Chapitre 08 - De Thalès à Pythagore

Source: *http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Vitrac/images/carte.html*

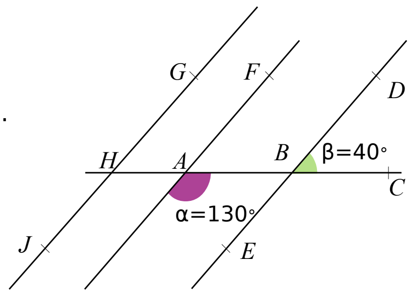
Problème

Deux mouches se posent sur l'un des points d'intersection de deux cercles de sucre situés sur une table. Elles partent simultanément, chacune le long de son cercle, à vitesse constante (pas la même), dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Après un tour complet, elles se retrouvent exactement en même temps à leur point de départ. Pendant tout ce temps et sans qu'elles s'en doutent, une araignée les guette, immobile sur la table. Elle a choisi un point, connu d'elle seule, qui lui permet d'être à égale distance des deux mouches à chaque instant de leur périple. Où la cruelle araignée est-elle placée ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Problèmes introductifs

1 On considère la figure ci-contre, où les droites d_{HG} et d_{AF} sont parallèles, où H, A, B, C ainsi que E, B, D et J, H, G sont alignés.

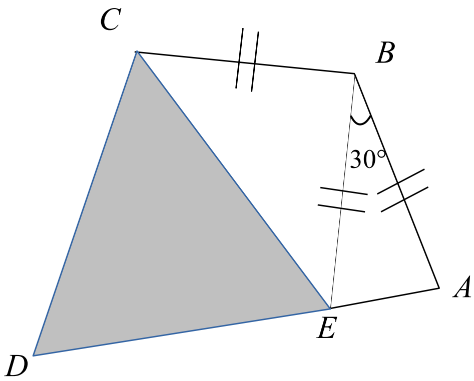


a. Déterminer les mesures des angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{EBA}$, $\widehat{AHJ}$ et $\widehat{GHA}$. Comment les appelle-t-on par rapport aux angles α ou β ?

b. Les droites d_{AF} et d_{ED} sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

c. Déterminer d'autres angles formés par des droites parallèles.

2 On considère la figure ci-contre dans laquelle le triangle grisé est équilatéral :



a. Quelles sont les informations dont nous disposons à partir de l'énoncé et de la figure, et comment les noter ?

b. Les points D, E et A sont-ils alignés ? Savez-vous justifier votre réponse ?

c. Quels sont les outils mathématiques [définitions, théorèmes] que vous avez utilisés pour résoudre ce problème.

2 [Aller plus loin] L'Égypte ou le temps des arpenteurs

1 Les civilisations mésopotamiennes, avec leur système de numération sexagésimale de position, étaient bien outillées pour dégager des algorithmes algébriques. On considère du reste la Mésopotamie comme le berceau de l'« algèbre ». Une tradition remontant aux Grecs fait en revanche de la civilisation égyptienne le lieu de naissance de la géométrie.

Voici un texte d'Hérodote sur l'origine de la géométrie:

> *Hérodote (environ 484-420)*
> Ce roi, m'ont dit les prêtres, partagea la terre entre tous les Égyptiens par lots carrés d'égale superficie; il assura par là ses revenus, en imposant à leurs possesseurs une redevance annuelle. Tout homme à qui le fleuve enlevait une parcelle de son lot allait signaler la chose au roi ; Sésostris envoyait alors les gens inspecter le terrain et en mesurer la diminution, pour accorder dorénavant à l'homme une réduction proportionnelle de sa redevance. Voilà, je pense, l'origine de la géométrie, qui passa plus tard en Grèce ; mais le cadran solaire, le gnomon et la division du jour en douze parties nous sont venus des Babyloniens.

L'Enquête, II. 109

L'explication d'Hérodote est reprise et complétée par un auteur plus tardif, Diodore de Sicile:

> *Diodore de Sicile (90-20)*
> Les prêtres font apprendre à leurs enfants la géométrie et l'arithmétique ; comme le fleuve, en débordant tous les ans, change souvent l'aspect de la campagne et confond les limites des héritages, seules les personnes habiles dans l'art d'arpenter et de mesurer les terres peuvent en effet prévenir les procès qui naîtraient continuellement entre les voisins. L'arithmétique leur sert ainsi, non seulement pour les spéculations de la géométrie, mais encore pour les besoins de la société.

in : Marchal P.-E., Histoire de la géométrie, pp. 12-13

a. Qu'entend-t-on par « système de numération sexagésimale de position » ?

b. A qui attribuer l'origine de la géométrie ? Pour quelles nécessités ?

c. Qui étaient Hérodote et Diodore de Sicile ?

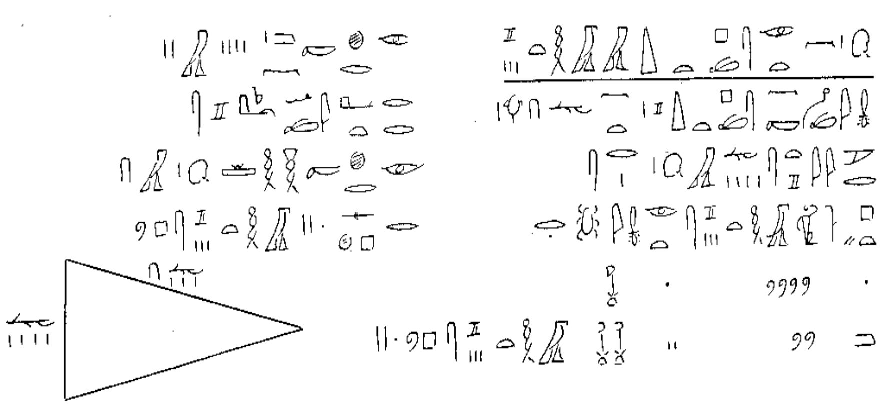
d. Qu'est-ce qu'un arpenteur ?

e. Qu'est-ce qu'un gnomon ?

2 Lire et commenter le texte suivant qui présente la manière dont le scribe Ahmôse calcule l'aire d'un triangle.

Ahmôse (1788-1580 av. J.-C.)
Exemple de calcul d'un triangle de champs.
Si on te dit : un triangle de 10 khet[1] dans sa hauteur est de 4 khet dans sa base.
Quelle est sa surface ?
Tu feras en sorte que tu calcules la moitié de 4 qui est 2 pour en faire un carré.
Tu feras en sorte de multiplier par 10 fois 2.
Ceci est sa surface.

R. 51, in : Couchoud S., Mathématiques égyptiennes, pp. 44-45



Peet, The Rhind Mathematical Papyrus, planche XV

a. Généraliser la procédure en justifiant votre réponse.

b. Qu'était un scribe ?

c. Qu'est-ce que le papyrus de Rhind ?

3 Signalons que l'on trouve en Mésopotamie des procédures semblables de calculs relevant de préoccupations géométriques. Les Babyloniens, à l'image des Égyptiens, savaient calculer les surfaces des quadrilatères réguliers et approcher celles des polygones. Ils étaient capables d'approximer le volume de certains corps : prismes, pyramides, troncs de pyramide à base carrée et troncs de cônes. Ils approximaient le périmètre d'un disque en multipliant le diamètre par 3 (ou 3,125 à la période séleucide). On a retrouvé le tracé de quelques polygones réguliers (hexagone et pentagone notamment) avec la mention du rapport des mesures du côté et de la hauteur. Les Babyloniens avaient cerné la teneur de ce que nous appelons le « théorème de Pythagore » et de sa réciproque, ainsi que celle des grandeurs proportionnelles : notre « théorème de Thalès » !

1 Les Égyptiens utilisaient différentes unités de longueur : la petite coudée valait 6 palmes et chaque palme valait 4 doigts. Cette petite coudée correspondait à 45 de nos centimètres. La coudée royale valait 7 palmes, soit environ 52,3cm. Puis venait le khet, ou verge, valant 100 coudées, et finalement l'iterou, ou rivière d'une longueur de 2000 coudées royales. Les unités de surface les plus courantes étaient l'aroure, ou sétat, correspondant à un carré d'un khet de côté, et le khâ valant 10 khet. L'unité de volume la plus utilisée était l'hékat, ou boisseau, qui valait 4,54 de nos litres.

3 [Activité] Notions modernes de géométrie

1 Notions de base

On considère les objets géométriques suivants : plan, point, droite, droites parallèles, droites sécantes, droites perpendiculaires, demi-droite, segment de droite, distance entre deux points, longueur d'un segment de droite.

a. Peut-on tous les définir précisément de façon mathématique ?

b. Comment les note-t-on ?

2 Angles et mesure des angles

a. Définir et illustrer les notions suivantes : angle, angle plein, angle plat, angle droit, angles opposés, complémentaires, supplémentaires, correspondants, alternes-internes.

b. Qu'entend-t-on par « mesure d'un angle » ?

c. Quelle différence y a-t-il entre « angle » et « mesure de l'angle » ?

d. Comment appelle-t-on deux angles qui ont la même mesure ?

e. On considère le commentaire suivant:

Thalès A 20 : Proclus (410/12-485).
Ce théorème selon lequel quand deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux, fut découvert pour la première fois, d'après Eudème, par Thalès.

Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide, 299, 1

i Énoncer ce résultat sous forme d'une implication, identifier la(les) hypothèse(s) et la(les) conclusion(s) puis démontrer cette implication.

ii Énoncer sa réciproque. Est-elle vraie ou fausse? Justifier.

f. Énoncer sous forme d'une conjecture une relation entre (les mesures de) deux angles correspondants ? Peut-on la démontrer ?

g. Énoncer sous forme d'une conjecture une relation entre deux angles alternes-internes ? Peut-on la démontrer ? Mêmes questions pour deux angles alternes-externes.

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 8

4 [Souvenirs] Figures du plan, surfaces, aires

1 Définir et illustrer les notions suivantes :

a. polygone, polygone régulier, sommets, côtés, longueurs des côtés ;

b. triangle, quadrilatère, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.

2 Comment appelle-t-on un polygone régulier à 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 côtés ?

3 Quelle différence y a-t-il entre surface et aire ?

4 Rappeler les théorèmes pour le calcul d'aire des polygones connus du plan.

5 Que connaît-on d'un parallélogramme (côtés, angles, diagonales) ?

6 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Un carré est un losange.

b. Un rectangle est un carré.

Voir la théorie 3 et les exercices 9 à 11

5 [Activité] Triangles

1 Rappeler les notations usuelles dans un triangle puis définir et illustrer les notions suivantes : triangle isocèle, triangle rectangle, triangle équilatéral.

2 Énoncer une conjecture quant à la relation entre tous les angles d'un triangle. La démontrer.

3 Que peut-on dire des angles dans un triangle isocèle ? Équilatéral ? Que peut-on démontrer à ce stade ?

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 12 à 30

6 [Activité] Pyramides

Lire attentivement les deux textes suivants :

Thalès A 21 : Pline (23/24-79)
Thalès de Milet a trouvé une méthode pour mesurer la hauteur des pyramides, en mesurant leur ombre à l'heure où elle est régulièrement égale à son objet.
Histoire naturelle, 36, 82, in : Dumont, p. 28

Thalès A 21 : Plutarque (environ 40-120)
Dressant seulement à plomb un bâton au bout de l'ombre de la pyramide, et se faisant deux triangles avec la ligne que fait le rayon du Soleil touchant aux deux extrémités, tu montras qu'il y avait telle proportion de la hauteur de la pyramide à celle du bâton, comme il y a de la longueur de l'ombre de l'un à l'ombre de l'autre.
Le banquet des Sept Sages, 2, p. 147 A, in : Dumont, p. 29

En déduire la démarche suivie par Thalès pour estimer la hauteur des pyramides égyptiennes de Giseh.

