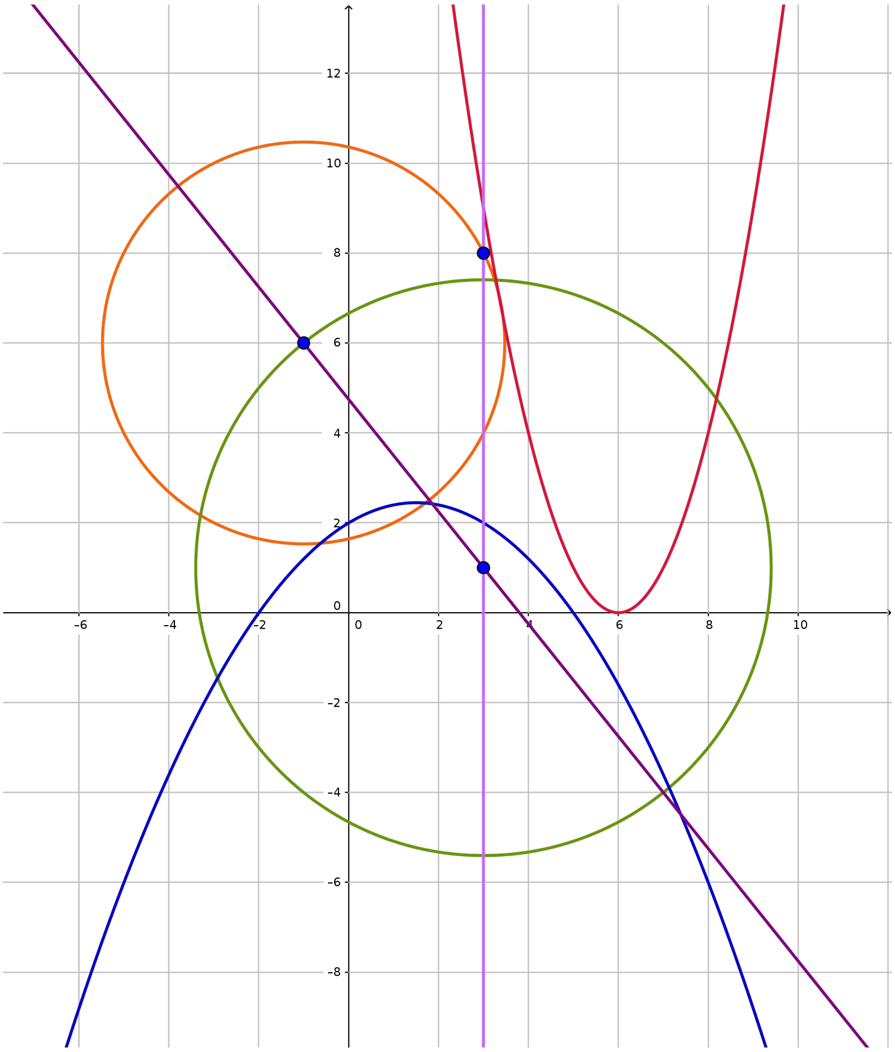
Chapitre 01 - Equations cartésiennes



Problème

On dépose deux sphères identiques à l'intérieur d'un cube de 1 dm d'arête.
Quel est le rayon maximum possible de ces sphères ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] Expressions et équations

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre en donnant les réponses sous forme exacte simplifiée au maximum, sans exposant négatif ou fractionnaire, sans racine au dénominateur et avec des racines simplifiées au maximum, ainsi que les valeurs approchées au centième lorsque cela est pertinent :

a. $3\cdot\frac{x}{6}-\frac{-4x+2}{8}=\frac{x}{2}-7\frac{x}{12}$

b. $x^2-2(x+x^2)=-x(x+2)$

c. $x^2-2(x+x^2)=-x(x+2)+1$

d. $x^2=-x^2+36$

e. $-16=2x^2-12x$

f. $-x^2+x-1=0$

g. $x^2+x=1$

h. $-3x^2+54=0$

2. Factoriser le plus possible lorsque cela est possible :

a. $-2x^2+8x$

b. $2x^2-8x+6$

c. $2x^2-3x-5$

d. $2x^2-3x+5$

2 [Souvenirs] Algèbre et géométrie

1. Déterminer l'équation de la droite d :

a. parallèle à l'axe Ox et qui contient le point (-12;0,2) ;

b. parallèle à l'axe Oy et qui contient le point (-12;0,2) ;

c. de pente -2 et qui contient le point (-4;7) ;

d. oblique qui contient les points (-2;3) et (5;-1) ;

e. qui contient le point (2;3) et qui est parallèle à la droite *d*' d'équation $2x+y=1$;

f. qui contient le point (2;3) et qui est perpendiculaire à la droite *d*' d'équation $y=0{,}5x+\frac{5}{4}$.

g. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des droites obtenues en c. et en d.

2. Représenter graphiquement les fonctions f définies par :

a. $f(x)=-2x^2+8x$

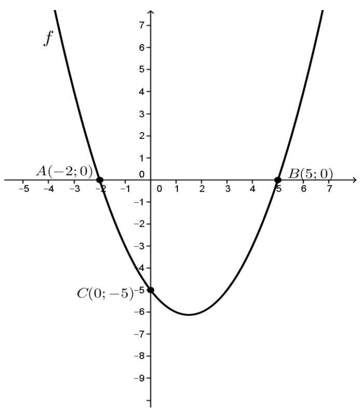
b. $f(x)=2x^2-8x+6$

c. $f(x)=2x^2-3x-5$

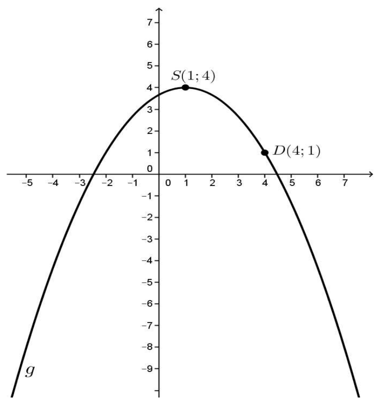
d. $f(x)=2x^2-3x+5$

3. On donne ci-contre des représentations graphiques de deux fonctions f et g de degré 2.

Déterminer les trois expressions algébriques (développée, canonique ou factorisée) de f et g.



La courbe représentative de f contient les points A, B et C.



Le point S est le sommet de la parabole. Le point D appartient à la courbe représentative de g.

