théorèmes démontrés

☐ théorème cercle de Thalès *[Thm «cercle Thales»]*
☐ théorème angles au centre et inscrit [*Thm «α centre/inscrit »*]
☐ théorème angles inscrits [*Thm «α inscrits »*]

Voir les exercices 1 à 3

5 [A savoir] Triangles isométriques

Définition

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si ils peuvent être superposés l'un à l'autre. Cela est équivalent à dire que tous leurs côtés et tous leurs angles ont des mesures égales deux-à-deux.

Notation

Deux triangles ΔABC et ΔEFG sont **isométriques** si et seulement si $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$.

Axiomes : cas d'isométrie des triangles

☐ **Axiome C-C-C (côté-côté-côté)**
Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs des trois côtés du ΔABC sont égales aux longueurs des trois côtés du ΔEFG , alors les deux triangles sont isométriques.
☐ **Axiome C-A-C (côté-angle-côté)**
Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG . Si les longueurs de deux côtés et de la mesure de l'angle adjacent à ces deux côtés sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.
☐ **Axiome A-C-A (angle-côté-angle)**

Soit deux triangles ΔABC et ΔEFG. Si la longueur d'un côté et la mesure de ses deux angles adjacents sont égales dans les deux triangles, alors les deux triangles sont isométriques.

Remarque: les situations suivantes ne permettent pas dans tous les cas d'affirmer que les triangles sont isométriques:

- ☐ A-A-A (dans ce cas, les triangles ne sont « que » semblables)
- ☐ C-A-C avec un des deux côtés non adjacent à l'angle

6 [Aller plus loin] Boîte à outils +

Théorème « Triangle isocèle » [démontré!]

ΔABC est isocèle avec $\overline{AB} = \overline{AC}$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$

Théorème « Triangle équilatéral » [démontré!]

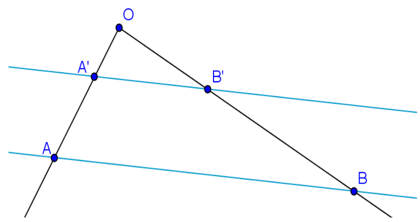
ΔABC est équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux à 60°.

Théorème « Réciproque du théorème de Thalès » [démontré!]

Si $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$

dans la situation ci-contre :

alors $[AB] \| [A'B']$.

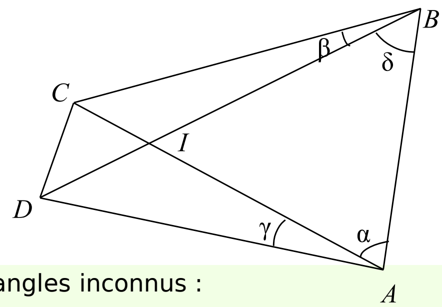


Théorème « Réciproque du théorème de Pythagore » [démontré]

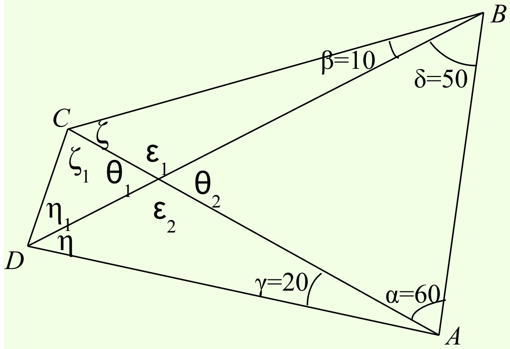
Si dans un triangle ΔABC on a $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ (ou $c^2 + b^2 = a^2$), alors le triangle ΔABC est rectangle en A.

7 [A savoir] Justifier les calculs

Exemple : on a α=60°, γ=20°, δ=50° et β=10°.
Déterminer les angles en justifiant précisément chaque calcul :
$\widehat{BIC}$, $\widehat{BCI}$, $\widehat{CIB}$, $\widehat{AID}$, $\widehat{IDA}$, $\widehat{DIC}$



Identifions les angles connus et nommons les angles inconnus :



- α=60°, γ=20°, δ=50° et β=10° [par hypothèse.]
- θ_2=180–50-60 =70° [par Thm «ΣαΔ=180»]
- θ_1=θ_2=70° [par Thm «α opp »]
- ε_1=180-70=110° [car «α suppl»]
- ε_2=180-70=110° [car «α suppl»]
- ζ=180–110–10 = 60° [par Thm «ΣαΔ=180»]
- η=180–110–20 = 50° [par Thm «ΣαΔ=180»]

Restent à trouver η_1 et ζ_1 ...