7 [Activité] Triangles semblables et théorème de Thalès

1 Qu'entend-t-on par **triangles semblables** et **côtés correspondants** ? Illustrer.

2 Que peut-on conjecturer à propos de deux triangles qui ont deux angles égaux deux à deux ? Enoncer une conjecture et la démontrer.

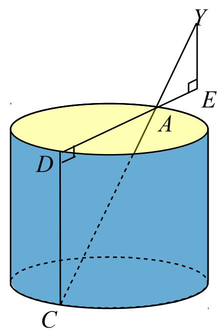
3 On suppose dans deux triangles que : $\widehat{BCA}=\widehat{EFD}$, $\widehat{ABC}=\widehat{FDE}$, $\widehat{CAB}=\widehat{DEF}$, $\overline{AB}=28$, $\overline{BC}=18$, $\overline{AC}=12$ et $\overline{FE}=4{,}5$. En justifiant précisément :

a. Représenter la situation ; identifier les côtés correspondants puis les triangles semblables.

b. Comment peut-on déterminer $\overline{DF}$ et $\overline{DE}$?

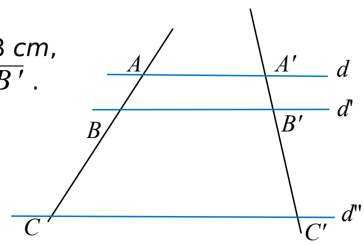
4 Énoncer le théorème de Thalès, en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

8 [Activité] Applications



1 $[AD]$ est un diamètre d'un puits de forme cylindrique. Le point C est à la verticale de D, au fond du puits. Une personne se place en un point E de la demi-droite issue de D passant par A de sorte que ses yeux soient alignés avec les points A et C.
On note Y le point correspondant aux yeux de cette personne.
On sait que $\overline{AD}=1{,}5\,m$; $\overline{EY}=1{,}7\,m$ et $\overline{EA}=0{,}6\,m$. Calculer $\overline{DC}$, la profondeur du puits.

2 Sur cette figure, d, d' et d'' sont parallèles. $\overline{AB}$ = 5 *cm* ; $\overline{BC}$ = 8 *cm*, $\overline{AA'}$ = 7 *cm*, $\overline{CC'}$ = 12 *cm* et $\overline{A'C'}$ = 10 *cm*. Calculer $\overline{A'B'}$ et $\overline{BB'}$.



9 [Activité] Réciproquement

Soient M, N, et P trois points alignés sur une droite d dans cet ordre, avec $\overline{MN}=5\,cm$, $\overline{NP}=12\,cm$, et soient S et T deux autres points n'appartenant pas à d et tels que S, N, et T sont alignés dans cet ordre sur une droite d', avec $\overline{SM}=11{,}25\,cm$ et $\overline{PT}=27\,cm$, $\overline{SN}=7{,}5\,cm$ et $\overline{NT}=18\,cm$.

1 Représenter cette situation.

2 Soit d_{MS} la droite passant par M et S et d_{PT} la droite passant par P et T. Ces deux droites sont-elles parallèles ? Justifier précisément.

3 De même, d_{MT} et d_{PS} sont-elles parallèles ?

4 Quel sont les théorèmes utilisés pour répondre à ces questions ?

10 [Aller plus loin] Démonstration

1 Illustrer puis démontrer les deux théorèmes ci-dessous :

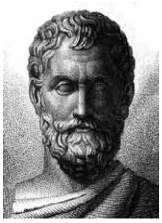
a. Théorème : Si on trace, dans un triangle ΔOAB , une droite quelconque parallèle à $[AB]$ coupant $[OA]$ en A' et $[OB]$ en B', alors on a : Aire$(\Delta ABB')$=Aire$(\Delta ABA')$.

b. Théorème : Si on trace, dans un triangle ΔOAB , une demi-droite quelconque issue de A et coupant le segment $[OB]$ en B', alors on a : $\dfrac{\text{Aire}(\Delta OAB')}{OB'} = \dfrac{\text{Aire}(\Delta ABB')}{B'B}$

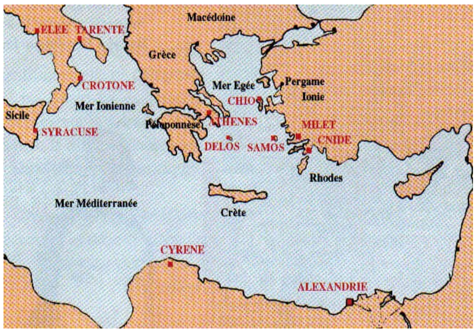
2 Donner une démonstration du théorème de Thalès en justifiant les étapes.

11 [Aller plus loin] Le temps des premiers îlots déductifs : Thalès

Aucun texte de Thalès ne nous est parvenu. Pour établir les grandes étapes de son existence comme de ses travaux nous devons nous appuyer sur les opinions qui furent rédigées parfois bien après sa mort. C'est ce qu'on appelle établir la doxographie d'un auteur ou d'une œuvre. Selon ces opinions Thalès serait né en 640 av. J.-C. dans la ville d'Ionie de Milet actuellement située sur la côte de la mer Égée en Turquie. Il serait mort entre 548 et 545 av. J.-C. dans la même ville de Milet dont il fut dit-on un conseiller politique influent. Il serait un des premiers si ce n'est le premier à chercher à fournir une explication naturelle aux phénomènes. Il aurait chercher à expliquer l'ensemble des phénomènes physiques à partir d'un élément premier et de ses transformations : l'eau. On le considère comme l'un des sept sages. Il aurait effectué des voyages en Mésopotamie comme en Égypte et c'est de là qu'il aurait rapporté une partie de ses connaissances mathématiques.



Source: www-history.mcs.st-andrews. ac.uk



Source : www.math93.com

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 31 à 44

12 [Activité] LE théorème!

1 Lire le texte ci-dessous :

École pythagoricienne 21 : Euclide (environ 325-250)
« Quel que soit le triangle, quand on prolonge l'un de ses côtés, l'angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs et opposés, et la somme des trois angles intérieurs du triangle est égale à deux droits. »
C'est aux Pythagoriciens que le péripatéticien Eudème fait remonter la découverte de ce théorème selon lequel tout triangle a ses angles intérieurs égaux à deux droits. (...)
Cité par Proclus - Commentaire du premier livre des Eléments d'Euclide, I, XXXII
Ed. Friedlein, 379, 2

a. Quel est le théorème dont il est ici question?

b. Qu'est-ce qu'un « péripatéticien »?

2 Lire le texte ci-dessous :

Euclide (environ 325-250)
« Dans un triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.»
Parmi les gens qui prétendent écrire l'histoire des temps anciens, il en est pour attribuer ce théorème à Pythagore et pour dire qu'il sacrifia un bœuf à l'occasion de cette découverte.

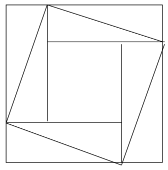
Cité par Proclus - Commentaire sur le premier livre des Éléments d'Euclide,I, XLVII éd. Friedlein, 426, 6

a. Illustrer le texte par une figure explicative.

b. Énoncer le théorème de Pythagore en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s)

c. Donner une démonstration du théorème de Pythagore en justifiant les étapes.

d. Cette illustration, qui se trouve dans le livre de Chou Pei Suan King (40 av. J.-C.) ne nécessite, quant à elle, qu'une seule figure !



e. Que peut-on dire de la dénomination « Théorème de Pythagore » associée à ce résultat lorsque l'on sait qu'on a trouvé des « triplets pythagoriciens » sur des tablettes mésopotamiennes bien antérieures à l'époque de Pythagore ? Quelle est l'apport spécifique de Pythagore (ou plus généralement des grecs) ?

f. Énoncer la réciproque du Théorème de Pythagore. Est-elle vraie ? Donner des exemples dans lesquels on utilise le théorème, sa réciproque et leurs contraposées.

13 [Activité] Applications

Au XIIIe siècle, le fils d'un certain Bonacci, Léonard de Pise, dit Fibonacci, écrivit un livre expliquant aux marchands italiens les connaissances mathématiques découvertes et accumulées par les arabes. Dans ce « Livre des abaques », on trouve ce problème : « Deux tours élevées l'une de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas. Entre les deux se trouve une fontaine vers le centre de laquelle deux oiseaux descendant des sommets des deux tours au même instant se dirigent du même vol et parviennent dans le même temps. Quelles sont les distances horizontales du centre de la fontaine aux deux tours ? ». Résoudre ce problème.

14 [Activité] D'autres théorèmes

On considère un triangle $\Delta\, ABC$ rectangle en *A* et on trace la hauteur issue du sommet A.

a. Montrer que les trois triangles $\Delta\, ABC$, $\Delta\, ABH$ et $\Delta\, ACH$ sont semblables.

b. Déduire de **a.** la proportion suivante : $\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$, est connue sous le nom de **théorème de la hauteur**. L'énoncer comme un théorème avec hypothèse(s) et conclusion(s).

c. Déduire de **a.** les proportions suivantes : $\frac{\overline{AB}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ et $\frac{\overline{AC}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. connues sous le nom de **théorème d'Euclide**. Les énoncer comme un théorème avec hypothèse(s) et conclusion(s).

d. En s'aidant du théorème d'Euclide, montrez que $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.

15 [Aller plus loin] Les pythagoriciens

Voir la présentation (pts 1 à 9) : http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-pythagore-vie-video

a. Quand a vécu Pythagore et où a-t-il vécu ?

b. Citer un mathématicien contemporain de Pythagore.

c. Pourquoi les mathématiques ont-elles commencé à se développer à Babylone ?

d. Citer trois domaines auxquels Pythagore s'est intéressé.

e. Citer trois détails de sa vie qu'on peut qualifier de « particuliers ».

f. Pourquoi les Égyptiens se servaient de la corde à 13 nœuds ?

g. Que signifie le mot « hécatombe »?

h. Comment s'appelle le livre considéré comme le livre majeur de la géométrie ? Qui l'a écrit ?

i. Comment s'appelle le symbole par lequel on pense que les Pythagoriciens se reconnaissaient ?

j. Qu'est-ce que le disciple Hippase de Métaponte a révélé au monde ? Pourquoi cela a-t-il eu autant de répercussions chez les pythagoriciens ?

16 [Aller plus loin] La crise des irrationnels

1 Voir la suite et fin de la présentation (pts 19 à 24) : http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-pythagore-vie-video

2 L'une des conséquences majeures du théorème de Pythagore est l'émergence de **grandeurs incommensurables** entre elles ; qu'entend-t-on par là ?

17 [Aller plus loin] Connaissances historiques et géographiques

Nous avons jusque-là abordé divers aspects de type « histoire et culture mathématique ».

Considérons :

a. les civilisations suivantes : Mésopotamie, Égypte, Romains, Grèce Antique, Arabe ;

b. les personnages historiques suivants : Thalès, Viète, Al-Khwarzimi, Pythagore ;

c. * les événements historiques : découverte du zéro indien, formalisation des nombres réels, mesure du rayon de la Terre, découverte des nombres irrationnels, naissance de l'écriture.

Représenter toutes ces informations sur une chronologie et sur une « carte du monde vide » .

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 45 à 55

1 [Souvenirs] Figures en géométrie

Le mot « géométrie » vient du grec *gê*, la terre et *metron*, mesure. On ne peut pas représenter un objet géométrique exactement (Comment dessiner sur une page une ligne qui n'a qu'une longueur et pas de largeur ?). On se contente donc de représenter ces objets sous forme de **figure** ou de **schéma**, qui nous proposent une représentation approximative d'une réalité géométrique idéale (Qu'est-ce qu'un point ?). On ne peut donc jamais être certain d'une propriété géométrique à partir d'un tel schéma, sauf si une légende explicite (« Ci-dessous un carré ...») ou des codages particuliers (par exemple pour indiquer un angle droit ou des segments de mêmes longueurs) nous l'autorisent. Il s'agit de déduire ces propriétés à partir des informations connues. Par exemple, si on voit deux angles qui ont l'air égaux sur une figure, on ne peut pas pour autant affirmer qu'ils le sont; il faut le démontrer si c'est possible.