3 [Souvenirs] Problème

Le propriétaire d'un verger de pommiers a calculé que s'il plante 48 arbres sur son terrain, chaque arbre produit 600 pommes par année. De plus, il estime que chaque fois qu'il plante un arbre supplémentaire sur son terrain, la production de chaque arbre diminue de 6 pommes.

a. Montrer que le nombre total de pommes récoltées par année R en fonction du nombre d'arbres supplémentaires x est : $R(x) = -6x^2 + 312x + 28800$

b. Combien faut-il planter d'arbres supplémentaires pour récolter le plus de pommes possible ?

c. Quel est alors le nombre maximal de pommes récoltées par an ?

d. Interpréter graphiquement.

Voir la théorie 1 à 7 et les exercices 1 à 7

4 [Activité] Équations de cercles

1. Déterminer l'**équation du cercle** Γ de centre $C(0;0)$ et de rayon r ?

2. Déterminer l'équation générale d'un cercle Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r ?

3. Déterminer l'équation du cercle Γ de centre $C(2;-4)$ et tangent à l'axe des ordonnées. Donner 5 points qui appartiennent à ce cercle.

4. Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles suivants :

a. $\Gamma_1 : x^2+y^2-64=0$

b. $\Gamma_2 : x^2+y^2+2=0$

c. $\Gamma_3 : x^2+y^2+4x-2y-4=0$

d. $\Gamma_4 : 2x^2+2y^2-2x+10y+11=0$

5. Déterminer les points de coordonnées $(x;x)$ qui sont à une distance 3 du point $P(-2;1)$.

6. Déterminer l'équation du cercle qui passe par les points $A(1; -1)$, $B(1; 0)$ et $D(-2; 2)$.

Voir la théorie 8 et les exercices 8 à 17

5 [Activité] Intersections et tangentes

1. Déterminer algébriquement les points d'intersection entre le cercle $\Gamma : x^2 + (y + 2)^2 = 25$ et la droite $d : x - 2y + 1 = 0$, puis interpréter graphiquement.

2. Représenter les cercles $\Gamma_1 : (x + 1)^2 + y^2 = 4$ et $\Gamma_2 : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 20$ et estimer les coordonnées des points d'intersection, puis déterminer algébriquement ces points d'intersection.

3. Déterminer l'équation de la droite passant par $A(1;3)$ et tangente à la parabole P d'équation $y = 4x^2 - 8x + 7$. Idem ensuite avec le point $B(-1;1)$.

6 [Aller plus loin] Plus compliqué ...

Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ de centre $C(1; -1)$ et de rayon 3 et qui passent par le point $P(5; 0)$.

Voir la théorie 9 et 10 et les exercices 18 à 26

1 [Souvenirs] Équations à plusieurs inconnues

Définitions

Une **équation à n inconnues** est une égalité entre deux expressions algébriques (le membre de gauche et le membre de droite) qui comprend n variables.

Dans notre contexte, il sera implicite, si cela n'est pas précisé autrement, que les variables, qu'on note le plus souvent par les lettres x, y, z, t, ..., représentent des nombres réels.

Exemples

- $xyz = 9$ est une équation à trois inconnues x, y et z .
- $2x^5 + 5y = 3x - 6$ est une équation à deux inconnues x et y .

Définition

Soit une équation à deux inconnues x et y .
Une **solution d'une équation en x et y** est un couple de nombres $(a\ ;\ b)$, qui, lorsqu'on remplace x par le nombre a et y par le nombre b donne une égalité vraie.

Exemple : soit l'équation (*E*) : $2y - 2 = 3x - 1$; donner un couple qui soit solution de (*E*) et un couple qui ne soit pas solution de (*E*)

- Le couple (1 ; 2) est une solution de (*E*) puisque si $x = 1$ et $y = 2$, l'égalité $2 \cdot 2 - 2 = 3 \cdot 1 - 1$ est vraie.
- Le couple (3 ; 5) n'est pas une solution de (*E*) puisque $2 \cdot 5 - 2 \neq 3 \cdot 3 - 1$.

Remarque : il y a le plus souvent une infinité de couples solutions pour une telle équation.

2 [Souvenirs] Représenter graphiquement une équation

Soit Γ une courbe du plan et (*E*) une équation à deux inconnues x et y.
Si on a :

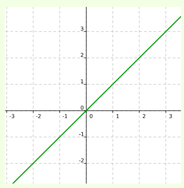
$$P(x_0\,;y_0) \in \Gamma \Leftrightarrow (x_0\,;y_0) \text{ est solution de } (E)$$

Autrement dit : le point P est sur la courbe Γ si et seulement si le couple de nombres $(x_0;y_0)$ est solution de l'équation (*E*)
On dit que (*E*) est une **équation** de Γ et que Γ est une **courbe représentative de (*E*)**.
Représenter graphiquement l'équation (*E*) consiste à représenter tous les couples du plan qui sont solution de (*E*).

Chaque fois qu'on a affaire à une équation à deux inconnues x et y, on peut donc essayer de la représenter graphiquement.

Exemple : soit l'équation (*E*) : $y - x = 0$; représenter graphiquement (*E*)

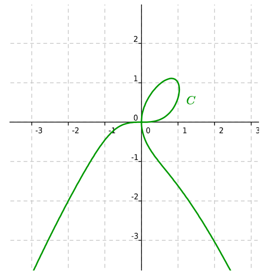
L'équation (*E*) est équivalente à $y = x$; donc tous les couples solution de (E) sont les couples dont les deux coordonnées sont égales.



Remarque : représenter graphiquement une équation peut être difficile ; on peut alors s'aider d'un logiciel comme GeoGebra.

Réciproquement, chaque fois qu'on considère une courbe représentative du plan – c'est-à-dire un sous-ensemble de points $(x;y)$ du plan, on peut essayer de déterminer une équation dont une représentation graphique donnerait cette courbe. Ceci est le plus souvent encore plus difficile !

Exemple : quelle pourrait bien être l'équation de la courbe ci-contre ?



Réponse (difficile, il faut nous croire !) :

l'équation de cette courbe est $x^4 - 2xy + y^3 = 0$

Il est très difficile de le démontrer, il faut nous croire !

Mais on peut par exemple vérifier que les points (0;0) et (1;1) sont bien des solutions ...

3 [Souvenirs] Équations $ax+by=c$ et droites du plan

Équation d'une droite

Soit d une droite du plan et E : $ax+by=c$ une équation à deux inconnues x et y (où a,b et c sont des constantes réelles).
Si tout point $(x;y)$ appartenant à d est solution de E et réciproquement toute solution $(x;y)$ de E appartient à d, on dit que $ax+by=c$ est <u>une</u> **équation cartésienne de d**.