- $\alpha=\beta+\delta=\zeta=60°$ donc $\Delta\, CAB$ est équilatéral [par Thm «équilatéral»]
  donc $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}$ [par Déf de «Δ équilatéral »]
- $\delta=\eta=50°$ donc $\Delta\, ABD$ est isocèle en A [par Thm «Δ isocèle»]
  donc $\overline{AD}=\overline{AB}$ [par Déf de «Δ isocèle»], et donc $\overline{AD}=\overline{AC}$
- on en déduit que $\Delta\, ACD$ est isocèle [par Déf de «Δ isocèle»]
  et donc que $\zeta_1=\eta_1+\eta$ [par Thm «Δ isocèle»]
- par ailleurs, $\zeta_1+(\eta_1+\eta)=180-\gamma=180-20=160°$ [par Thm «ΣαΔ=180»]
- donc $\zeta_1=\eta_1+\eta=80°$ [car deux angles égaux dont la somme vaut 160° valent 80°]
- et enfin : $\eta_1=80-\eta=80-50=30°$

Voir les exercices 4 à 14

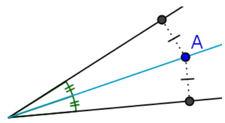
8 [A savoir] Droites remarquables du triangle

Définition « Bissectrice »

La **bissectrice d'un angle** est la droite qui partage cet angle en deux angles égaux.

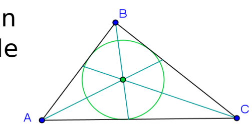
Théorème

Un point A appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est à égale distance des deux demi-droites qui forment l'angle.



Théorème « Bissectrices »

Si $\Delta\, ABC$ est un triangle, alors ses bissectrices se coupent en un unique point. Ce point est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle $\Delta\, ABC$.

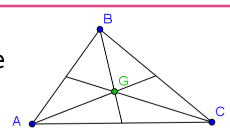


Définition « Médianes »

Les **médianes d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé en son milieu.

Théorème « Médianes »

Si $\Delta\, ABC$ est un triangle, alors ses médianes se coupent en un unique point. Ce point est le **centre de gravité** du triangle $\Delta\, ABC$.

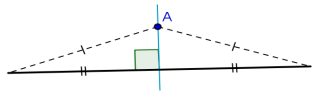


Définition « Médiatrice »

La **médiatrice d'un segment** $[AB]$ est la droite qui coupe ce segment perpendiculairement en son milieu.

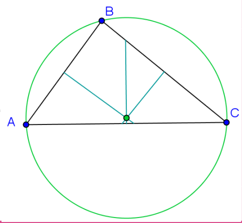
Théorème « Médiatrice »

Un point A appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si A est à égale distance des deux extrémités du segment.



Théorème « Médiatrices d'un triangle »

Si ΔABC est un triangle, alors ses médiatrices se coupent en un unique point. Ce point est le centre du **cercle circonscrit** au triangle ΔABC.



Définition « Hauteur »

Les **hauteurs d'un triangle** sont les droites qui passent par un sommet et qui coupent le côté opposé perpendiculairement.

Théorème « Hauteurs d'un triangle »

Si ΔABC est un triangle, alors ses hauteurs se coupent en un unique point. Il est appelé **orthocentre**.

9 [Aller plus loin] Droite d'Euler

Théorème

Si ΔABC est un triangle non équilatéral, alors l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont alignés et non confondus.

Définition « Droite d'Euler »

Si ΔABC est un triangle non équilatéral, la droite qui passe par l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit s'appelle la **droite d'Euler**.

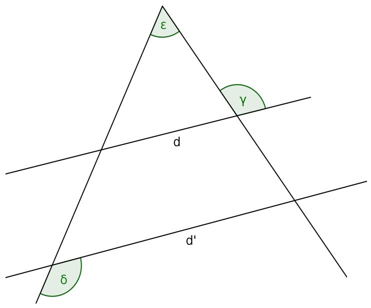
Leonhard Euler, né en 1707 à Bâle (Suisse) et mort à 76 ans à Saint-Pétersbourg, est un mathématicien et physicien suisse qui passa la plus grande partie de sa vie dans l'Empire russe et en Allemagne. Il était notamment membre de l'Académie royale des sciences de Prusse à Berlin. Euler fit d'importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l'analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Euler est considéré comme un éminent mathématicien du XVIIIe siècle et l'un des plus grands et des plus prolifiques de tous les temps. Une déclaration attribuée à Pierre-Simon de Laplace exprime l'influence d'Euler sur les mathématiques : « Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous». Il était un fervent chrétien, croyant en l'inerrance biblique, et s'opposa avec force aux athées éminents de son temps.

Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

Voir les exercices 15 à 24

Justifier, démontrer

1 On suppose que d et d' sont parallèles, que $\gamma = 110°$ et que $\delta = 130°$.



Déterminer ε en justifiant précisément chaque étape à l'aide des outils disponibles.

2 Soient d_1 et d_2 deux droites perpendiculaires. Démontrer que si la droite d_3 est parallèle à d_1, alors d_3 est perpendiculaire à d_2.

3 Soient d_1 et d_2 deux droites perpendiculaires. Démontrer que si la droite d_3 est perpendiculaire à d_1 (et différente de d_2), alors d_3 est parallèle à d_2.

Voir la théorie 1 à 4

Triangles isométriques

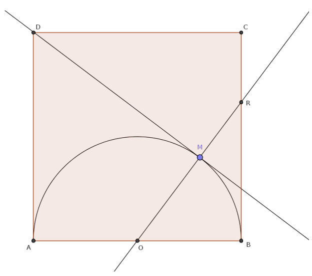
4 Dans les situations suivantes, dire si on peut conclure que les triangles sont isométriques ; si oui, identifier le cas d'isométrie concerné et identifier les données isométriques :

a. Deux triangles rectangles ΔABC et ΔEFD tels que $\overline{AB} = \overline{DE} = 5$ $\widehat{CAB} = \widehat{DEF} = 65°$.

b. Deux triangles ΔABC et ΔEDF tels que $\overline{AC} = \overline{EF} = 5$, $\overline{BC} = \overline{DF} = 6{,}4$ et $\widehat{ABC} = \widehat{EDF} = 59°$.

c. Deux triangles ΔABC et ΔEFD tels que $\overline{AC} = \overline{EF} = 4$, $\widehat{CBA} = \widehat{DEF} = 62°$ et $\widehat{CAB} = \widehat{FDE} = 59°$.

5 $ABCD$ est un carré, d_{DM} est tangente au cercle Γ de centre O et de diamètre $[AB]$.



a. Démontrer que les triangles ΔOAD et ΔOMD sont isométriques.

b. Démontrer que les triangles ΔDMR et ΔDCR sont isométriques.

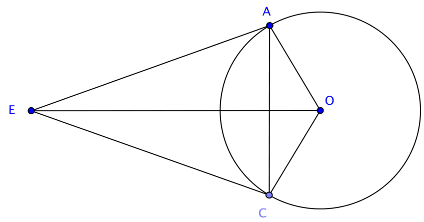
c. En déduire la nature du triangle ΔCMR.

6 Démontrer la réciproque du théorème de Pythagore.

7 Définir précisément les notions de carré, rectangle, losange et parallélogramme, puis énoncer et démontrer les propriétés particulières de chacun.

8 $LOSA$ est un parallélogramme tel que : $\overline{LO} = 58mm$; $\overline{LS} = 80mm$ et $\overline{OA} = 84mm$. Démontrer que $LOSA$ est un losange.

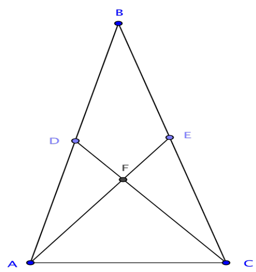
9 $\Delta\ AEC$ est isocèle en E ; O est le centre du cercle et A et C des points du cercle.



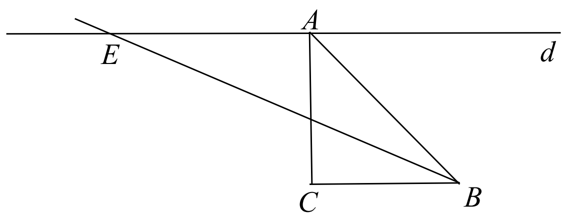
Que peut-on conjecturer à propos des triangles $\Delta\ OAE$ et $\Delta\ OEC$?

10 On a $\overline{AE} = \overline{CD} = \overline{DB} = \overline{EB}$.

Que peut-on dire de $\overline{AD}$ et de $\overline{CE}$?