2 [A savoir] Objets géométriques du plan

Notions de base avec leurs notations

Pour pouvoir commencer à faire de la géométrie dans un cours de mathématique, nous devons accepter quelques **notions de base** et nous mettre d'accord sur la façon de les noter. On admet ainsi connaître le **plan**, les **points**, les **droites**, les demi-droites.

☐ **Le plan** peut être matérialisé par une surface plane dont les dimensions seraient infinies. Par exemple, une feuille de papier posée sur une table peut être considérée comme une petite portion de plan.

☐ Les **points** sont les éléments du plan, qu'on note par des majuscules : A, B, C, ...

☐ On note les **droites** par des minuscules d, d_1, d_2 ou par AB pour la droite passant par les points A et B (qu'on note aussi parfois d_{AB}).

☐ Une **demi-droite** est une partie infinie d'une droite, limitée par un point. Pour noter la demi-droite issue de A et passant par B, on note $[AB$.

☐ Un **segment de droite** est une partie finie d'une droite limitée par deux points appelés les extrémités du segment. On note $[AB]$ le segment qui relie les points A et B.

On admet également savoir manipuler des ensembles de points, les notions d'**appartenance**, d'**union** et d'**intersection**, ainsi que de **distance entre deux points**.

☐ La **distance** entre deux objets F et G est la mesure du plus petit segment reliant un point de F à un point de G. Le nombre représentant la **longueur du segment** $[AB]$ se note $\overline{AB}$.

☐ Deux droites sont **confondues** si elles possèdent exactement les mêmes points.

☐ Deux droites d_1 et d_2 sont **parallèles** si elles ne possèdent pas de point commun ; on note $d_1 \| d_2$.

☐ Deux droites sont **sécantes** si elles possèdent un unique point commun.

Définitions de base sur les angles

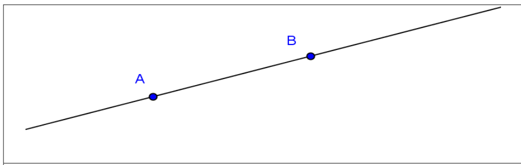
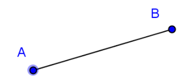
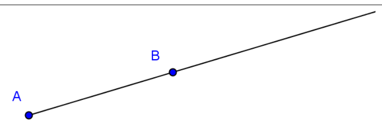
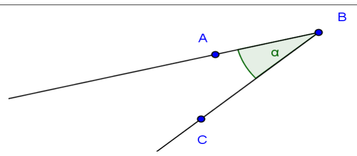
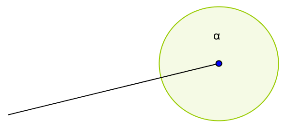
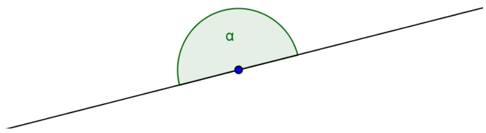
Nous avons également besoin de quelques **définitions de base**.

☐ Un **angle** est une partie infinie du plan limitée par deux demi-droites $[BC$ et $[BA$ issues d'un même point B appelé sommet de l'angle (en fait, une telle situation définit deux angles !) ; on note $\widehat{ABC}$ si B est le sommet de l'angle.

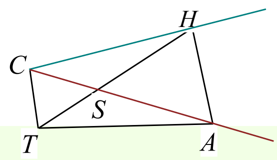
☐ Un **angle plein** est un angle (non vide) construit à partir de deux mêmes demi-droites.

☐ Un **angle plat** est un angle construit à partir de deux demi-droites issues d'un même point et qui conjointement forment une droite.

Illustrations

	**droite** d_{AB} ou AB
	**segment** $[AB]$
	**demi-droite** $[AB$
	**angle α** = $\widehat{ABC}$
	**angle plein**
	**angle plat**

Nommer un angle



Exemple : nommer l'angle marqué en violet sur la figure ci-contre

Le sommet de l'angle est le point C : c'est la lettre centrale et les côtés de l'angle sont les demi-droites $[CH$ et $[CS$ (ou $[CA$).
Cet angle peut se nommer et se noter ainsi : $\widehat{SCH}$, $\widehat{HCA}$, $\widehat{ACH}$ ou $\widehat{HCS}$.

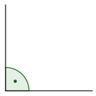
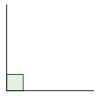
Mesure d'un angle

Nous utilisons le degré comme unité de mesure d’un angle, en choisissant qu'un angle plat mesure 180 degrés, ce qu'on note 180°.

Différence entre « angle » et « mesure d'un angle »

Un angle est un objet géométrique alors que sa mesure est un nombre (réel positif). Il faudrait en principe, pour ne pas induire de confusion, adopter des notations et un vocabulaire différents pour l'angle et pour sa mesure, de même qu'il faudrait distinguer les cas où deux angles sont égaux de ceux où leurs mesures sont égales. Pourtant, par abus de langage dans un souci de simplification, on admet que le contexte suffit généralement à distinguer les cas où on considère l'angle ou sa mesure, qu'on note donc de la même façon, à l'aide des minuscules grecques: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$. De même, on devrait dire de deux angles qui ont la même mesure qu'ils sont **isométriques**, alors qu'on dit souvent par abus de langage qu'ils sont égaux.

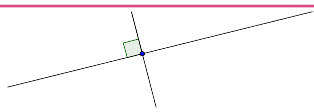
Angles particuliers et leurs mesures

Soit un angle plat de sommet S. Si on coupe l'angle plat en deux parties égales avec une demi-droite issue de S, on obtient deux **angles droits**.
La mesure d'un angle droit α est égale à 90° ; dans ce cas, on dit « alpha est égal à 90° » et on écrit $\alpha = 90°$.
On note un angle droit comme ceci:  ou comme cela : 

La mesure d'un angle plat vaut 180° et celle d'un angle plein vaut 360°.

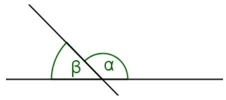
Droites perpendiculaires

Deux droites d_1 et d_2 sont **perpendiculaires** si elles se coupent à angle droit ; on note $d_1 \perp d_2$



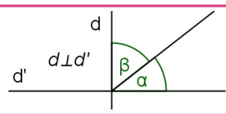
Définition « Angles supplémentaires »

Dans cette situation, où la somme des deux angles α et β forment un angle plat, c'est-à-dire que $\alpha + \beta = 180°$, on dit que α et β sont **supplémentaires**.



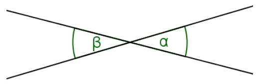
Définition « Angles complémentaires »

Dans cette situation, où la somme des deux angles α et β forment un angle droit, c'est-à-dire que $\alpha + \beta = 90°$, on dit que α et β sont **complémentaires**.



Définition « Angles opposés »

Dans cette situation, où les deux droites sont sécantes, on dit que α et β sont **opposés** par le sommet.

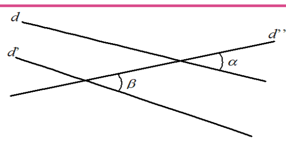


Théorème « Angles opposés »

Si deux angles α et β sont opposés, alors $\alpha = \beta$.

Définition « Angles correspondants »

Dans cette situation, où les trois droites d, d' et d'' ne sont pas toutes trois parallèles, on dit que α et β sont des angles **correspondants**.

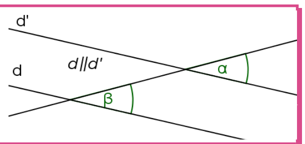


Remarque : cette situation définit en fait quatre paires d'angles correspondants !

Axiome « Angles correspondants »

Soient deux droites d et d' et α et β deux angles correspondants définis sur ces deux droites par une troisième droite sécante quelconque. Alors on a :

$\alpha = \beta$ si et seulement si d et d' sont parallèles

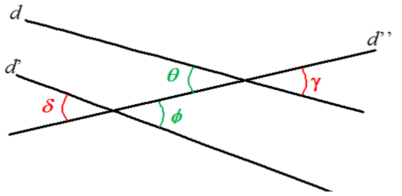


Rappel : « si et seulement si » signifie une double implication qu'on écrit également ⇔

Remarque: il existe des constructions alternatives de la géométrie du plan dans lesquelles on choisit un autre axiome et où cette équivalence est un théorème qu'on peut démontrer.

Définitions « Angles alternes-internes » et « Angles alternes-externes »

Dans cette situation, où les trois droites d ; d' et d'' sont sécantes, on dit que θ et ϕ sont **alternes-internes** et que γ et δ sont **alternes-externes.**

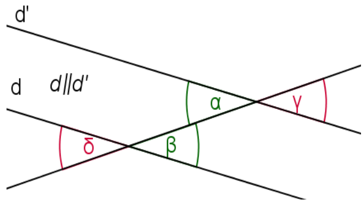


Remarque : cette situation définit en fait deux paires d'angles alternes-internes et deux paires d'angles alternes-externes.

Remarque: dans la situation ci-dessus, θ et γ sont des angles opposés par leur sommet tandis que θ et δ sont des angles correspondants.

Théorèmes « Angles alternes-internes » et « Angles alternes-externes »

Soient deux droites d et d' et α et β deux angles alternes-internes définis sur ces deux droites par une troisième droite sécante quelconque. Alors on a : $d \parallel d' \Leftrightarrow \alpha = \beta$.
Soient deux droites d et d' et γ et δ deux angles alternes-externes définis sur ces deux droites par une troisième droite sécante quelconque. Alors on a :
$d \parallel d' \Leftrightarrow \gamma = \delta$



Voir les exercices 1 à 8

3 [Souvenirs] Polygones

Définition

- ☐ Un **polygone** (du grec poly-plusieurs et gônia-angle) est une figure géométrique du plan qui est constituée de n points reliés entre eux par une ligne polygonale fermée simple (sans croisement). Les points sont les **sommets** et les segments de la ligne entre deux points les **côtés** du polygone. Chaque sommet définit avec ses deux côtés adjacents un angle.
- ☐ Un **polygone** est **régulier** si tous ses angles sont égaux ; un polygone régulier a 3 côtés est un **triangle équilatéral**, à 4 un **carré**, à 5 un **pentagone**, à 6 un **hexagone**, à 7 un **heptagone**, à 8 un **octogone**, à 9 un **ennéagone** (ou **nonagone**), à 10 un **décagone**, à 12 un **dodécagone**, etc...
- ☐ Un **triangle** est un polygone quelconque à 3 côtés.
- ☐ Un **quadrilatère** est un polygone quelconque à 4 côtés.
- ☐ Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.
- ☐ Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de mesures égales.
- ☐ Un **carré** est un losange rectangle (ou un rectangle qui a côtés égaux).
- ☐ Un **trapèze** est un quadrilatère qui a une paire de côtés parallèles.
- ☐ Un **parallélogramme** est un quadrilatère qui a deux paires de côtés parallèles.

Remarque: il est possible de donner une définition plus restrictive de rectangle en ne demandant « que » 3 angles droits ; on peut alors démontrer que le 4e angle est aussi forcément droit.

Théorème « Parallélogramme » [non démontré]

Les longueurs des côtés opposés d'un parallélogramme sont de même mesure.

Surface et aire

Une **surface** est un ensemble de points du plan délimités par une ligne (polygonale ou non). L'**aire** est un nombre positif qui mesure une surface.

Remarque : on considère connus les théorèmes qui permettent de calculer les aires délimitées par les polygones dont on vient de donner les définitions, ainsi que leurs démonstrations.

Théorème « Aires » [non démontré]

L'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur de la base et de la hauteur. L'aire d'un triangle est égale au produit de la longueur de la base et de la hauteur, divisé par 2.