Théorème (équation d'une droite verticale du plan)

Si $b=0$ (et $a\neq 0$), l'équation devient E : $ax=c$

☐ E peut alors aussi s'écrire $x=\dfrac{c}{a}$, ce qu'on écrit plutôt $x=k$ en renommant la constante ; sa courbe représentative est une **droite verticale** du plan ;

☐ réciproquement, si d est une droite verticale du plan, alors son équation est de la forme $x=c$

Théorème (équation d'une droite horizontale du plan)

Si $a=0$ (et $b\neq 0$), l'équation devient E : $by=c$

☐ E peut alors aussi s'écrire $y=\dfrac{c}{b}$, ce qu'on écrit plutôt $y=n$ en renommant la constante ; sa courbe représentative est une **droite horizontale** du plan ;

☐ réciproquement, si d est une droite horizontale du plan, alors son équation est de la forme $y=n$

Théorème (équation d'une droite oblique du plan)

Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$:

☐ E : $ax+by=c$ peut également s'écrire sous la forme $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$, ce qu'on écrit plutôt $y=mx+n$ en renommant les constantes ; sa courbe représentative est une **droite oblique** du plan de pente m et d'ordonnée à l'origine n ;

☐ réciproquement, si d est une droite oblique du plan, alors son équation est de la forme $y=mx+n$;
cette équation s'appelle l'**équation réduite** de d ; cette écriture est unique.

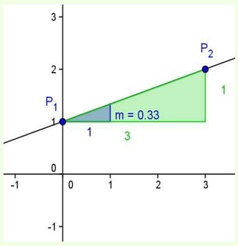
Remarque : les équations des droites verticales ne peuvent pas être écrites sous forme réduite.

Exemple 1 : représenter la droite d passant par les points $P_1(0\,;1)$ et $P_2(3\,;2)$ et donner son équation.

Sa pente est $m=\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}$ et son ordonnée à l'origine est 1 car elle passe par $P_1(0;1)$.

L'équation réduite de d est donc $y=\frac{1}{3}x+1$.

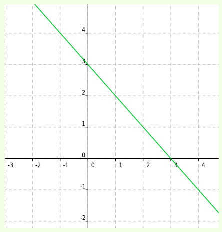
Une équation cartésienne est $-\frac{1}{3}x+y=1 \Leftrightarrow -x+3y=3$.



Exemple 2 : représenter l'équation $y + x = 3$

L'équation cartésienne $y+x=3$ est équivalente à l'équation réduite $y = -x+3$.

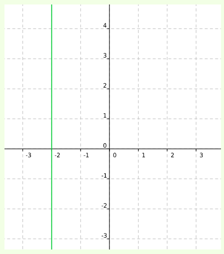
Elle est représentée par la droite oblique ci-dessous :



Exemple 3 : représenter l'équation 3 - x = 5

L'équation cartésienne 3 - x = 5 est équivalente à l'équation x = -2.
On représente tous les points $(x;y)$ du plan qui sont solution de cette équation ;

dans ce cas, il s'agit de tous les points dont la 1re coordonnée est égale à -2, soit une droite verticale !



4 [Souvenirs] Droites parallèles et perpendiculaires

Théorème (droites parallèles)

Deux droites de pentes m_1 et m_2 sont parallèles $\Leftrightarrow$ $m_1=m_2$

Théorème (droites perpendiculaires)

Deux droites de pentes m_1 et m_2 sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2=-1$

Exemple : déterminer la droite d passant par le point $A(2;5)$ et perpendiculaire à la droite d' d'équation $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$.

Comme d est perpendiculaire à d', elles ont des pentes inverses et opposées ;
celle de d' vaut $-\frac{1}{3}$, on en déduit que celle de d vaut 3, car $3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$.

d est donc d'équation $y=3x+b$; reste à trouver b ...

Comme $A(2;5)\in d$, on peut substituer dans l'équation : $5=3\cdot 2+b \Leftrightarrow b=5-6=-1$
L'équation de d est donc $y=3x-1$

5 [Souvenirs] Deuxième degré et paraboles

Théorème (deuxième degré)

☐ Une équation de la forme $y=ax^2+bx+c$, où les coefficients a, b et c sont des constantes réelles et $a\neq 0$, est représentée graphiquement par une **parabole** [on dit aussi : sa **courbe représentative** est une parabole].

☐ L'expression ax^2+bx+c est écrite sous **forme développée**.

☐ $y=ax^2+bx+c$ peut aussi toujours s'écrire sous la forme $y=a(x-k)^2+m$ où $k=-\frac{b}{2a}$ et $m=-\frac{b^2-4ac}{4a}$; on parle alors de **forme canonique**.

☐ La parabole admet un **axe de symétrie** d'équation $x=-\frac{b}{2a}$, un **sommet** au point $S(k\,;m)=S\left(-\frac{b}{2a}\,;-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; elle est **convexe** (de forme ∪) si $a>0$ et **concave** (de forme ∩) si $a<0$.

Théorème « Formule de Viète »

Soit ax^2+bx+c une expression du 2e degré. On appelle **discriminant** de l'expression le nombre $\Delta=b^2-4ac$. Alors on a :

☐ Si $\Delta>0$: l'expression ax^2+bx+c se factorise comme $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (on parle alors de la **forme factorisé**) et l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes : $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

☐ Si $\Delta=0$: l'expression ax^2+bx+c se factorise comme $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ (on parle alors également de la **forme factorisée**) et l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=-\frac{b}{2a}$

☐ Si $\Delta<0$: l'expression ax^2+bx+c ne peut pas être factorisée, il n'y a pas de forme factorisée et l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.

Exemple 1 : résoudre l'équation $2x^2+5x=-x^2+8$.

$$2x^2+5x=-x^2+8$$

$$\Leftrightarrow\quad 3x^2+5x-8=0 \quad\longleftarrow$$ On écrit l'équation sous la forme $ax^2+bx+c=0$.

Ici $a=3$, $b=5$, $c=-8$, donc $\Delta=b^2-4ac=5^2-4\cdot 3\cdot(-8)=121>0$

Cette équation a donc 2 solutions distinctes :

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{121}}{2\cdot 3}=\frac{-5\pm 11}{6}$$

Ce qu'on note ainsi : $x_1=\frac{-5+11}{6}=\frac{6}{6}=1$ et $x_2=\frac{-5-11}{6}=\frac{-16}{6}=-\frac{8}{3}$

Et donc l'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\frac{8}{3}\,;1\right\}$.

Remarque : on obtient également une factorisation de l'expression $3x^2+5x-8$:

$$3x^2+5x-8=3\left(x-\left(-\frac{8}{3}\right)\right)(x-1)=3\left(x+\frac{8}{3}\right)(x-1)=(3x+8)(x-1)$$

Exemple 2 : factoriser l'expression $4x^2-4x+1$.

Ici a = 4, b = –4, c= 1, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

Cette expression a donc un unique facteur (double) qui s'annule pour :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

et on peut factoriser : $4x^2-4x+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

Remarque : on a aussi résolu l'équation $4x^2-4x+1=0$: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Exemple 3 : résoudre l'équation $4x^2-4x+3=0$.