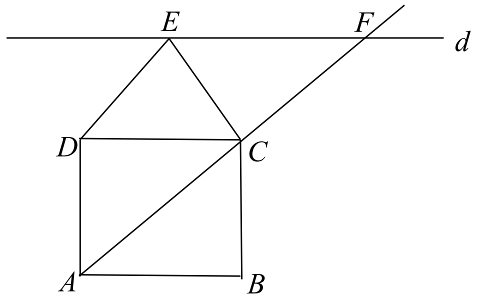


11 $\Delta\ ACB$ est un triangle rectangle et isocèle en C, la droite d passant par A est parallèle à $[BC]$ et la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe la droite d en E.



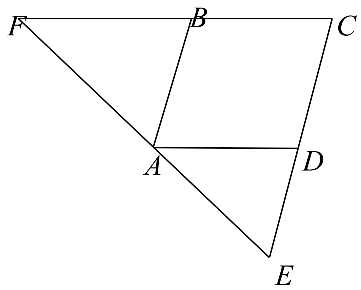
Que peut-on conjecturer à propos du $\Delta\ ABE$? Justifier précisément.

12 $ABCD$ est un carré $\Delta\ CDE$ est un triangle équilatéral, la droite d passant par E est parallèle à $[DC]$, la droite d_{AC} coupe d en F :



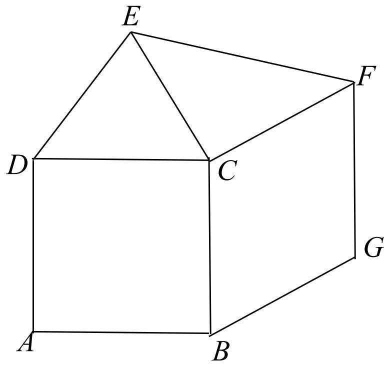
Déterminer en justifiant précisément les calculs les angles du $\Delta\, CEF$.

13 $ADCB$ est un parallélogramme, $\Delta\, AED$ est un triangle isocèle de sommet A, les droites d_{BC} et d_{AE} se coupent en F et $\widehat{ABC} = 110°$:



Que peut-on conjecturer à propos du triangle $\Delta\, ABF$? Justifier.

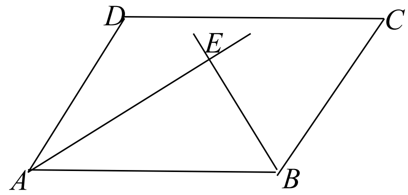
14 $ABCD$ est un carré, $\Delta\, CDE$ est un triangle équilatéral, $\Delta\, CEF$ est un triangle isocèle et rectangle en C, $BCFG$ est un parallélogramme.



Que peut-on conjecturer à propos de $BGFC$? Justifier.

Voir la théorie 5 à 7

15 $ABCD$ est un parallélogramme, d_{AE} est la bissectrice de $\widehat{BAD}$ et d_{BE} est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, $\widehat{CDA} = 110°$.



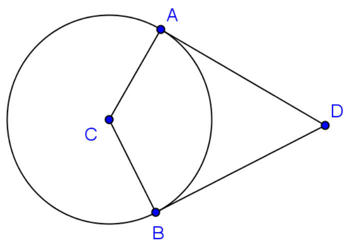
a. Déterminer en justifiant précisément les calculs les angles du $\Delta\, ABE$.

b. Que peut-on conjecturer à propos du triangle $\Delta\, ABE$? Justifier.

c. Ce résultat est-il vrai pour d'autres valeurs de $\widehat{CDA}$?

16 Deux droites parallèles coupent un cercle de centre O respectivement en A et B, en A' et B'. On appelle I le point d'intersection des droites $d_{AA'}$ et $d_{BB'}$. Démontrer que la droite IO est perpendiculaire à la droite d_{AB}.

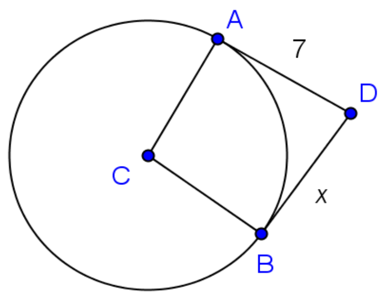
17 Soit Γ le cercle de centre C et les points A et B du cercle. $[AD]$ et $[BD]$ sont deux segments tangents au cercle Γ issus de D.