Voir les exercices 9 à 11

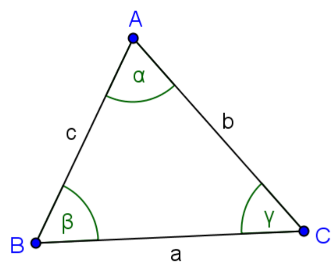
4 [A savoir] Triangles

Notations

Un **triangle** de **sommets** A, B et C, où A, B et C sont des points non alignés du plan, est la réunion des segments de droites $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$. Ces trois segments sont appelés les **côtés du triangle**.

On note ce triangle $\Delta\, ABC$.

- ☐ α désigne l'angle de sommet A, noté $\widehat{BAC}$; α désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ β désigne l'angle de sommet B, noté $\widehat{ABC}$; β désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ γ désigne l'angle de sommet C, noté $\widehat{BCA}$; γ désigne aussi la mesure de l'angle
- ☐ a est la longueur du côté opposé à l'angle α ; elle est aussi notée $\overline{BC}$
- ☐ b est la longueur du côté opposé à l'angle β ; elle est aussi notée $\overline{AC}$
- ☐ c est la longueur du côté opposé à l'angle γ ; elle est aussi notée $\overline{AB}$



Remarque: comme pour les angles et leurs mesures, on confond souvent les côtés et leurs longueurs. Un côté est un segment de droite, donc un objet géométrique, alors que sa longueur est un nombre. En principe, on devrait toujours prendre garde à les différencier en utilisant des notations spécifiques, mais comme souvent en mathématiques, une fois qu'on a compris ces différences, on a tendance à simplifier et à utiliser la même notation pour des objets différents.

Définitions « Triangle isocèle, équilatéral, rectangle »

☐ Un triangle est **isocèle** si et seulement si deux de ses côtés sont de longueurs égales.
☐ Un triangle est **équilatéral** si et seulement si ses trois côtés sont de longueurs égales.
☐ Un triangle est **rectangle** si et seulement si un de ses angles est droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé **l'hypoténuse** et les deux autres les **cathètes**.

Remarque: « isocèle » vient du grec *iso*, même et *skelos*, jambes (!) et équilatéral du latin *aequilateralis*.

Théorème « Triangles isocèles » [non démontré]

$\Delta\, ABC$ est isocèle avec $\overline{AB} = \overline{AC}$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$

Remarque : ce théorème pourtant « naturel » ne peut être démontré à ce stade ; nous avons besoin d'autres outils appelés « Cas d'isométries des triangles » qui seront étudiés en 2e.

Théorème « Triangles équilatéraux »

$\Delta\, ABC$ est équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux à 60°.

5 [A savoir] Sommes d'angles

Théorème « Somme des angles d'un triangle, ou $\sum \alpha \Delta = 180$ »

Si $\Delta\, ABC$ est un triangle, alors la somme de ses angles vaut 180°.

Exemple : le triangle $\Delta\, PAF$ est tel que $\widehat{PAF}$ = 67° et $\widehat{FPA}$ = 56°. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{PFA}$?

La somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°.

$\widehat{PFA} + \widehat{PAF} + \widehat{FPA} = 180°$.

$\widehat{PFA} = 180° - \widehat{PAF} - \widehat{FPA}$

$\widehat{PFA} = 180° - 67° - 56° = 57°$. Donc l'angle $\widehat{PFA}$ mesure 57°.

Théorème « Somme des angles d'un quadrilatère»

Si $ABCD$ est un quadrilatère, alors la somme de ses angles vaut 360°.

Voir les exercices 12 à 30

6 [A savoir] Triangles semblables

Définition « Triangles semblables»

Deux triangles sont **semblables** si et seulement si leurs angles sont égaux deux à deux.

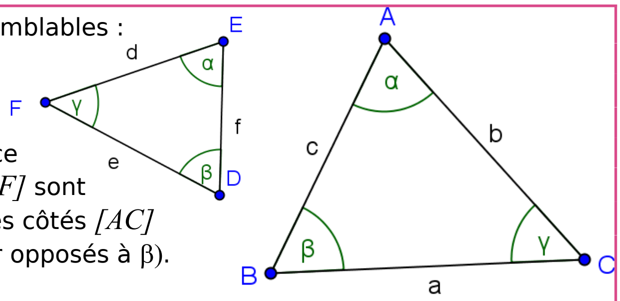
Notation: pour indiquer que $\Delta\, ABC$ et $\Delta\, DEF$ sont semblables, on écrit : $\Delta\, ABC \sim \Delta\, DEF$

Remarque : en utilisant le théorème « $\sum \alpha \Delta = 180$ », on peut facilement montrer que si deux triangles ont deux paires d'angles angle égaux deux à deux, leurs troisièmes angles sont également égaux, et qu'ils sont donc semblables.

Définition « Côtés correspondants dans des triangles semblables»

Soit ΔABC et ΔDEF deux triangles semblables :

On dit que les côtés *[AB]* et *[DE]* sont des **côtés correspondants,** car ils sont opposés à un même angle, en l'occurrence l'angle γ ; de même, les côtés *[BC]* et *[DF]* sont **correspondants,** (car opposés à α) et les côtés *[AC]* et *[EF]* également **correspondants** (car opposés à β).



7 [A savoir] Théorèmes de Thalès

Théorème « Thalès »

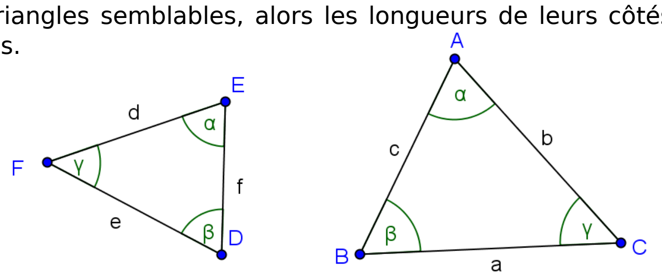
Premier énoncé

Si ΔABC et ΔDEF sont deux triangles semblables, alors les longueurs de leurs côtés correspondants sont proportionnelles.

Autre formulation

Si $\widehat{ABC}=\widehat{EDF}$, $\widehat{BCA}=\widehat{DFE}$
et $\widehat{BAC}=\widehat{DEF}$,

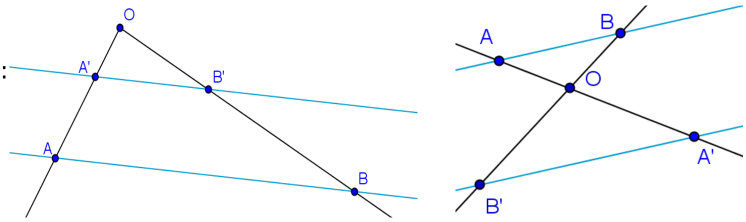
alors : $\frac{c}{f}=\frac{a}{e}=\frac{b}{d}$



Second énoncé

Dans les situations ci-contre :
si $[AB] \parallel [A'B']$

alors : $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$



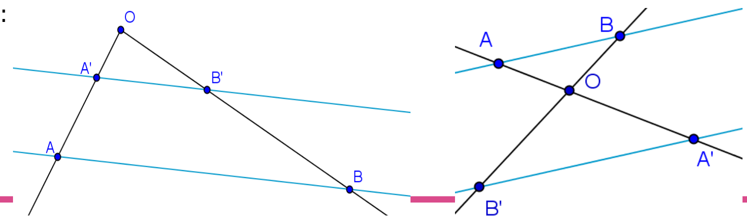
Remarque: ces deux énoncés sont équivalents grâce à l'axiome des angles correspondants

Théorème « Réciproque du second énoncé du théorème de Thalès »

Dans les situations ci-contre :

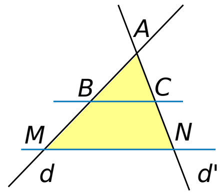
si $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$

alors $[AB] \parallel [A'B']$



8 [A savoir] Utiliser Thalès

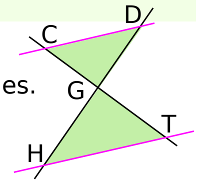
Calculer une longueur



Exemple 1 : sur la figure ci-contre, les droites d_{BC} et d_{MN} sont parallèles. $\overline{AB}$ = 3 cm ; $\overline{AN}$ = 4 cm et $\overline{AM}$ = 7 cm.
Calculer la longueur $\overline{AC}$.

Les droites d_{BM} et d_{CN} sont sécantes en A et les droites d_{MN} et d_{BC} sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$, soit $\frac{3}{7} = \frac{\overline{AC}}{4} = \frac{\overline{BC}}{\overline{MN}}$.

$\overline{AC} = \frac{3 \cdot 4}{7} = \frac{12}{7}$ donc $\overline{AC} = \frac{12}{7}$ cm.



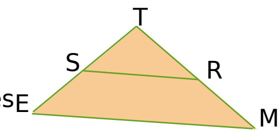
Exemple 2 : sur la figure ci-contre, les droites d_{CD} et d_{HT} sont parallèles. On donne $\overline{DG}$ = 25mm ; $\overline{GH}$ = 45mm ; $\overline{CG}$ = 20mm et $\overline{HT}$ = 27mm.
Calculer $\overline{GT}$ et $\overline{CD}$.

Les droites d_{DH} et d_{CT} sont sécantes en G.
Les droites d_{CD} et d_{HT} sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{GC}}{\overline{GT}} = \frac{\overline{GD}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{HT}}$, soit $\frac{20}{\overline{GT}} = \frac{25}{45} = \frac{\overline{CD}}{27}$.

Calcul de $\overline{GT}$: $25 \cdot \overline{GT} = 45 \cdot 20$.
$\overline{GT} = \frac{45 \cdot 20}{25}$
donc $\overline{GT}$ = 36 mm.

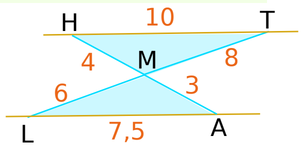
Calcul de CD : $25 \cdot 27 = 45 \cdot \overline{CD}$.
$\overline{CD} = \frac{25 \cdot 27}{45}$
donc $\overline{CD}$ = 15 mm.

Vérifier le parallélisme



Exemple 1 : sur la figure ci-contre, $\overline{TR}$ = 11 cm ; $\overline{TS}$ = 8cm ; $\overline{TM}$ = 15 cm et $\overline{TE}$ = 10 cm. Les droites d_{RS} et d_{ME} sont-elles parallèles ?

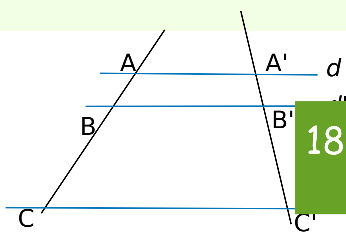
Les droites d_{ES} et d_{MR} sont sécantes en T. D'une part, $\frac{\overline{TR}}{\overline{TM}} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$, et d'autre part $\frac{\overline{TS}}{\overline{TE}} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$. On constate que $\frac{\overline{TR}}{\overline{TM}} \neq \frac{\overline{TS}}{\overline{TE}}$. Par la contraposée du théorème de Thalès (2e énoncé), les droites d_{RS} et d_{ME} ne sont pas parallèles.



Exemple 2 : les droites d_{AL} et d_{HT} sont-elles parallèles ?

On a : $\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{4}{3}$, $\frac{\overline{MT}}{\overline{ML}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ et $\frac{\overline{HT}}{\overline{LA}} = \frac{10}{7{,}5} = \frac{4}{3}$, donc $\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{MT}}{\overline{ML}} = \frac{\overline{HT}}{\overline{LA}}$

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès (2e énoncé), les droites d_{AL} et d_{HT} sont parallèles.

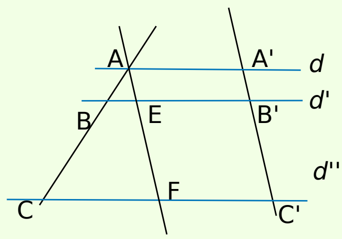


Situation particulière

Exemple : sur la figure ci-contre, les droites d, d' et d'' sont parallèles. $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{AA'} = 5$ cm, $\overline{CC'} = 9$ cm et $\overline{A'C'} = 7$ cm. Calculer $\overline{A'B'}$ et $\overline{BB'}$.