Ici a = 4, b = –4, c= 3, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$

Cette équation n'admet donc pas de solution : $S = \emptyset$

Remarque : on a aussi démontré que l'expression $4x^2-4x+3$ n'est pas factorisable.

Théorème « Cas particulier de l'équation $x^2 = a$ »

Les solutions de l'équation $x^2=a$ (pour $a \geqslant 0$) sont $x_1=+\sqrt{a}$ et $x_2=-\sqrt{a}$.

Exemple : résoudre l'équation $2x^2 = 36$.

$2x^2 = 36$

⇔ $x^2 = 18$ ⟵ On divise par 2 les deux membres

⇔ $x = \pm\sqrt{18}$ ⟵ On utilise le thm « Cas part. Degré 2 »

Donc $S = \{-\sqrt{18} ; \sqrt{18}\}$

Méthode « Résolution d'une équation de degré 2 par factorisation »

Exemple : résoudre l'équation $2x^2 - 3x = x^2 + x + 21$.

$2x^2 - 3x = x^2 + x + 21$

⇔ $x^2 - 4x - 21 = 0$ ⟵ On rend nul le membre de droite.

⇔ $(x + 3)(x - 7) = 0$ ⟵ On factorise le membre de gauche.

Par le **théorème du produit nul** vu en 1re année, on a :

$x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$

⇔ $x = -3$ ⇔ $x = 7$

Donc $S = \{-3 ; 7\}$

Remarque : on peut en guise de vérification tester les valeurs trouvées :

pour $x = -3$: $2(-3)^2 - 3(-3) = 27$ et $(-3)^2 + (-3) + 21 = 27$
pour $x = 7$: $2(7)^2 - 3(7) = 77$ et $(7)^2 + (7) + 21 = 77$

6 [Souvenirs] Représentation graphique d'une parabole

Méthode « Représenter graphiquement une parabole »

Pour représenter graphiquement une parabole, il faut déterminer, lorsque c'est possible, les informations suivantes :

- les intersections avec les axes
- l'axe de symétrie
- le sommet
- la forme convexe ou concave
- quelques points supplémentaires

Remarques : selon la forme sous laquelle la fonction est donnée, certaines informations peuvent être obtenues directement :

- la forme développée $y=ax^2+bx+c$ permet de lire immédiatement l'ordonnée à l'origine c ;
- la forme canonique $y=a(x-k)^2+m$ permet de lire immédiatement les coordonnées du sommet $S(k;m)$;
- la forme factorisée enfin, $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, qui n'existe que si $\Delta\geq 0$, permet de lire immédiatement les intersections de la parabole avec l'axe Ox, à savoir, les deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$ si $\Delta>0$ ou l'unique point $(x_0;0)$ si $\Delta=0$;
- les autres informations sont ensuite déterminées sans forcément passer par l'écriture des deux autres formes de la fonction.

Exemple 1 : soit $y = -2(x+4)(x-1)$. Donner, si c'est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

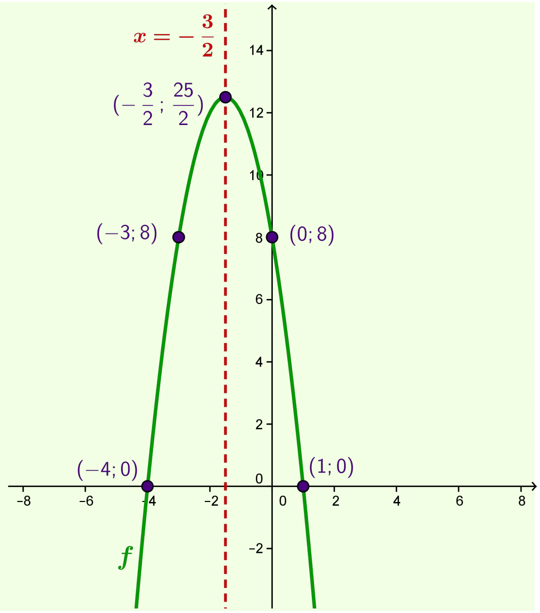
- y est sous forme factorisée, on obtient donc directement les points d'intersection de la parabole avec l'axe Ox : $(-4;0)$ et $(1;0)$.
- l'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale passant par le milieu de (-4;0) et (1;0) : $x=\frac{-4+1}{2} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$
- $x=-\frac{3}{2}$ est aussi l'abscisse du sommet ; on calcule l'ordonnée :

pour $x=\left(-\frac{3}{2}\right)$, on a : $y=-2\left(-\frac{3}{2}+4\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)=-2\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{2}$, donc $S\left(-\frac{3}{2};\frac{25}{2}\right)$

Remarque : pour ces deux derniers calculs, on peut aussi utiliser les formules $x=-\frac{b}{2a}$ et $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

- $a = -2 < 0$ donc la parabole est concave ($\cap$)
- pour $x=0$, on a : $y=-2(0+4)(0-1)=8$, donc le point d'intersection avec l'axe Oy est (0;8)
- de plus, le symétrique de (0;8) par rapport à l'axe de la parabole est (-3;8).

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :



Exemple 2 : soit $y=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4$. Donner, si cela est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

☐ y est sous forme canonique, on obtient donc directement les coordonnées du sommet de la parabole : $S\left(-\frac{3}{2};-4\right)$ et l'axe de symétrie : $x=-\frac{3}{2}$.

☐ on résout l'équation : $y=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1 \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{1}$

$\Leftrightarrow\quad x=\pm 1-\frac{3}{2}$ d'où les intersections avec l'axe Ox sont $-\frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{2}$

Remarque : pour résoudre cette équation, on aurait aussi pu développer puis utiliser la formule de Viète.

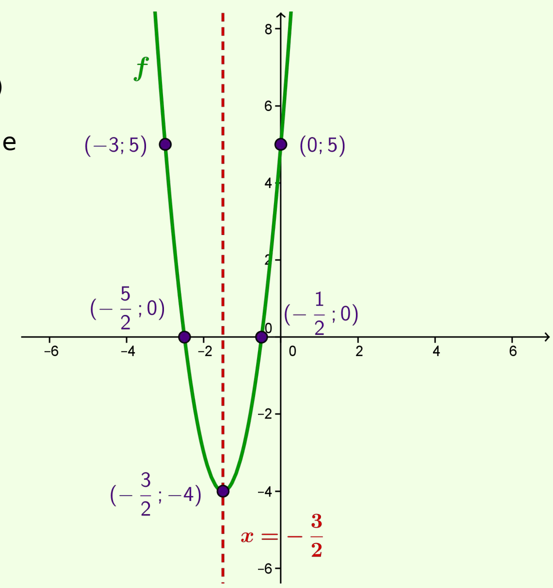
☐ pour $x=0$, on a :

$y=4\left(0+\frac{3}{2}\right)^2-4=4\cdot\frac{9}{4}-4=5$, donc le point d'intersection avec l'axe Oy est (0;5).