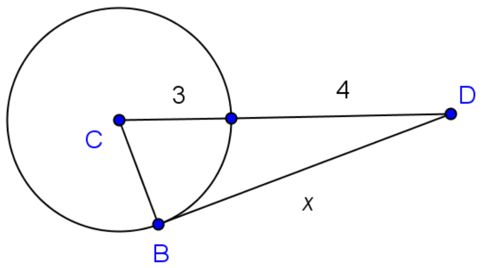
Calculer l'angle $\widehat{ACB}$ sachant que $\widehat{ADB} = 35°$.

18 $[AD]$ et/ou $[BD]$ sont deux segments tangents au cercle Γ issus de D. Calculer la longueur de x.

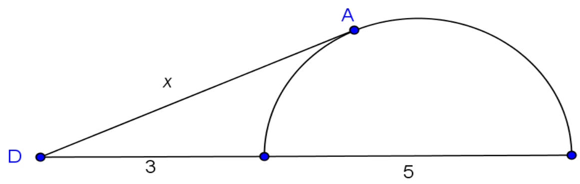
a.



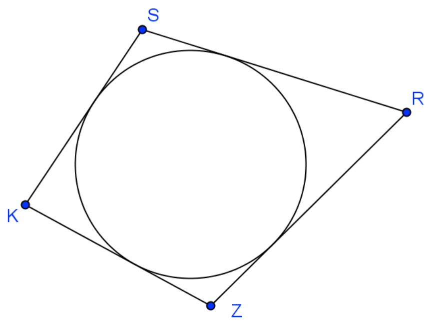
b.



c.



d. $\overline{KS}=24$, $\overline{SR}=14$, $\overline{RZ}=4$, $\overline{KZ}=x$



19 On recherche un triangle qui possède deux bissectrices intérieures perpendiculaires. Peut-on le trouver ?

20 $OEIL$ est un parallélogramme. Soit C le point d'intersection de la perpendiculaire à d_{OL} passant par E et de la perpendiculaire à d_{EL} passant par O.

a. Quelle est la nature du triangle ΔCIL ?

b. Que représente le point C pour le triangle ΔOLE ?

c. Que dire alors des droites d_{OE} et d_{CL} ?

d. Rédiger maintenant une démonstration de la conjecture émise en a).

21 Deux cercles de diamètres $[AB]$ et $[AD]$ $(D \notin d_{AB})$ se recoupent en E.

Que peut-on dire des points B, E et D ? Justifier.

22 Soit ΔABC est un triangle et Γ son cercle circonscrit.

a. Enoncer une conjecture concernant le lieu où la bissectrice intérieure issue de A coupe la médiatrice de $[BC]$.

Pour démontrer cette conjecture, appelons I l'intersection de cette bissectrice avec le cercle circonscrit ($I \neq A$), $\alpha_1 = \widehat{BAI}$ et $\alpha_2 = \widehat{CAI}$
Nous allons démontrer que I est aussi sur la médiatrice de $[BC]$:

b. Que dire de α_1 et α_2 ?

c. Considérons le triangle ΔBCI : comparer les angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{CBI}$.

d. Que peut-on en déduire concernant le triangle ΔBCI ?

e. Pourquoi le point I se trouve-t-il sur la médiatrice du segment $[BC]$?

f. Utiliser ce qui précède pour rédiger une démonstration de la conjecture émise en a).

23 ΔABC est un triangle quelconque d'orthocentre H, P est le pied de la hauteur d_{AH} (c'est-à-dire l'intersection de d_{AH} avec d_{BC}), C est le cercle circonscrit à ΔABC et O est le centre de ce cercle.

a. Que peut-on dire des angles $\widehat{BAP}$ et $\widehat{OAC}$? Justifier.

b. Où se trouve le symétrique de H (appelons-le H') par rapport à d_{BC}?

24 On considère le triangle ΔABC de sommets $A(4;\ 0)$, $B(8;\ 6)$ et $C(-1;\ 2)$.

Déterminer :

a. l'équation de chacune des droites portant les côtés du triangle ΔABC.

b. l'équation de la hauteur issue du sommet C.

c. l'équation de la médiane issue du sommet B.

d. l'équation de la médiatrice du côté $[BC]$.

e. L'aire du triangle ΔABC

Voir la théorie 8 à 9

Exercices d'approfondissement

1 *Euclide et les Éléments*

Avec Euclide la géométrie entre dans une nouvelle ère. Les nombreux résultats géométriques accumulés au cours des siècles antérieurs au IVe siècle ont exigé une structuration, une présentation rigoureuse afin de montrer les liens qui pouvaient les unir. On assiste, avec Euclide, à la première tentative d'organisation rationnelle d'un savoir, à la première tentative d'axiomatisation.