On commence par ajouter une droite supplémentaire passant par A et parallèle à $d_{A'B'}$, ainsi que les points E et F.

On crée ainsi une situation dans laquelle on a deux triangles semblables $\Delta\ ACF$ et $\Delta\ ABE$



On peut donc appliquer le théorème de Thalès : d_{BC} et d_{EF} sont sécantes en A. Les droites d_{BE} et d_{CF} sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès, on a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$ soit

$\frac{3}{3+6} = \frac{\overline{AE}}{7} = \frac{\overline{BE}}{9-5}$, d'où $\overline{AE} = \frac{3 \cdot 7}{9} = \frac{7}{3}$ et $\overline{BE} = \frac{3 \cdot 4}{9} = \frac{4}{3}$.

On a donc : $\overline{A'B'} = \overline{AE} = \frac{7}{3}$ cm par le théorème « parallélogramme » et

$\overline{BB'} = \overline{BE} + \overline{EB'} = \overline{BE} + \overline{AA'} = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}$ cm .

Voir les exercices 31 à 44

9 [A savoir] Théorème de Pythagore et sa réciproque

Théorème « Pythagore »

Si le triangle $\Delta\, ABC$ est rectangle en A, alors on a $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ (ou $c^2+b^2=a^2$).

Remarque: dans son livre « *The Pythagorean proposition* », Elisha Scott Loomis a réuni 370 démonstrations différentes du théorème de Pythagore !

Théorème « Contraposée du théorème de Pythagore »

Si dans un triangle $\Delta\, ABC$ on a $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\neq\overline{BC}^2$ (ou $c^2+b^2\neq a^2$), alors $\Delta\, ABC$ n'est pas rectangle en A.

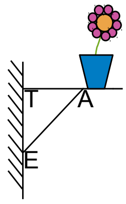
Théorème « Réciproque du théorème de Pythagore »

Si dans un triangle $\Delta\, ABC$ on a $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ (ou $c^2+b^2=a^2$), alors il est rectangle en A.

Théorème « Contraposée de la réciproque du théorème de Pythagore »

Si $\Delta\, ABC$ n'est pas rectangle en A, alors on a $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\neq\overline{BC}^2$ (ou $c^2+b^2\neq a^2$).

10 [A savoir] Utiliser Pythagore



Exemple 1 : sur un mur vertical, Arnaud a installé une étagère pour y poser des pots de fleurs. Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : $\overline{AT}$ = 42cm, $\overline{AE}$ = 58cm et $\overline{TE}$ =40 cm. L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifier.

Le plus grand côté est $\overline{AE}$; c'est donc le « candidat » pour être l'hypothénuse.

On calcule $\overline{AT}^2+\overline{TE}^2=42^2+40^2=3364$. Or $3364=58^2$; on a donc :

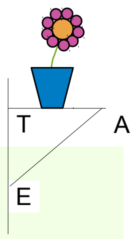
$\overline{AT}^2+\overline{TE}^2=\overline{AE}^2$. Par la <u>réciproque du théorème de Pythagore</u>, le triangle $\Delta\,ATE$ est rectangle en T . Et donc l'étagère est horizontale.

Exemple 2 : sur ce même mur vertical, Arnaud a installé une autre étagère pour y poser ses pots de fleurs. Les mesures qu'il a utilisées sont les suivantes : $\overline{AT}$ = 40cm ; $\overline{AE}$ = 60cm et $\overline{TE}$ =50 cm. L'étagère d'Arnaud est-elle horizontale ? Justifier.

Le plus grand côté est $\overline{AE}$; c'est donc le « candidat » pour être l'hypothénuse.

On calcule $\overline{AT}^2+\overline{TE}^2=40^2+50^2=4100$. Or $4100\neq60^2$; on a donc :

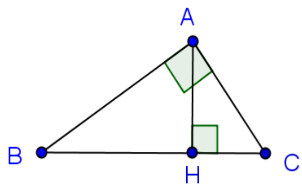
$\overline{AT}^2+\overline{TE}^2\neq\overline{AE}^2$. Par la <u>contraposée du théorème de Pythagore</u>, le triangle $\Delta\,ATE$ est n'est pas rectangle en T . Et donc l'étagère n'est pas horizontale.



Exemple 3 : sur un mur vertical, Arnaud souhaite installer une étagère $\overline{AT}$ de longueur 20 cm qu'il a récupérée, de telle sorte que $\Delta\,ATE$ soit rectangle et isocèle. Quelle doit être la longueur du côté $\overline{AE}$? Justifier.

Le $\Delta\,ATE$ est rectangle isocèle, donc $\overline{TE}$ = $\overline{AT}$ =20 et on peut calculer, <u>grâce au théorème de Pythagore</u> : $\overline{AE}^2=20^2+20^2=800$. Donc $\overline{AE}=\sqrt{800}=\sqrt{100\cdot4\cdot2}=10\cdot2\cdot\sqrt{2}=20\sqrt{2}\simeq20.3\,cm$.

11 [A savoir] Théorèmes d'Euclide et de la hauteur



Théorème « hauteur »

Si le triangle $\Delta\,ABC$ est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue du sommet A, alors on a $\overline{AH}^2=\overline{BH}\cdot\overline{CH}$.

Théorème « Euclide »

Si le triangle $\Delta\,ABC$ est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue du sommet A, alors on a $\overline{AB}^2=\overline{BH}\cdot\overline{BC}$ et $\overline{AC}^2=\overline{CH}\cdot\overline{BC}$.

Voir les exercices 45 à 55

Exercices d'entraînement

Notions de base – angles

1 Que peut-on dire des angles :

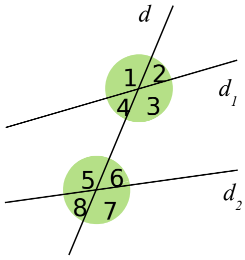
a. 1 et 5 ?

b. 3 et 5 ?

c. 1 et 4 ?

d. 4 et 6 ?

e. 3 et 7 ?

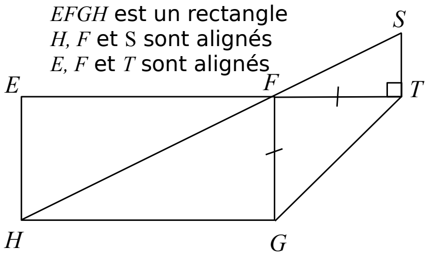


2 Nommer deux paires d'angles de la figure ci-dessous qui soient :

a. alternes-internes ;

b. alternes-internes de même mesure ;

c. correspondants ;



3 Dans chaque cas, dire si les droites d_1 et d_2 sont ou non parallèles et pourquoi :

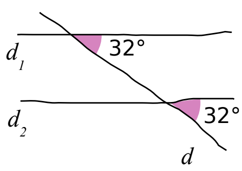


Figure 1

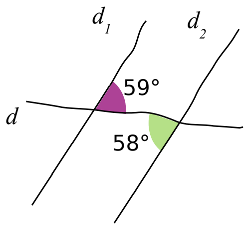
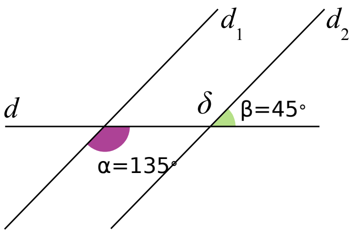


Figure 2

4

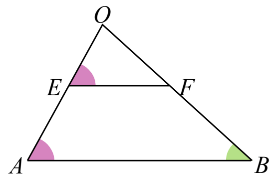


a. Déterminer δ .

b. Les droites d_1 et d_2 ont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

c. Déterminer d'autres angles formés par des droites parallèles.

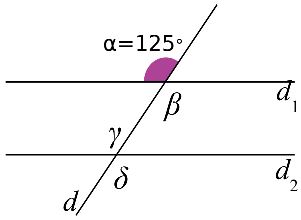
5 Sur la figure ci-contre, les angles $\widehat{BAE}$ et $\widehat{FEO}$ sont égaux à 58°.



a. Que peut-on dire des droites d_{EF} et d_{AB} ? Justifier la réponse.

b. On sait de plus que la mesure de l'angle $\widehat{FBA}$ est 45°. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OFE}$. Justifier la réponse.

6

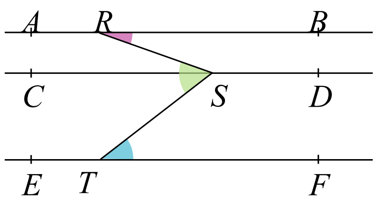


Sur la figure ci-dessus, les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

a. Donner β . Justifier la réponse.

b. Donner d'autres angles dont la mesure est de 125°. Justifier la réponse.

7



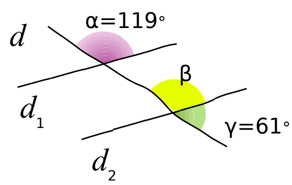
Sur la figure ci-dessus :

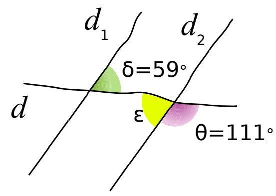
i les droites d_{AB}, d_{CD} et d_{EF} sont parallèles ;

ii R est un point de la droite d_{AB}, S est un point de la droite d_{CD} et T est un point de la droite d_{EF} tels que $\widehat{BRS}$ = 20° et $\widehat{RST}$ = 57°.

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{STF}$.

8 Dans chaque cas, préciser si les droites d_1 et d_2 sont ou non parallèles et pourquoi :

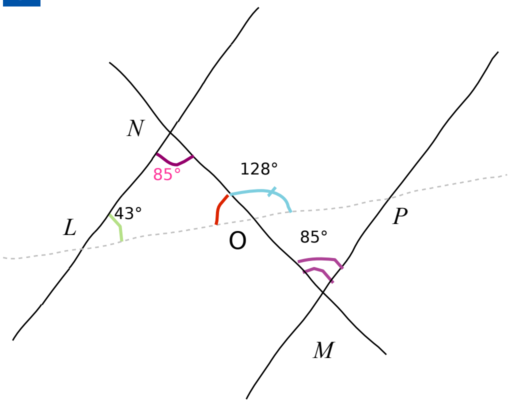




Voir la théorie 1 à 2

Polygones

9



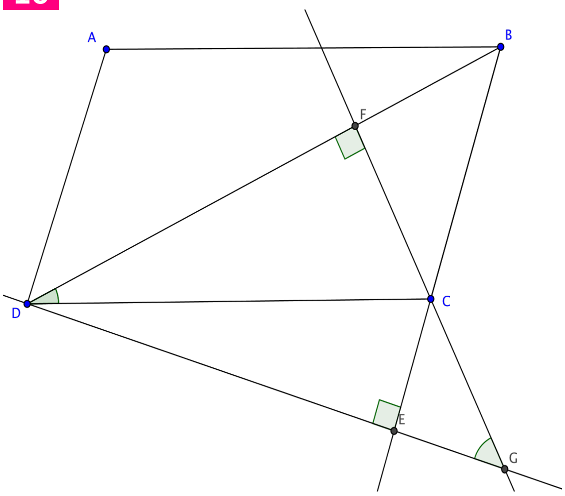
La figure est tracée à main levée. L, O, P et N, O, P sont des points alignés.

a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{LON}$. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{ONL}$.

b. Déterminer alors si les droites d_{LN} et d_{MP} sont parallèles.

c. Sachant que $\overline{LN}=\overline{MP}$, déterminer la nature du quadrilatère $LNPM$.

10



$ABCD$ est un parallélogramme et $\widehat{BDC}=30°$, $\widehat{BAD}=110°$. Déterminer $\widehat{DGC}$.