☐ a = 4 > 0 donc la parabole est convexe (∪)

☐ Le symétrique de (0;5) par rapport à l'axe de la parabole est (-3;5).

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :



7 [Souvenirs] Relation algèbre, géométrie ... et fonctions !

Si on a affaire à une équation à deux inconnues x et y, on peut essayer d'exprimer l'une des inconnues (en général y), en fonction de x. Si on y arrive, on a alors une écriture du type $y = f(x)$, ce qui devient équivalent à considérer une fonction !
Les équations du type $y = m$ représentées par les droites horizontales sont associables aux **fonctions de degré 0**, les équations du type $y = px + q$ représentées par les droites obliques aux **fonctions de degré 1** et les équations du type $y = ax^2 + bx + c$ représentées par les paraboles aux **fonctions de degré 2**. Les équations du type $x = k$ représentées par les droites verticales ne sont pas associables à des fonctions.

Exemple 1 :

L'équation $2x-y=1$ peut s'écrire $y=2x-1$. Considérer cette équation devient alors équivalent à considérer la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$.

Exemple 2 :

L'équation $6x^2-3y-12=0$ peut s'écrire $y=-2x^2-4$. Considérer cette équation devient alors équivalent à considérer la fonction f définie par $f(x)=-2x^2-4$.

En résumé, <u>étant donnée une équation à deux inconnues x et y</u> :

☐ si elle peut s'écrire sous la forme $y = f(x)$, c'est-à-dire qu'on arrive à exprimer une variable en fonction de l'autre (!), alors cette équation définit une fonction f ; les courbes représentatives de l'équation ou de la fonction sont identiques ;

☐ si elle ne peut pas s'écrire sous la forme $y = f(x)$, elle ne définit pas une fonction ; on peut cependant (essayer de) représenter graphiquement cette équation, mais cela est souvent difficile ;

<u>étant donnée une courbe représentative</u> (un sous-ensemble de points du plan) :

☐ s'il existe au moins une droite verticale qui intersecte la courbe plus d'une fois, la courbe donnée ne peut pas être celle d'une fonction ;

☐ si elle n'est jamais intersectée plus d'une fois par toute droite verticale, elle représente une fonction, mais il est souvent difficile de trouver l'équation $y = f(x)$!

Exemple 3 : soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-x+2$. Donner, si cela est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

☐ $f(x)$ est sous forme développée, donc on obtient directement l'ordonnée à l'origine : 2.

☐ $\Delta=(-1)^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$ donc la forme factorisée n'existe pas et $Z_f=\varnothing$.

☐ Axe de symétrie : $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$

☐ $x=\frac{1}{2}$ est l'abscisse du sommet ; on calcule l'ordonnée :

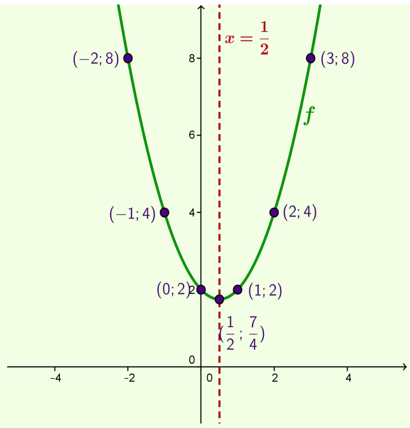
$f(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})+2=\frac{1-2+8}{4}=\frac{7}{4}$. Donc $S(\frac{1}{2};\frac{7}{4})$.

☐ $a = 1 > 0$ donc la parabole est convexe ($\cup$)

☐ Points supplémentaires : $f(-1)=(-1)^2-(-1)+2=4$ et $f(-2)=(-2)^2-(-2)+2=8$

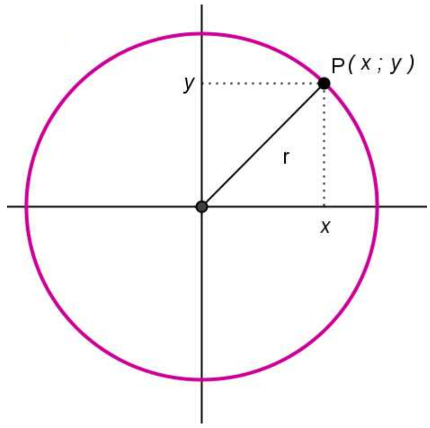
☐ Le symétrique de (-1;4) par rapport à l'axe de la parabole est (2;4).
Le symétrique de (-2;8) par rapport à l'axe de la parabole est (3;8).
Le symétrique de (0;2) par rapport à l'axe de la parabole est (1;2).

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :



Voir les exercices 1 à 7

8 [A savoir] Équations de cercles



Cercle centré à l'origine

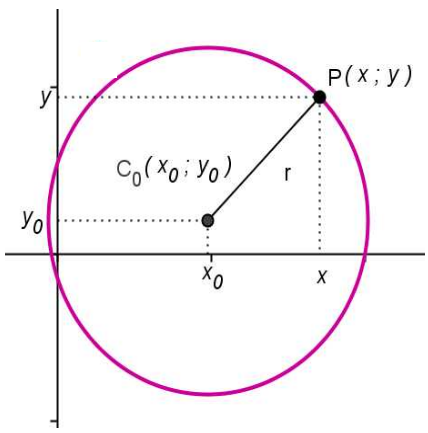
Prenons l'exemple du cercle Γ de rayon r, centré à l'origine et considérons un point P qui appartient au cercle Γ.
On a : $P \in \Gamma \Leftrightarrow \ \delta(O,P)=r$
Autrement dit, dire qu'un point $P(x;y)$ appartient à Γ est équivalent à dire que la distance entre ce point et l'origine vaut r.

Algébriquement, cela signifie : $\delta(O,P)=r \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=r^2$

L'**équation du cercle Γ centré à l'origine et de rayon r** est donc $x^2+y^2=r^2$.
Si un point $P(x;y)$ du plan appartient au cercle Γ, alors ses coordonnées x et y vérifient l'équation $x^2+y^2=r^2$.
Réciproquement, si les coordonnées x et y d'un point $P(x;y)$ du plan vérifient l'équation $x^2+y^2=r^2$, alors P appartient à Γ.

Cercle quelconque

De la même manière, on obtient le résultat suivant pour un cercle quelconque :



L'**équation du cercle Γ de centre $C(x_0;y_0)$ et de rayon r** est : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.
En développant cette équation, on obtient une autre forme pour exprimer l'équation d'un cercle :

$$x^2-2xx_0+x_0^2+y^2-2yy_0+y_0^2=r^2$$

en posant $a=-2xx_0, b=-2yy_0, c=x_0^2+y_0^2$, on obtient

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

On l'appelle **équation cartésienne du cercle**.