a. *Le personnage historique*

La personnalité d'Euclide nous est pratiquement inconnue. Quelques renseignements nous sont fournis par les *Commentaires* de Proclus, texte déjà cité et qui sert de référence historique :

Proclus (412-485)

Euclide n'est pas beaucoup plus jeune que ceux-là : en rassemblant les Éléments, il mit en ordre bon nombre de résultats d'Eudoxe et perfectionna beaucoup de ceux de Théétète, et de plus il éleva au niveau de démonstrations irréfutables ceux dont ses prédécesseurs n'avaient rendu compte que de façon assez relâchée. Cet homme vécut sous le premier Ptolémée : car Archimède, qui suivit de près le premier < Ptolémée > mentionne Euclide, et, notons-le, on raconte qu'un jour Ptolémée lui demanda s'il y avait pour la Géométrie un chemin plus court que l'ordre des Éléments : et lui de répondre qu'il n'y a pas, vers la Géométrie, de voie directe réservée aux rois. Il est donc plus jeune que les disciples de Platon, mais plus vieux qu'Ératosthène et Archimède. Ceux-ci sont en effet contemporains, comme le dit quelque part Ératosthène.

Proclus (412-485)

Commentaires au livre I des Éléments d'Euclide, in : Les Éléments, vol. 1, pp. 89-92)

Euclide naît vers -325 et meurt vers -265. Il part en Égypte pour y enseigner les mathématiques. Il travaille au musée d'Alexandrie et à l'école de mathématiques. Entouré de ses disciples, il mène de nombreux travaux de recherche.

b. La principale œuvre d'Euclide à pour titre « Éléments ». Plusieurs auteurs, avant Euclide ont rédigé des Éléments. Ce titre générique signifie qu'il s'agit d'un ouvrage dont la rédaction a le souci d'une organisation logique rigoureuse, d'une présentation structurée des connaissances accumulées dans un domaine des mathématiques précis. Les *Éléments* d'Euclide représentent un aboutissement dans ce type de démarche. L'ouvrage a ainsi servi de référence quasi absolue; il a été, au cours des siècles, copié, commenté, voire modifié et complété, mais jamais recomposé avant que le grand mathématicien David Hilbert ne fasse paraître, en 1899, ses propres « *Grundlagen der Geometrie* ».

c. *Les Axiomes ou Notions communes*

Euclide, dans son organisation, s'inspirant des travaux d'Aristote, commence par présenter les axiomes ou notions communes, qui sont au nombre de 9. Il s'agit d'affirmations non démontrées réglant la logique d'un discours déductif. Ces affirmations sont si évidentes qu'elles s'imposent d'elles-mêmes. De plus elles s'appliquent à toutes les formes de discours logique et ne sont pas spécifiques à une science particulière, sauf peut-être la notion commune 9 qui explicite que le domaine étudié est celui de la géométrie plane. En effet sur une sphère, par exemple, deux méridiens englobent bien une aire.

N.C.1 Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.

N.C.2 Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.

N.C.3 Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.

N.C.4 Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.

N.C.5 Et les doubles du même sont égaux entre eux.

N.C.6 Et les moitiés du même sont égales entre elles.

N.C.7 Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.

N.C.8 Et le tout est plus grand que la partie.

N.C.9 Et deux droites ne contiennent pas une aire.

On peut essayer de traduire dans notre langage algébrique actuel ces notions ...

d. *Les Postulats ou Demandes*

Aristote distingue les axiomes et les postulats dans le sens où les postulats sont spécifiques au domaine étudié. La géométrie euclidienne en distingue 5:

Dem.1 Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.

Ce postulat assure l'existence d'une droite passant par deux points.

Dem.2 Et de prolonger continûment en ligne *droite une ligne droite limitée.*

La droite est donc conçue comme un segment que l'on peut prolonger indéfiniment.

Dem.3 Et de décrire un cercle à partir de tout centre et au moyen de tout intervalle.

Ce postulat garantit l'existence d'un cercle construit à partir de tout point et à l'aide de tout segment.

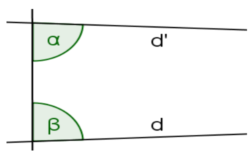
Dem.4 Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.

Euclide se donne, par cette demande, une unité de mesure pour les angles, l'angle droit.