11 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

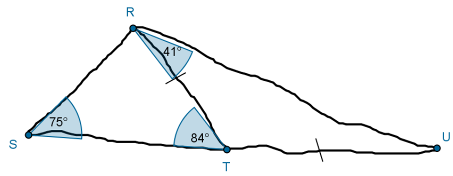
a. Un rectangle est un parallélogramme.

b. Un carré est un rectangle.

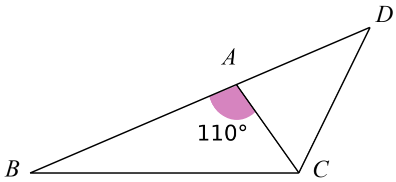
Voir la théorie 3

Triangles

12 Voici un croquis à fait à main levée sur lequel sont représentés deux triangles ΔRST et ΔRTU. Les points S, T et U sont-ils alignés ?



13



La figure ci-dessus est telle que :

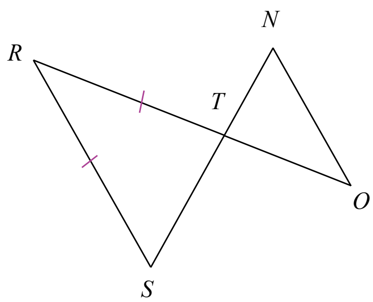
- B, A et D sont des points alignés ;
- $\widehat{BAC} + \widehat{ACD} = 180°$ et $\widehat{BAC} = 110°$.

a. Montrer, en justifiant, que les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{ACD}$ sont égaux à 70°.

b. Montrer alors que le triangle ΔADC est isocèle.

c. De plus, l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 50°. Montrer, en justifiant, que $\widehat{BCA} + \widehat{ADC} = 90°$.

14



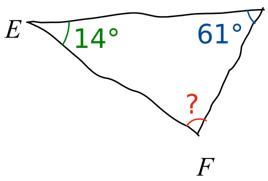
La figure ci-dessus est telle que :

- les droites d_{RO} et d_{SN} sont sécantes en T ;
- le triangle ΔRST est isocèle en R ;
- les droites d_{RS} et d_{NO} sont parallèles.

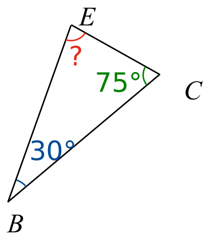
Montrer que le triangle ΔTNO est isocèle.

15 Dans chaque cas, calculer la mesure de l'angle inconnu :

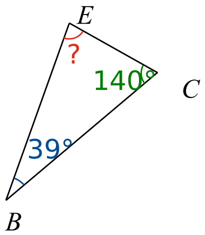
a.



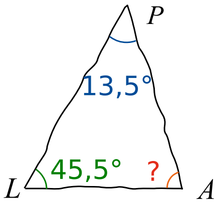
b.



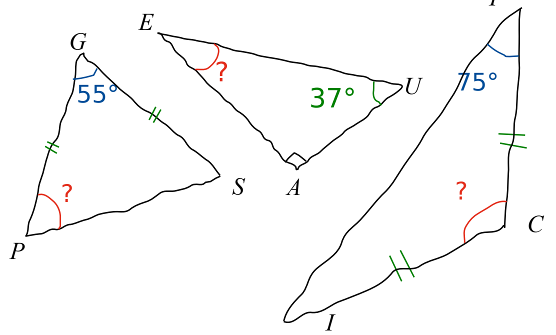
c.



d.



16 Dans chaque cas, calculer la mesure de l'angle demandé.



17

a. ΔPIF est un triangle tel que $\widehat{IFP} = 44°$ et $\widehat{FPI} = 40°$. Calculer la mesure de $\widehat{PIF}$.

b. ΔCOL est un triangle tel que $\widehat{CLO} = 5{,}5°$ et $\widehat{LCO} = 160{,}5°$. Calculer la mesure de $\widehat{COL}$.

18 Dans chaque cas, tracer un schéma à main levée puis calculer l'angle $\widehat{OUI}$.

a. ΔOUI est rectangle en I et $\widehat{IOU} = 58°$.

b. ΔOUI est isocèle en I et $\widehat{IOU} = 58°$.

c. ΔOUI est isocèle en O et $\widehat{IOU} = 58°$.

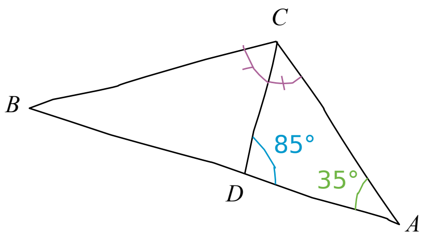
19 Dans chacun des cas suivants, quelle est la nature du triangle ΔABC ? Justifier.

a. $\widehat{BAC} = 28°$ et $\widehat{ABC} = 124°$.

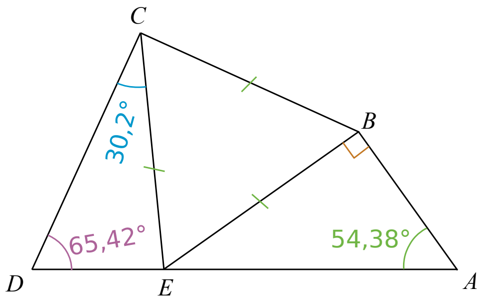
b. $\widehat{BAC} = 37°$ et $\widehat{ABC} = 53°$.

c. $\widehat{ACB} = 60°$ et $BA = BC$.

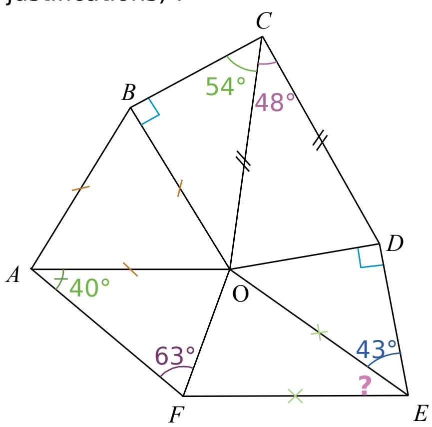
20 Calculer, en justifiant, la mesure de l'angle $\widehat{CBD}$ sachant que les points A, D et B sont alignés.



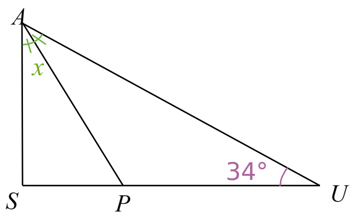
21 En observant la figure ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, Aline affirme que les points D, E et A sont alignés. Qu'en penser ?



22 À partir des données de la figure, calculer la mesure de l'angle $\widehat{OEF}$ (sans justifications) :



23 S, P et U sont trois points alignés :

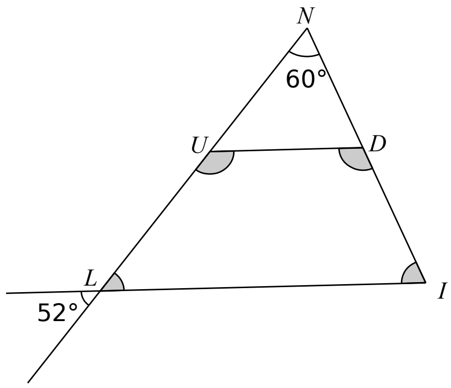


a. Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{USA}$ en fonction de x.

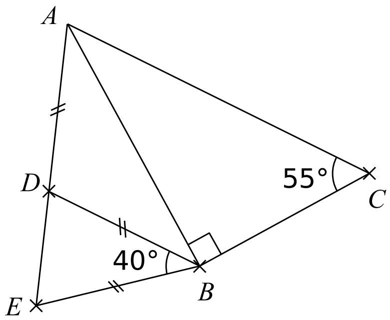
b. Est-il vrai que l'angle $\widehat{SPA}$ mesure 34° de plus que l'angle $\widehat{PAS}$? Justifier.

Exercices d'entraînement

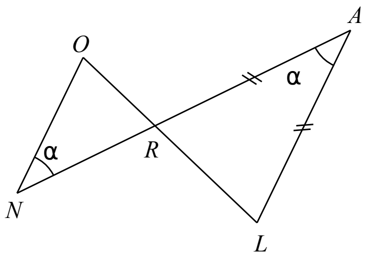
24 Sachant que les droites d_{DU} et d_{IL} sont parallèles, Calculer la mesure de chacun des angles du quadrilatère $LUDI$ en justifiant.



25 Les points A, D et E sont alignés. Démontrer que les droites d_{AC} et d_{DB} sont parallèles.m



26 On considère la figure suivante.



Quelle est la nature du triangle ΔNOR ?

27 $ABCD$ est un carré et O est un point situé à l'intérieur de $ABCD$ tel que ΔAOB soit un triangle équilatéral.

a. Faire un croquis qui contienne tous les objets géométriques et informations données dans l'énoncé.

b. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{COD}$.

28 Paul a construit un triangle isocèle ΔABC de sommet principal A et dont l'angle $\widehat{ABC}$ vaut 61°. Il a placé le point D sur la demi-droite $d_{[AC}$ tel que $\overline{BC}=\overline{CD}$. Il a joint B à D et affirme que le triangle ABD est rectangle.

a. Faire un croquis qui contienne tous les objets géométriques et mesures donnés dans l'énoncé.

b. Paul a-t-il raison ?

29 Énoncer et démontrer un théorème sur la somme des angles d'un quadrilatère.

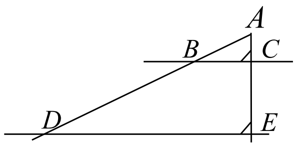
30 Énoncer et démontrer un théorème sur la somme des angles d'un polygone à n côtés.

Voir la théorie 4 à 5

Thalès

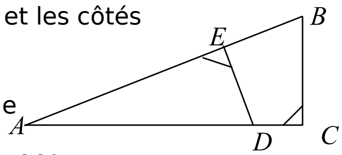
31 On considère une pyramide de base carrée mesurant 440 coudées égyptiennes de côté. Une coudée égyptienne mesure environ 52cm. Thalès mesurait 3,25 coudées de haut. En supposant que les rayons du soleil sont parallèles entre-eux, Thalès trouva que son ombre faisait 3 coudées égyptiennes et que l'ombre de la pyramide faisant 42 coudées. Expliquer comment il en a déduit la hauteur de la pyramide et quelle était cette hauteur ?

32 On suppose que $[BC]\|[DE]$ et $\widehat{BCA} = \widehat{DEC} = 90°$



Identifier les triangles semblables et les côtés correspondants.

33 On suppose que

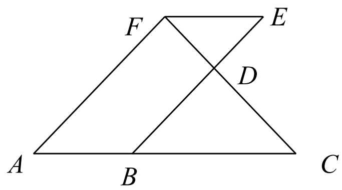


$\widehat{DEA} = 90°$ et $\widehat{ACB} = 90°$

Identifier les triangles

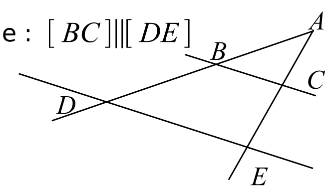
semblables et les côtés correspondants.

34 On suppose que : $[BE]\|[AF]$ et $[AC]\|[EF]$.



Identifier les triangles semblables et les côtés correspondants.

35 On suppose que : $[BC]\|[DE]$

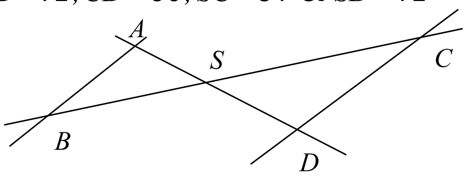


et $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=12$,

$\overline{AE}=18$ et $\overline{BC}=9$

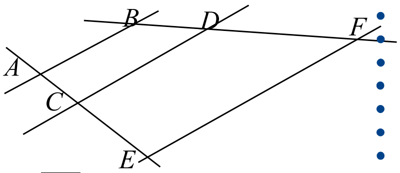
Trouver $\overline{AD}$ et $\overline{DE}$.