Remarque : un cercle ne peut pas être la courbe représentative d'une fonction !

Méthode « Déterminer l'équation d'un cercle »

Exemple 1 : déterminer l'équation du cercle Γ de centre $C_0(2;-3)$ passant par le point $A(2;5)$

L'équation de Γ est de la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Comme on connaît le centre $C_0(2;-3)$, on a : $(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$; reste à déterminer r.

Comme $A\in\Gamma$, on sait que r est la distance entre C_0 et A ; $r=\sqrt{(2-2)^2+(-3-5)^2}=8$

Donc l'équation de Γ est : $(x-2)^2+(y+3)^2=8^2$

Exemple 2 : déterminer si l'équation $x^2+y^2-2x+8y+15=0$ est celle d'un cercle.

Il faut transformer l'équation pour voir s'il est possible de l'écrire sous la forme $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$: $x^2+y^2-2x+8y+15=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+...)+(y^2+8y+...)+15=0$.

On a ainsi par complétion du carré $(x-1)^2+(y+4)^2+15=1+16 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=2$.

Donc l'équation est celle du cercle de centre $C_0(1;-4)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$.

Voir les exercices 8 à 17

9 [A savoir] Intersections

Exemple : déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de la droite $d: 2x-y-5=0$ et du cercle Γ : $x^2+y^2=25$, puis interpréter graphiquement.

Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$.

On écrit : $\begin{cases} y=2x-5 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ et on utilise la **méthode par substitution**, c'est-à-dire qu'on substitue y par $2x-5$ dans la 2e équation : $x^2+(2x-5)^2=25$

on obtient une équation à une inconnue qu'on sait résoudre :

$$x^2+4x^2-20x+25=25 \Leftrightarrow 5x^2-20x=0 \Leftrightarrow x(5x-20)=0$$

d'où $x=0$ ou $x=4$

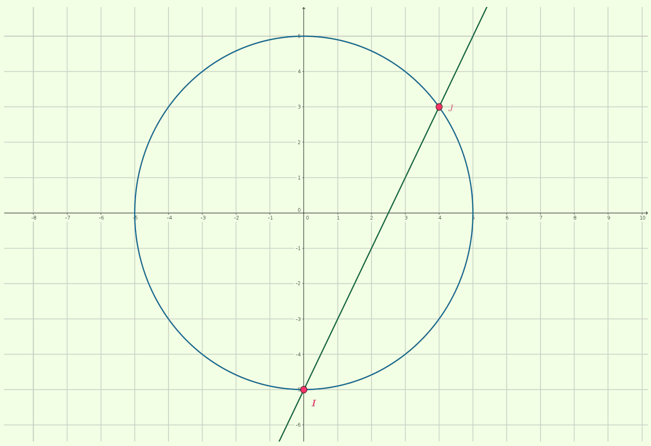
On revient au système de départ pour trouver les valeurs de y correspondantes :

si $x=0$: $y=2\cdot 0-5=-5$, donc le 1er point d'intersection est $I(0;-5)$

si $x=4$: $y=2\cdot 4-5=3$, donc le 2e point d'intersection est $J(4;3)$

$S=\{(0;-5);(4;3)\}$

Graphiquement : les coordonnées des deux points d'intersection sont bien (0;-5) et (4;3)



10 [Aller plus loin] Tangentes

Définition « Tangente à une parabole ou à un cercle »

Une **tangente à une parabole ou à un cercle** est une droite qui a un unique point d'intersection avec cette parabole ou ce cercle.

Exemple : déterminer l'équation de la droite passant par $A(4;–3)$ et tangente à la parabole P d'équation $y=\frac{1}{4}(x-3)^2-1$.

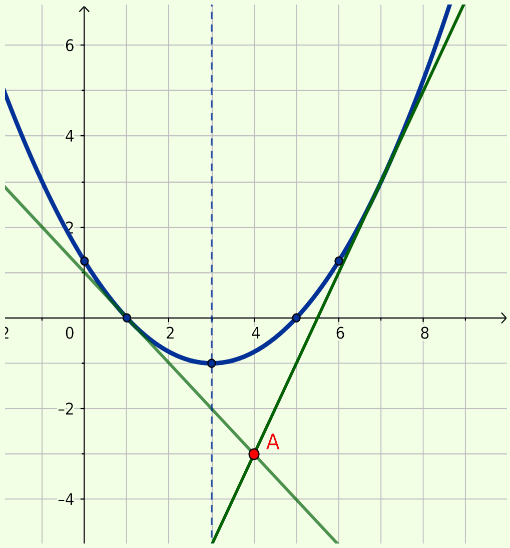
On commence par représenter graphiquement la situation.

Comme P est donnée sous forme canonique, on a :

$x=3$ est l'axe de symétrie et $S=(3;–1)$ est le sommet de la parabole ;

on calcule encore l'ordonnée à l'origine :

$y=\frac{1}{4}(0-3)^2-1=\frac{5}{4}$, donc le point $\left(0;\frac{5}{4}\right)$ appartient à la parabole,ainsi que le point symétrique $\left(6;\frac{5}{4}\right)$; puis par Viète, les intersections avec l'axe *Ox* sont (1;0) et (5;0). Avec ces 5 points on peut tracer la parabole.



On « voit » qu'il faut s'attendre à deux solutions tangentes à P passant par A (en vert).

L'équation des tangentes est de la forme $y = px + q$;

Comme $A(4;–3)$ appartient à ces droites, on a : $–3 = 4p+q$

C'est-à-dire que $q = –3–4p$ dans les deux équations recherchées ; les équations sont donc de la forme $y = px –3–4p$.

On pose le système qui permet de déterminer le(s) point(s) d'intersection(s) :

$$\begin{cases} y = px-4p-3 \\ y=\frac{1}{4}(x-3)^2-1 \end{cases}$$ qu'on résout par comparaison:

$$px-4p-3=\frac{1}{4}(x-3)^2-1 \Leftrightarrow px-4p-2=\frac{1}{4}(x-3)^2 \Leftrightarrow 4px-16p-8=x^2-6x+9$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x-4px+16p+17=0 \Leftrightarrow x^2-(4p+6)x+16p+17=0$$

La formule de Viète donne :

$$\Delta=(4p+6)^2-4\cdot 1\cdot(16p+17)=16p^2+48p+36-64p-68=16p^2-16p-32$$

Comme on souhaite qu'il y ait une seule solution à ce système (puisqu'une tangente a un seul point d'intersection avec la parabole), il faut que $\Delta=16p^2-16p-32=0$

Il faut maintenant résoudre cette équation en p avec la formule de Viète :

$$p_{1;2}=\frac{16\pm\sqrt{16^2-4\cdot 16\cdot(-32)}}{2\cdot 16}=\frac{16\pm\sqrt{2304}}{32}=\frac{16\pm 48}{32}=\frac{1\pm 3}{2}$$ donc $p_1=2$ et $p_2=-1$

L'équation de la première tangente est $y=p_1x-4p_1-3=2x-8-3=2x-11$

L'équation de la deuxième tangente est $y=p_2x-4p_2-3=-x+4-3=-x+1$.