Dem.5 Et que, si une droite tombant sur deux droites fait des angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

On constate que la cinquième demande présente un caractère formel beaucoup moins « naturel » que celui des autres demandes. Elle répond, de ce fait, moins à l'exigence aristotélicienne d'une affirmation qui s'impose par sa simplicité et son immédiateté. Elle s'illustre de la manière suivante:

si $\alpha+\beta$ *< deux droits, alors* d *et* d' *se coupent du côté où sont les angles* α et β



e. *Les Définitions du Livre I*

Euclide fait suivre les notions communes et les demandes de définitions. Le Livre I en compte vingt-trois. Nous citerons quelques unes de ces vingt-trois définitions.

Df.1 Un point est ce qui n'a pas de partie.

Df.2 Une ligne est une longueur sans largeur.

Df.3 Les extrémités des lignes sont des points

Ainsi une ligne n'est-elle que potentiellement infinie. C'est pourquoi lorsque Euclide parle de « droite », il faut comprendre « segment ».

Df.5 Une surface est ce qui a seulement une longueur et une largeur.

Df.6 Les extrémités d'une surface sont des lignes.

Df.10 Et quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit, et la droite qui a été élevée est appelée perpendiculaire à celle sur laquelle elle a été élevée.

En définissant la notion de perpendicularité, Euclide se donne, conjointement à la demande 4, une mesure absolue des angles : l'angle droit.

Df.15 Un cercle est une figure plane contenue par une ligne unique < celle appelée circonférence > par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont < jusqu'à la circonférence du cercle > égales entre elles.

Df.16 Et le point est appelé centre du cercle.

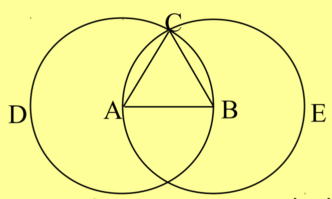
Df.17 Et un diamètre du cercle est n'importe quelle droite menée par le centre, limitée de chaque côté par la circonférence du cercle, laquelle coupe le cercle en deux parties égales.

Df.23 Des droites parallèles sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre.

f. *Un exemple*

L'objectif d'Euclide est d'utiliser ses seuls axiomes, postulats et définitions, pour démontrer un certain nombre de propositions et établir ainsi les éléments d'une construction intellectuelle. Nous allons suivre Euclide dans une de ses propositions (il s'agit de] construire un triangle équilatéra), mais nous verrons que la lourdeur du style comme de l'argumentation euclidienne nous ferons regretter le formalisme actuel !

Soit *AB* une droite limitée donnée *[pour nous il s'agit d'un segment]*



Que du centre *A* et au moyen de l'intervalle *AB* soit décrit le cercle *BCD* (Dem. 3), et qu'ensuite du centre *B*, et au moyen de l'intervalle *BA*, soit décrit le cercle *ACE* (Dem. 3), et que du point *C* auquel les cercles s'entrecoupent soient jointes les droites *CA*, *CB* jusqu'aux points *A*, *B* (Dem. 1).

Et puisque le point *A* est le centre du cercle *CDB*, *AC* est égale à *AB* (Df. 15) ; ensuite, puisque le point *B* est le centre du cercle *CAE*, *BC* est égale à *BA* (Df. 15). Et il a été démontré que *CA* est égale à *AB* ; donc chacune des droites *CA*, *CB* est égale à *AB* ; or les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles (NC. 1) ; et donc *CA* est égale à *CB* ; donc les trois droites *CA*, *AB*, *BC* sont égales entre elles.

Donc le triangle *ABC* est équilatéral (Df. 20) et il est construit sur la droite limitée donnée *AB*.

Donc, sur une droite limitée donnée, un triangle équilatéral est construit. Ce qu'il fallait faire.

Les Éléments, T. 1, pp. 194-95

i A quoi font référence les (Dem.1), (Dem.3), (DF.15), ... ?

ii Faire une analyse du texte ci-dessous afin d'en dégager le déroulement du discours argumentatif. Exprimer le résultat démontré de façon « moderne ».

g. Les Éléments sont une compilation du savoir géométrique et resteront le noyau de l'enseignement mathématique pendant près de 2000 ans. Il se peut qu'aucun des résultats contenus dans les Éléments ne soit d'Euclide, mais l'organisation de la matière et son exposé lui sont dus. Les Éléments sont divisés en treize livres. Les livres 1 à 6 traitent de géométrie plane, les livres 7 à 9, de théorie des rapports, le livre 10, de la théorie de nombres irrationnels d'Eudoxe, et enfin les livres 11 à 13, de géométrie dans l'espace. Le livre se termine par l'étude des propriétés des cinq polyèdres réguliers et une démonstration de leur existence. Les Éléments sont remarquables par la clarté avec laquelle les théorèmes sont énoncés et démontrés.