36 On suppose que $[AB]\parallel[CD]$, $\overline{AB}=72$, $\overline{CD}=96$, $\overline{SC}=84$ et $\overline{SD}=72$



Trouver $\overline{SA}$ et $\overline{SB}$.

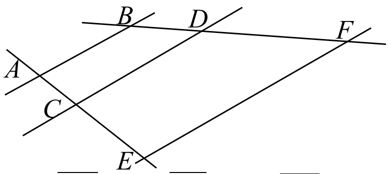
37 On suppose que $[AB]\parallel[CD]$, $[AB]\parallel[EF]$,



$\overline{AC}=10$, $\overline{CE}=15$ et $\overline{BD}=14$

Trouver $\overline{DF}$.

38 On a $[AB]\parallel[CD]$, $[AB]\parallel[EF]$,

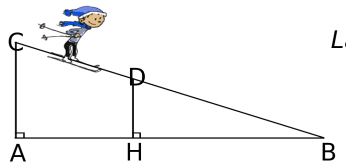


$\overline{AB}=14$, $\overline{AC}=28$, $\overline{CE}=21$, $\overline{BD}=36$ et $\overline{EF}=35$
Trouver $\overline{DF}$ et $\overline{CD}$.

39 Un triangle ΔSEL est tel que $\overline{SE}=6\,\text{cm}$, $\overline{EL}=4\,\text{cm}$ et $\overline{SL}=3\,\text{cm}$. Le point I est le point de la demi-droite $[LS$ tel que $\overline{SI}=5{,}1\,\text{cm}$. La parallèle à la droite d_{EL} passant par I coupe d_{ES} en X. Calculer les longueurs $\overline{SX}$ et $\overline{IX}$.

40 Soit ΔPEM un triangle. A est un point du segment $[PE]$ et B est un point du segment $[PM]$ tels que $\overline{BM}=30\,\text{cm}$, $\overline{AB}=30\,\text{cm}$; $\overline{ME}=50\,\text{cm}$. Les droites d_{AB} et d_{ME} sont parallèles. À l'aide du théorème de Thalès, on obtient $\overline{PM}=45\,\text{cm}$.
Vrai ou faux ? Expliquer la démarche.

41 Un skieur dévale, tout schuss, une piste rectiligne représentée ci-dessous par le segment $[BC]$ de longueur 1200 m. À son point de départ C, le dénivelé par rapport au bas de la piste, donné par la longueur $\overline{AC}$, est de 200 m. Après une chute, le skieur est arrêté au point D sur la piste. Le dénivelé, donné par la longueur $\overline{DH}$, est alors de 150 m.

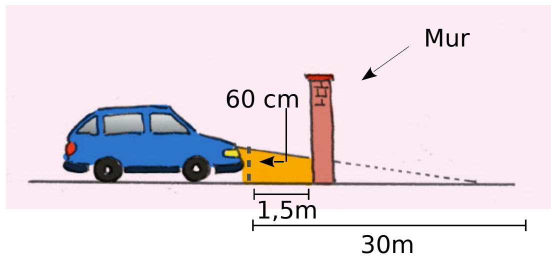


La figure n'est pas à l'échelle.

Calculer la longueur $\overline{DB}$ qu'il lui reste à parcourir.

42 Les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit par temps clair, sur une distance minimale de 30 m.

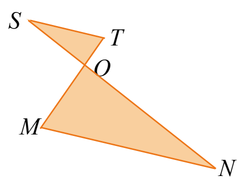
Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Jacques veut tracer un repère sur le mur au fond de son garage.



Les feux de croisement sont à 60 cm du sol.

À quelle hauteur doit-il placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares ?

43 On a :

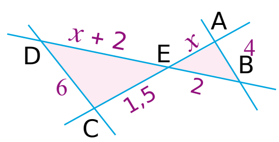


$\overline{OM}$ = 2,8 cm ; $\overline{ST}$ = 2,9 cm
$\overline{ON}$ = 5,4 cm ; $\overline{MN}$ = 5,8 cm
$\overline{OS}$ = 2,7 cm et $\overline{OT}$ = 1,4 cm.

Démontrer que les droites d_{MN} et d_{ST} sont parallèles.

44 L'unité de longueur choisie est le mètre.

a. Pour x = 2,5, les droites d_{AB} et d_{CD} ne sont pas parallèles. Vrai ou faux ? Expliquer la démarche.



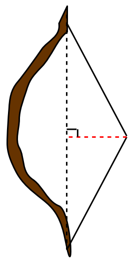
b. Pour x = 1, les droites AB et DC ne sont pas parallèles. Vrai ou faux ? Expliquer la démarche.

Voir la théorie 6 à 8

Pythagore

45 Théo veut franchir, avec une échelle, un mur de 3,50 m de haut devant lequel se trouve un fossé rempli d'eau, d'une largeur de 1,15 m. Il doit poser l'échelle sur le sommet du mur. Quelle doit être la longueur minimum de cette échelle ? Arrondir au cm.

46 Sur un arc, la corde élastique a une longueur de 60 cm au repos



a. Quelle est la nouvelle longueur de la corde si on l'écarte de 11 cm en la tirant par son milieu ? Arrondir au cm.

b. Il est conseillé de ne pas étirer la corde de plus de 8 cm par rapport à sa longueur au repos. Quel est, en cm, l'écartement maximal conseillé quand on la tire par son milieu ?

47 Calculer la mesure, approchée par excès au dixième près, de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 7 cm. En déduire son aire.

48 Un triangle ΔEFG est rectangle en E : $\overline{EG}$ = 7 cm et $\widehat{FGE}$ = 45°.

a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$.

b. Calculer, en justifiant, $\overline{EF}$ et $\overline{FG}$ (arrondir au mm).

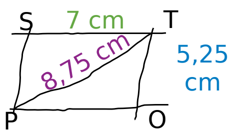
49 Rectangle ou non ?

a. Le triangle ΔXYZ est tel que $\overline{XY}$ =29,8cm ; $\overline{YZ}$ = 28,1cm et $\overline{XZ}$ = 10,2cm. Est-il rectangle ? Justifier.

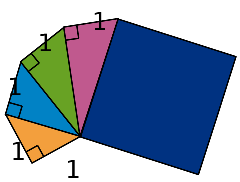
b. Soit le triangle ΔALE tel que :

$\overline{AL}$ = 13cm ; $\overline{LE}$ = 11,2cm ; $\overline{EA}$ = 6,6 cm. Est-il rectangle ? Justifier.

50 On considère le parallélogramme $STOP$ ci-contre dessiné à main levée. Démontrer $STOP$ est un rectangle.



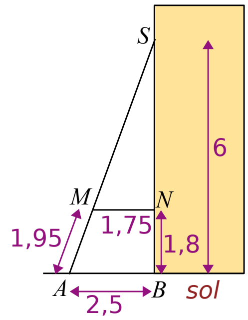
51 Les mesures de la figure sont en cm.



a. Quelle est l'aire du carré bleu ?

b. Procéder de la même façon pour construire un carré d'aire 10 cm^2.

52 Pour consolider un bâtiment, des charpentiers ont construit un contrefort en bois (les mesures sont en mètre) :



a. En considérant que le montant $[BS]$ est perpendiculaire au sol, calculer la longueur $\overline{AS}$.

b. Calculer les longueurs $\overline{SM}$ et $\overline{SN}$.

c. Démontrer que la traverse $[MN]$ est bien parallèle au sol.

53 Les diagonales d'un carré mesurent 12 cm. Calculer l'aire et le périmètre de ce carré.

54 Calculer l'aire d'un triangle équilatéral de 10 cm de côté.

55 Dans un triangle rectangle, une cathète mesure le double de l'autre. Combien de fois l'hypoténuse contient-elle la plus petite des cathètes ?

Voir la théorie 9 à 11

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

56 $ABCD$ est un parallélogramme (dans le sens trigonométrique, inverse des aiguilles d'une montre), $E \in [AD]$ et F= $d_{EC} \cap d_{AB}$.

Déterminer en justifiant précisément.

a. $\widehat{FAE}$ **c.** $\widehat{AEF}$ **e.** $\widehat{BCE}$

b. $\widehat{EFA}$ **d.** $\widehat{BAD}$

57 ΔGTH est un triangle isocèle en G et $\widehat{GTH}$ =50°.

Déterminer en justifiant précisément.

a. $\widehat{TGH}$ **b.** $\widehat{HTG}$

58 ΔDEF est un triangle isocèle en D et $\widehat{EFD}$ =60°. Déterminer en justifiant précisément.

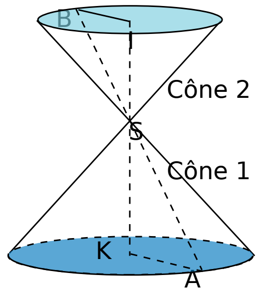
a. $\widehat{FDE}$ **b.** $\widehat{DEF}$

59 ΔDEF est un triangle isocèle en D et $\widehat{DEF}$ =45°. Déterminer en justifiant précisément.

a. $\widehat{EFD}$ **b.** $\widehat{FDE}$

c. Que peut-on dire de plus de ΔDEF ?

60 Les deux cônes de révolution de rayons $[KA]$ et $[IB]$ sont opposés par le sommet.

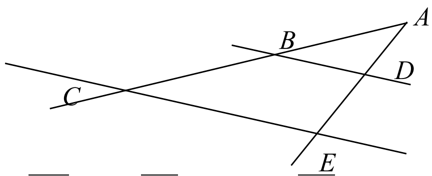


Les droites AB et KI se coupent en S, et de plus BI et KA sont parallèles. On a : $\overline{KA}$ = 4,5 cm, $\overline{KS}$ = 6 cm et $\overline{SI}$ = 4 cm. Calculer $\overline{BI}$.

61 $EURO$ est un parallélogramme tel que $\overline{EO}$ = 5cm et $\overline{OR}$ = 6cm. P est le point de OE qui n'appartient pas à $[OE]$ tel que

$\overline{EP}$ = 3cm. La droite d_{PR} coupe $[EU]$ en A. Calculer les longueurs $\overline{AE}$ et $\overline{AU}$.

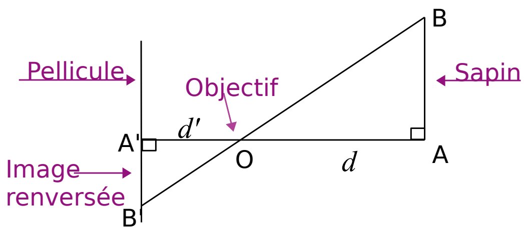
62 On suppose que:



$[BD]\|[CE]$, $\overline{AC}=7$, $\overline{AB}=4{,}9$ et $\overline{CE}=3$.

Que peut-on dire de ΔDBC ?

63 Voici un schéma du fonctionnement d'un appareil photographique argentique :



un objet $[AB]$ situé à une distance d de l'objectif O a une image $[A'B']$ située à une distance d' de O.

a. Démontrer que les droites d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont parallèles.

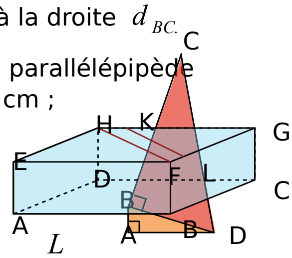
b. Démontrer l'égalité : $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$.

c. Pour un certain appareil, d' = 50 mm. Un sapin d'une hauteur de 12 m se trouve à 15 m de l'objectif. Quelle est la hauteur de l'image qui se forme sur la pellicule ?

64 ΔABC est un triangle rectangle en A tel que $\overline{AB}$ = 12 cm et $\overline{AC}$ = 8 cm.

Le point F est le point du segment $[AC]$ tel que $\overline{AF}$ = 4 cm et le point E est le point de $[AB]$ tel que $\overline{AE}$ = 6 cm. Démontrer que la droite d_{EF} est parallèle à la droite d_{BC}.