Voir les exercices 18 à 26

Degrés 0, 1 et 2

1 Soient la droite d_1 : $3x + 4y - 2 = 0$, la droite d_2 passant par les points $A=(-1;2)$ et $B=(5;6)$ et la droite d_3 : $4x - 3y - 1 = 0$:

a. Représenter proprement dans un même repère les droites d_1 et d_2

b. Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_2

c. Déterminer le point d'intersection des droites d_1 et d_3

d. Donner l'équation cartésienne de la droite d_4 qui est perpendiculaire à d_3 et qui passe par le point $A=(-1;2)$

2 Soient les droites $d_1 : x + 2y - 8 = 0$,

$d_2 : 4x + 3y - 7 = 0$ et $d_3 : 3x + y - 9=0$.

a. Déterminer les points d'intersections entre ces trois droites.

b. Déterminer l'aire du triangle délimité par ces trois droites.

3 Résoudre et donner les solutions en valeurs exactes et simplifiées au maximum :

a. $x^2-3x=-4$ **c.** $3x^2=24$

b. $3x^2=6x+1$

4 Factoriser le plus possible :

a. $7x^2+5x-2$

b. $3(x-1)^2-9(x-1)$

c. $7a^3b^2c-14a^2b^2c^2+28ab^3$

d. $(5x+4)(9x-5)-(12x+7)(5x+4)$

e. $49x^2+28x+4$

f. $x^2+5x-14$

5 Pour la fonction f définie par $f(x)=-x^2+2x+3$, donner l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, l'axe de symétrie, le sommet et la représenter graphiquement de façon précise.

6 Avec 300m de grillage, on clôture un terrain rectangulaire d'aire la plus grande possible et dont la longueur s'appuie sur le bord d'une rivière rectiligne, ce côté ne nécessitant pas de grillage. On appelle x la largeur du terrain (la longueur est plus grande que la largeur).

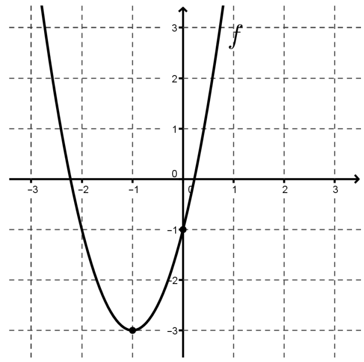
a. Montrer que la longueur du terrain est 300-$2x$ puis déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème (*Dvipp*)

b. Montrer que l'aire du terrain à clôturer en fonction de x est donnée par $f(x) = -2x^2+300x$

c. En déduire la largeur x à prendre pour que le terrain soit d'aire maximale. Préciser alors cette aire et la longueur correspondante.

d. Interpréter graphiquement tout le problème.

7 Voici une représentation graphique d'une fonction f du deuxième degré ; sa courbe représentative contient le point (0 ;-1) et (-1;-3) est son sommet :



Déterminer les 3 formes (factorisée, développée et canonique) de f.

Voir la théorie 1 à 7

Équations de cercles

8 Établir une équation qui exprime que $P(x;y)$ est à une distance 5 de l'origine. Décrire l'ensemble des points P possibles.

9 Déterminer tous les points de l'axe des ordonnées qui sont à une distance 6 de $A(5;3)$.

10 Déterminer tous les points de l'axe des abscisses qui sont à une distance 5 de $A(-2;4)$.

11 Déterminer le point du troisième quadrant de coordonnées $(2a;a)$ qui est à une distance 5 de $A(1;3)$.

12 Quels sont les points $P(x;y)$ du plan tels que $\overline{OP}=4$ et $y=-2$?

13 Soit Γ un cercle d'équation $(x-3)^2+(y+2)^2=36$.

a. Donner le centre et le rayon de Γ.

b. $A(7;-5)$ appartient-il à Γ ?

c. $A(8;-5)$appartient-il à Γ ?

d. Donner les coordonnées de 5 points appartenant à Γ.

e. $A(-2;1)$ est-il à l'intérieur de Γ ?

f. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la représentation graphique de Γ avec les axes Ox et Oy.

g. Représenter graphiquement Γ.

14 Déterminer l'équation du cercle Γ :

a. de centre $C_0(4;-2)$ et de rayon $r=8$.

b. de centre $C_0(-4;-2)$ passant par le point $P(1;3)$

15 Déterminer l'équation du cercle Γ :

a. tangent à l'axe Ox et de centre $(3;2)$.

b. tangent à la droite d d'équation $y = 5$ et de centre (5;-2).

c. de centre $(1;-1)$ et passant par $(3;2)$.

16 Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles Γ suivants :

a. $x^2+y^2+6x+8y+24=0$

b. $x^2+y^2-4x+2y+6=0$

c. $x^2+y^2-20y+36=0$

d. $x^2+y^2-x+3y-1=0$

17 Si cela est possible, déterminer le centre C_0 et le rayon r des cercles Γ suivants :

a. $x^2+y^2-25=0$

b. $x^2+y^2+36=0$

c. $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

d. $x^2+y^2+10y+9=0$

e. $x^2+y^2-8x-6y=0$

f. $x^2+y^2+4x-2y+9=0$

g. $2x^2+2y^2-2x+10y+11=0$

h. $225x^2+225y^2+600x-990y+1089=0$

18 Déterminer l'équation du cercle passant par $A(3\,;-2)$, $B(-1\,;1)$ et $D(3\,;4)$.

Voir la théorie 8

Intersections et tangentes

19 Dans un repère orthonormé du plan, on considère la droite d'équation $y=-2x+2$ et la parabole d'équation $y=-\frac{1}{3}x^2+2x$.

a. Représenter soigneusement cette droite et cette parabole.

b. Calculer les coordonnées de leurs points d'intersection. Donner la réponse en valeur exacte simplifiée au maximum et sous forme arrondie au centième.

20 Déterminer algébriquement les points d'intersection entre le cercle $\Gamma : x^2+y^2 -2x +2y = 8$ et la droite d : $x + y - 2 = 0$, puis interpréter géométriquement.

21 Soit P la parabole d'équation $f(x)=x^2-6x+8$ et soit P' la parabole d'équation $g(x)=-x^2+6x-2$.

Déterminer algébriquement les intersections de ces deux paraboles puis interpréter graphiquement.

22 Déterminer les points d'intersections entre les cercles Γ_1 et Γ_2 :

a. $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 25$ et Γ_2 : $x^2+y^2-8x+7=0$

b. $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 25$ et Γ_2 : $x^2+y^2-12x-4y-5=0$

c. $\Gamma_1 : x^2+y^2 = 4$ et Γ_2 : $x^2+y^2-10x+10y+46=0$

23 Dans un repère orthonormé du plan, on envisage les points $A(-4;1)$ et $B(2;-3)$.

a. Établir l'équation de la droite passant par les points A et B.

b. Établir l'équation du cercle dont le segment $[AB]$ est un diamètre.

c. Établir l'équation de la droite tangente au cercle au point A.

24 Déterminer les tangentes de pente -1 au cercle à la courbe d'équation $(x + 2)^2 + y^2 = 2$.

25 Trouver la tangente au cercle $\Gamma : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$ passant par le point $T(2\,;-2)$.

26 Trouver les tangentes au cercle $\Gamma : (x - 1)^2 + y^2 = 4$ qui sont parallèles à $d : 3x + 4y = 2$.

27 Déterminer les équations des tangentes au cercle $\Gamma : x^2 + y^2 = 5$ issues du point $A(5/3\,;-5/3)$.

28 Déterminer l'équation de la tangente à la parabole $P : y = 2 - x^2$ passant par le point :

a. $A(3;2)$

b. $B(2;-1)$

c. $C(1;-1)$

Voir la théorie 9 à 10

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

29 Donner l'équation du cercle Γ de centre $C_0(3;-2)$ et tangent à la droite $y=5$.

30 Donner la forme cartésienne d'une équation du cercle Γ centré au point C_0 et de rayon r et calculer les coordonnées des points d'intersection de ce cercle avec les axes Ox et Oy :

a. $C_0(0;0)$ et $r=7$ **c.** $C_0(2;-2)$ et $r=2$

b. $C_0(-3;0)$ et $r=\sqrt{3}$ **d.** $C_0(a;2a)$ et $r=\sqrt{5}a$

31 Déterminer (si possible) le centre et le rayon du cercle Γ donné par l'équation :

a. $x^2+y^2-4x+6y-36=0$

b. $x^2+y^2+8x-10y+37=0$

c. $x^2+y^2+4y-117=0$

d. $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

32 Déterminer l'équation du cercle passant par $A(1; -1)$, $B(1; 0)$ et $D(-2; 2)$.

33 Déterminer si la droite et le cercle se coupent, sont tangents ou extérieurs dans les cas suivants, et déterminer les points d'intersection :

a. $\Gamma : x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$ et $d : 2x - y = 3$

b. $\Gamma : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$ et $d : x - 2y - 1 = 0$

c. $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$ et $d : y = x + 10$

34 Calculer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle et la droite :

a. $\Gamma : x^2 + y^2 = 25$ et $d : 2x - y = 5$

b. $\Gamma : x^2 + y^2 - 4x - 6y = 12$ et $d : 3x - 4y = 19$

35 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\Gamma : x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$ qui est perpendiculaire à la droite $5x + 2y = 13$.

36 Calculer les points d'intersection entre le cercle $\Gamma : x^2 + y^2 + 15x - 12y + 36 = 0$ et les axes de coordonnées.

37 Déterminer l'équation d'un cercle Γ tangent à Ox et passant par $A(-2 ; 1)$ et $B(5 ; 8)$.

38 Déterminer les équations des cercles tangents à $x + y - 10 = 0$ et passant par $A(7 ; 1)$ et $B(-5 ; 5)$.

39 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2y = 9$ et $y = 2x + 2$.

40 Déterminer les équations des cercles passant par $A(-1 ; 5)$ et qui sont tangents aux droites $3x + 4y = 35$ et $4x + 3y + 14 = 0$.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

29 $(x-3)^2+(y+2)^2=7^2$

30

a. $x^2+y^2-49=0$; (-7;0) et (7;0); (0;-7) et (0;7)

b. $x^2+y^2+6x+6=0$; $(-3-\sqrt{3};0)$ et $(-3+\sqrt{3};0)$;

c. $x^2+y^2-4x+4y+4=0$; (2;0) ; (0;-2)

d. $x^2+y^2-2ax-4ay=0$; $(0;4a)$, (0;0) et $(2a;0)$.

31

a. $C_0(2;-3)$ et $r=7$

b. $C_0(-4;5)$ et $r=2$

c. $C_0(0;-2)$ et $r=11$

d. $C_0(-2;1)$ et $r=0$

32 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{26}{4}$

33

a. coupe ; $\left(\frac{11}{5};\frac{7}{5}\right)$ et $(0;-3)$

b. tangente ; (3;1)

c. extérieure

34

a. (0;-5) et (4;3)

b. (5 ;-1)

35 2x – 5y = -19

36 (-12;0), (-3;0) et (0;6)

37 $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ ou $(x+7)^2+(y-13)^2=169$

38 $x^2+y^2=50$ ou $(x+10)^2+(y+30)^2=1250$

39 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ ou $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$

40 $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ ou $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$

Bilan

« Good mathematics is not about how many answers you know...
It's how you behave when you don't know »
Auteur inconnu

A savoir en fin de chapitre

Degrés 0, 1 et 2

- ✔ équations des droites verticales, horizontales et obliques ;
- ✔ parallélisme et perpendicularité ;
- ✔ connaître les formes canonique, développée et factorisée d'une expression de degré 2 ;
- ✔ factoriser des expressions de degré 2 et résoudre des équations de degré 2 par factorisation ou en utilisant la formule de Viète ;
- ✔ représenter graphiquement de manière efficace $y=ax^2+bx+c$ comme parabole (axe de symétrie, sommet, concave/convexe, points supplémentaires et symétriques), quelle que soit la forme (développée, canonique, factorisée) sous laquelle elle est donnée ;
- ✔ déterminer l'expression algébrique d'une parabole donnée ;

Voir la théorie 1 à 7 les exercices 1 à 7

Équations de cercles

- ✔ déterminer l'équation d'un cercle ;
- ✔ déterminer le centre et le rayon d'un cercle d'équation donnée ;
- ✔ déterminer l'équation d'un cercle passant par 3 points ;
- ✔ déterminer des équations de tangentes à un cercle ;

Voir la théorie 8 les exercices 8 à 18

Intersections et tangentes

- ✔ poser et résoudre un système d'équations pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de courbes et interpréter graphiquement les solutions ;
- ✔ déterminer des équations de tangentes à des courbes.

Voir la théorie 9 à 10 les exercices 19 à 28

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-2e/complements/ch01