Plus d'un millier d'éditions manuscrites des Éléments ont été publiées avant la première version imprimée en 1482. La rigueur n'y est pas toujours à la hauteur des canons actuels, mais la méthode consistant à partir d'axiomes, de postulats et de définitions, pour déduire un maximum de propriétés des objets considérés, le tout dans un ensemble organisé, était nouvelle pour l'époque. Les Éléments durent leur succès à leur supériorité d'organisation, de systématisation et de logique mais pas d'exhaustivité (ni conique, ni résolution par inclinaison ou ajustement). Les dernières recherches entreprises en histoire des mathématiques tendent à prouver qu'Euclide n'est pas le seul auteur des Éléments. Il était vraisemblablement entouré d'un collège de disciples ayant tous participé à leur élaboration.

h. La géométrie telle qu'elle est définie par Euclide dans ce texte fut considérée pendant des siècles comme la géométrie et il fut difficile de lui ôter cette suprématie ; Nicolaï Ivanovitch Lobatchevsky fut le premier à s'y essayer officiellement dès 1826, suivi de János Bolyai, mais la légende veut qu'il n'ait pas été pris au sérieux jusqu'à la mort de Gauss, lorsque l'on découvrit parmi les brouillons de ce dernier qu'il avait lui aussi imaginé des géométries non euclidiennes...

Sur les Éléments d'Euclide :

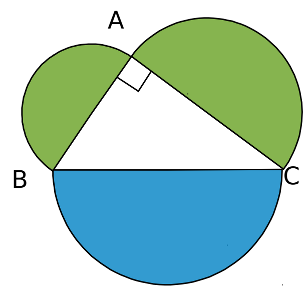
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch2-les-elements

Sur les géométries non euclidiennes :

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch2-geo-non-euclidienne

2 Les lunules d'Hippocrate

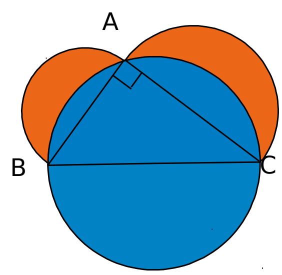
$\Delta\, ABC$ est un triangle rectangle en A. On a construit les demi-cercles de diamètres $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ comme le montre la figure ci-dessous :



a. Exprimer l'aire totale de la figure en fonction de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$.

b. Montrer que l'aire du demi-disque bleu est égale à la somme des aires des demi-disques verts. En déduire que l'aire totale de la figure est égale à la somme des aires du triangle $\Delta\, ABC$ et du disque de diamètre $[BC]$.

c. Montrer que l'aire des lunules (les parties en orange ci-dessous) est égale à l'aire du triangle $\Delta\, ABC$.



« Les amis sont des compagnons de voyage,
qui nous aident à avancer sur le chemin d'une vie plus heureuse. »

Pythagore, philosophe, mathématicien et scientifique grec (580-495 av JC)

A savoir en fin de chapitre

Justifier, démontrer

- ✔ la boîte à outils de base pour démontrer ;
- ✔ calculer en pouvant justifier les étapes en s'appuyant sur les éléments de la boîte à outils ;
- ✔ conjecturer à partir de figures ou d'énoncés géométriques ;
- ✔ démontrer en justifiant les étapes, en s'appuyant sur les éléments de la boîte à outils ;

Voir la théorie 1 à 4 et les exercices 1 à 3

Triangles isométriques

- ✔ triangles isométriques ;
- ✔ axiomes « cas d'isométrie C-C-C, C-A-C et A-C-A »;
- ✔ les autres « cas » ne suffisent pas à déterminer l'isométrie des deux triangles ;
- ✔ démonstrations de nouveaux théorèmes pour enrichir la boîte à outils

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 4 à 14

Droites remarquables du triangle

- ✔ droites remarquables du triangle : bissectrices, médiatrices, hauteurs, médianes ;
- ✔ cercles inscrit et circonscrit ;
- ✔ explorer des situations géométriques, conjecturer, démontrer.

Voir la théorie 8 à 9 et les exercices 15 à 24

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch02

Notes personnelles