65 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $\overline{AB}$= 7 cm ; $\overline{AD}$= 3 cm et $\overline{AE}$ =2,5 cm.



Le point K appartient à l'arête $[GH]$ et le point L appartient à l'arête $[GF]$. On a : $\overline{GK}$ = 6 cm et $\overline{GL}$ = 2,6 cm.

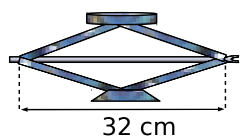
Déterminer, en justifiant, si les droites d_{KL} et d_{HF} sont parallèles ?

66 Un massif de fleurs a la forme d'un triangle rectangle et le jardinier veut l'entourer d'une clôture. Au moment de l'acheter, il s'aperçoit qu'il a oublié de mesurer un des côtés de l'angle droit. Les deux seules mesures dont il dispose sont, en mètres : 6,75 et 10,59.

a. A-t-il besoin d'aller mesurer le côté manquant ?

b. L'aider à calculer la longueur de la clôture qu'il doit acheter.

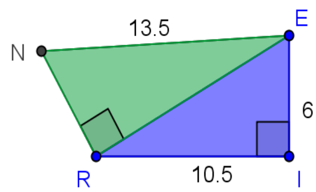
67 Le cric d'une voiture a la forme d'un losange de 21 cm de côté.



À quelle hauteur soulève-t-il la voiture lorsque la diagonale horizontale mesure 32 cm ? Arrondir au mm.

68 Démontrer que $\overline{NR}=\overline{EI}$.

Justifier toutes les étapes.

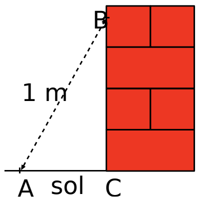


69 ΔTSF est un triangle isocèle en S tel que $\overline{ST}$ = 4,5 cm et $\overline{TF}$ = 5,4 cm.

a. Calculer la longueur de la hauteur relative à la base $[TF]$.

b. En déduire l'aire de ce triangle.

70 Pour apprendre son métier, un apprenti maçon a monté un mur en briques de 0,90 m de hauteur. Son patron arrive pour vérifier son travail : il marque un point B sur le mur à 80 cm du sol et un point A à 60 cm du pied du mur. Il mesure alors la distance entre les points A et B et il obtient 1 m. L'apprenti a-t-il bien construit son mur perpendiculaire au sol ? Justifier.



71 Calculer l'aire et le périmètre d'un trapèze $ABCD$ où $[BC] \parallel [AD]$, tel que $\overline{AB} = 35\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 47\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 82\,\text{cm}$ et dont la hauteur vaut 25 cm.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

56

a. $\widehat{FAE}$ **c.** $\widehat{AEF}$ **e.** $\widehat{BCE}$

b. $\widehat{EFA}$ **d.** $\widehat{BAD}$

57

a. $\widehat{TGH}$ **b.** $\widehat{HTG}$

58

a. $\widehat{FDE}$ **b.** $\widehat{DEF}$

59

a. $\widehat{EFD}$ **b.** $\widehat{FDE}$

c. Que peut-on dire de plus de ΔDEF ?

60 $\overline{BI} = \dfrac{4{,}5 \cdot 4}{6} = 3$ cm.

61 $\overline{AE}$ = 2,25 cm; $\overline{AU}$ = 3,75 cm.

62 Il est isocèle

63

a. d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont perpendiculaires à la même droite $d_{AA'}$ donc elles sont parallèles.

b. $d_{AA'}$ et $d_{BB'}$ sont sécantes en O. d_{AB} et $d_{A'B'}$ sont parallèles. Donc d'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{\overline{d}}{\overline{d'}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$.

c. L'image qui se forme sur la pellicule a une hauteur de 40 mm.

64 Dans le triangle ΔABC, F est le milieu de $[AC]$ et E est le milieu de $[AB]$.

Or, dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. Donc $d_{EF} \parallel d_{BC}$

65 Les points G, K, H d'une part et G, L, F d'autre part sont alignés dans le même ordre.

D'une part, $\dfrac{\overline{GL}}{\overline{GF}} = \dfrac{2{,}6}{3} = \dfrac{26}{30} = \dfrac{13}{15}$, d'autre part, $\dfrac{\overline{GK}}{\overline{GH}} = \dfrac{6}{7}$. On constate que $\dfrac{\overline{GL}}{\overline{GF}} \neq \dfrac{\overline{GK}}{\overline{GH}}$.

Par la contraposée du théorème de Thalès, (2 énoncé), les droites d_{KL} et d_{HF} ne sont pas parallèles.

66

a. Non, il s'agit d'un triangle rectangle donc il peut calculer le côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.

b. Le 3ème côté mesure 8,16 m et donc la longueur de la clôture est de 25,5 m.

67 Le cric soulève la voiture de 27,2 cm.

68 Le triangle ΔRIE est rectangle en I, alors $\overline{RE}^2 = \overline{RI}^2 + \overline{EI}^2 = (10{,}5)^2 + 6^2$.

Le triangle ΔNRE est rectangle en R, alors $\overline{NR}^2 + \overline{RE}^2 = \overline{NE}^2$. Donc on a :

$$\overline{NR} = \sqrt{\overline{NE}^2 - \overline{RE}^2} = \sqrt{(13{,}5)^2 - ((10{,}5)^2 + 6^2)} = 6$$

Donc $\overline{NR} = \overline{EI} = 6\,\text{cm}$.

69

a. h = 3,6 cm **b.** aire = 9,72 cm^2

70 Comme $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$, alors par la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ΔABC est rectangle en C. Donc le mur est bien perpendiculaire au sol.

71

Aire = 1612,5 cm^2 $P \simeq 191{,}18$ cm

1 Des démonstrations du théorème de Pythagore :
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-pythagore-demos

2 Pythagore et la musique :
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-pythagore-musique

3 *L'incommensurabilité*

Deux segments $[AB]$ et $[CD]$ de longueurs respectives $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$ sont **commensurables** s'il existe un nombre rationnel k tel que $\overline{AB}=k\cdot\overline{CD}$. Sinon, ils sont **incommensurables.**

a. Par exemple : deux segments de longueurs respectives 2,1 et 6,7 sont commensurables car il existe un nombre rationnel (ici sous forme de fraction) $k=\frac{67}{21}$ tel que $2{,}1\cdot\frac{67}{21}=6{,}7$.

b. Par exemple : deux segments de longueurs respectives 1 et $\sqrt{2}$ sont incommensurables car il n'existe aucun nombre rationnel k (fraction) tel que $\sqrt{2}=k\cdot 1$, soit tel que $\sqrt{2}=k$

La découverte de segments incommensurables par Hippase de Métaponte vers -460 engendra une grave crise chez les pythagoriciens.

La philosophie au temps de la Grèce Antique :
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-philosophiegrequephilosophiegreque

4 *Les solides de Platon*

Philolaos A 15 : Aétius (Ier s. ap. J.-C.)

Pour Pythagore, il existe cinq figures de volumes, qu'il appelle encore mathématiques : le cube qui, selon lui, a produit la terre ; la pyramide, qui a produit le feu ; l'octaèdre qui a produit l'air ; l'icosaèdre qui a produit l'eau, et le dodécaèdre qui a produit la sphère de l'univers.

Opinions, II, VI, 5 in : Dumont, p. 257

On parle de **polyèdres réguliers** parce que toutes leurs faces sont constituées par la même figure polygonale régulière.

a. Pourquoi n'y a-t-il que cinq polyèdres réguliers possibles ? Confronter votre réponse à celle donnée par Euclide dans le texte qui suit :

Euclide (environ 325-250)

Je dis alors qu'en plus des cinq figures susdites, il ne sera construit aucune autre figure contenue par des figures planes équilatérales et équiangles égales entre elles.
En effet d'une part il n'est pas construit dans le solide contenu par deux triangles ni, plus généralement, par deux figures planes. Et contenu par trois triangles, c'est celui de la pyramide, et par quatre, celui de l'octaèdre, et par cinq celui de l'icosaèdre ; et il n'existera pas d'angle solide contenu par six triangles équilatéraux et équiangles construits en un seul point ; en effet, l'angle du triangle équilatéral étant deux tiers d'un angle droit, les six seraient égaux à quatre droits ; ce qui est impossible ; car tout angle solide est contenu par des angles plans plus petits que quatre droits. Alors pour les mêmes raisons il n'est pas construit d'angle solide contenu par plus de six angles plans. Et l'angle du cube est contenu par trois carrés ; mais par quatre, c'est impossible ; car de nouveau ils seraient quatre droits.
Et par des pentagones équilatéraux et équiangles, par trois c'est celui du dodécaèdre ; mais par quatre, c'est impossible ; car l'angle du pentagone équilatéral valant un-droit-et-un-cinquième, les quatre angles seraient plus grands que quatre droits ; ce qui est impossible. Assurément un angle solide ne sera pas non plus contenu par d'autres figures polygonales à cause de la même absurdité. Donc, en plus des cinq figures susdites, il ne sera construit aucune autre figure solide contenue par des figures planes équilatérales et équiangles égales entre elles. Ce qu'il fallait démontrer.

Éléments, Livre XIII, T. 4, pp. 468-69

b. Sur les solides de Platon :
http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch09-solides-Platon-solides-Platon

c. voir aussi les 13 solides d'Archimède : http://fr.wikipedia.org/wiki/Solide_d'Archim%C3%A8de

d. Dessiner ces 5 solides.

e. Expliquer avec vos mots pourquoi il ne peut pas y avoir d'autres polyèdres réguliers ?

« Les amis sont des compagnons de voyage,
qui nous aident à avancer sur le chemin d'une vie plus heureuse.»

Pythagore, scientifique, mathématicien et philosophe,
grec (-580 à -495 environ)

A savoir en fin de chapitre

Notions fondamentales, angles

- ✔ statut d'une figure, d'un schéma en mathématiques : on représente approximativement une réalité idéale ; attention de ne pas en tirer de conclusions hâtives ...
- ✔ définitions et notations des objets géométriques de base du plan : plan, points, ensembles de points, intersection, droite, distance entre deux points, demi-droite, surface, aire ;
- ✔ angles particuliers : angles plats, pleins, droits, supplémentaires, complémentaires, opposés, correspondants, alternes-internes, alternes-externes ;
- ✔ déterminer les angles et longueurs de côtés manquants dans des situations données ;
- ✔ savoir énoncer et démontrer les théorèmes sur les angles opposés et alternes-internes ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 8

Polygones du plan

- ✔ figures de base du plan et leurs aires ; calculer des aires de figures du plan ;
- ✔ différencier l'objet géométrique (angle, segment, surface) de sa mesure (un nombre positif : longueur, aire) ;

Voir la théorie 3 et les exercices 9 à 11

Triangles

- ✔ définitions et notations pour les triangles : sommets, côtés, longueurs des côtés ;
- ✔ triangles particuliers : isocèle, équilatéral, rectangle ;
- ✔ savoir énoncer et démontrer les théorèmes sur la somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 12 à 30

Thalès

- ✔ triangles semblables, côtés correspondants ; reconnaître des triangles semblables et justifier leur similitude ;
- ✔ théorème de Thalès et la réciproque du 2^{e} énoncé ; avoir compris la démonstration du théorème de Thalès ;
- ✔ résoudre des problèmes de géométrie à l'aide des théorèmes de Thalès et sa réciproque ;

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 31 à 44

Pythagore

✔ théorèmes de Pythagore et sa réciproque ;

✔ théorèmes de la hauteur et d'Euclide ;

✔ savoir énoncer et démontrer les théorème de Pythagore, de la hauteur, d'Euclide ;

✔ résoudre des problèmes de géométrie à l'aide des théorèmes de Thalès et Pythagore (et/ou de leurs réciproques), de la hauteur, d'Euclide.

Voir la théorie 9 à 11 et les exercices 45 à 55

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch08