

Chapitre 07 - Degré 2



François Viète 1540-1603

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Francois_Viete.jpeg

Problème

Quelle heure à la seconde près, entre 2 heures et 3 heures les aiguilles d'une montre sont :

- a) Superposées
- b) Dans le prolongement l'une de l'autre
- c) A quelle heure font-elles un angle droit?

1 [Souvenirs] Représentation graphique de fonctions de degré 2

1 Représenter graphiquement la fonction g définie par $g(x) = x^2$.

2 Montrer que la fonction g définie ci-dessus admet un axe de symétrie d'équation $x=0$ (axe Oy).
Indication : pour montrer que la représentation graphique d'une fonction g est symétrique par rapport à l'axe Oy , il faut prouver que, pour tout réel x , on a $g(-x) = g(x)$.

3 Représenter graphiquement les fonctions f définies par :

a. $f(x) = (x-2)^2$ b. $f(x) = (x-3)^2$ c. $f(x) = (x-5)^2$ d. $f(x) = (x+3)^2$

Comment obtenir la représentation graphique des fonctions définies par une expression de la forme $f(x) = (x-k)^2$ à partir de celle de g ? [où k est une constante réelle quelconque]

4 Représenter graphiquement les fonctions f définies par :

a. $f(x) = 3(x-2)^2$ b. $f(x) = 8(x-2)^2$ c. $f(x) = 0.5(x-2)^2$ d. $f(x) = -2(x-2)^2$

Comment obtenir la représentation graphique des fonctions définies par une expression de la forme $f(x) = a(x-k)^2$ à partir de celle de g ? [où k et a sont des constantes réelles et $a \neq 0$]

5 Représenter graphiquement les fonctions f définies par :

a. $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$ b. $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$ c. $f(x) = 3(x-2)^2 - 2$ d. $f(x) = 3(x-2)^2 - 3$

2 [Activité] Généralisation

Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous :

a. $f(x) = 2(x+3)^2 + 1$ b. $f(x) = -(x+2)^2 - 3$ c. $f(x) = 0.5(x-1)^2 - 2$ d. $f(x) = -3(x-0.5)^2 + 1$

3 [Activité] Cas général

1 Quelle est la définition générale « naturelle » d'une expression de degré 2, d'une fonction de degré 2?

2 Soit f la fonction de degré 2 définie par $f(x) = x^2 + 4x + 3$. Cette écriture s'appelle la **forme développée** de f .

a. Écrire f sous forme $f(x) = a(x-k)^2 + m$. Cette écriture s'appelle la **forme canonique** de f . La méthode utilisée s'appelle la **complétion du carré**. Expliquer pourquoi ce nom.

b. Dans l'écriture sous forme canonique, quelles informations obtient-on facilement au sujet de la représentation graphique de f ? Même question pour l'écriture sous forme développée.

c. Représenter graphiquement la fonction f .

3 Théorème « Forme canonique » : Soit $E(x) = ax^2 + bx + c$ une expression de degré 2 (avec $a \neq 0$), alors $E(x) = a(x - k)^2 + m$, où $k = -\frac{b}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ et $m = -\frac{\Delta}{4a}$.

Illustrer avec les fonctions g et h définies par $g(x) = x^2 - 6x + 7$ et $h(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

4 [Aller plus loin] Démonstration générale

Démontrer le théorème précédent.

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 2

5 [Activité] Optimiser

Un terrain se trouve en bordure d'une rivière rectiligne.

On désire délimiter une zone rectangulaire le long de la rivière à l'aide d'une barrière ayant une longueur totale de 120 mètres. Le côté de la zone le long de la rivière n'a pas besoin de barrière.

Quelle est l'aire maximale possible de la zone délimitée par la barrière et la rivière ?

Voir la théorie 4 et les exercices 3 à 7

6 [Activité] Hauteur zéro

Depuis un pont situé à 10 m au-dessus d'une rivière, on lance une pierre verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 8 m/s. La hauteur h de la pierre (en mètres) au dessus de la rivière en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -4,9t^2 + 8t + 10$.

a. Représenter graphiquement la fonction $h(t)$ et en déduire le temps approximatif que met la pierre à arriver dans la rivière.

b. Quelle équation faut-il résoudre pour déterminer le temps exact ?

7 [Activité] Équations simples ?

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 9$.

d. $x^2 = -3$.

b. $x^2 = 2$

e. $49x^2 - 28x + 4 = 0$.

c. $x^2 = 0$

f. $16x^2 = 24x - 9$.

2 Interpréter graphiquement les résultats précédents.

3 Trouver tous les nombres dont le carré du nombre additionné à lui-même vaut 12.

8 [Activité] Trouver la bonne méthode

Pour résoudre l'équation $(x + 7)(5x + 3) = (x + 7)(2x + 3)$ Noémie et Simon ont chacun leur méthode :

Méthode de Noémie :

$$\begin{aligned}(x + 7)(5x + 3) &= (x + 7)(2x + 3) \\ 5x + 3 &= 2x + 3 \\ 3x &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}$$

L'équation a une solution : $S = \{0\}$.

Méthode de Simon :

$$\begin{aligned}(x + 7)(5x + 3) &= (x + 7)(2x + 3) \\ 5x^2 + 38x + 21 &= 2x^2 + 17x + 21 \\ 3x^2 + 21x &= 0 \\ 3x + 21 &= 0 \\ x &= -7\end{aligned}$$

L'équation a une solution : $S = \{-7\}$.

- A votre avis, quelle méthode est préférable ? Pourquoi ?
- Et vous, comment résolveriez-vous cette équation ?

[Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 8 à 11](#)

9 [Activité] Complétion du carré

1 Résoudre l'équation $9x^2 + 6x - 8 = 0$ en utilisant la **complétion du carré**.

2 Résoudre les équations suivantes par complétion du carré :

a. $4x^2 + 5x + 1 = 0$

c. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

b. $x^2 + x - 1 = 0$

d. $9x^2 + 6x + 8 = 0$

3 Factoriser le plus possible les expressions suivantes en utilisant la complétion du carré :

a. $4x^2 + 5x + 1$

c. $9x^2 + 6x + 1$

b. $x^2 + x - 1$

d. $9x^2 + 6x + 8$

10 [Activité] Formule de Viète

Théorème « Formule de Viète » : Soit $E(x)=ax^2+bx+c$ une expression de degré 2 et $\Delta=b^2-4ac$, alors

i si $\Delta > 0$: l'équation $E(x)=0$ a deux solutions distinctes : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

l'expression $E(x)$ se factorise : $E(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

ii si $\Delta = 0$: l'équation $E(x)=0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

l'expression $E(x)$ se factorise : $E(x)=a(x-x_0)^2$

iii si $\Delta < 0$: l'équation $E(x)=0$ n'a pas de solution ;

l'expression $E(x)$ ne peut pas être factorisée.

1 Résoudre les équations suivantes en utilisant la formule de Viète et donner un résultat exact simplifié au maximum :

a. $-3x^2 + x + 1 = 0$

d. $x^2 - 3x = -4$

g. $4x^2 + 5x + 1 = 0$

b. $-x^2 + 4x + 2 = 0$

e. $9x^2 + 6x + 1 = 0$

h. $x^2 + x - 1 = 0$

c. $16x^2 + 12x + 14 = -12x + 5$

f. $9x^2 + 6x + 8 = 0$

i. $x^2 = 3x + 4$

2 Factoriser le plus possible quand cela est possible :

a. $-3x^2 + x + 1$

c. $16x^2 + 24x + 9$

e. $9x^2 + 6x + 1$

b. $-x^2 + 4x + 2$

d. $x^2 - 3x + 4$

f. $x^2 + x - 1$

3 Démontrer le théorème « Formule de Viète ». Qui était François Viète ? Faire une recherche.

11 [Activité] Hauteur zéro bis

Reprendre et résoudre le problème « Depuis un pont situé à 10 m au-dessus d'une rivière, on lance une pierre verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 8 m/s. La hauteur h de la pierre (en mètres) au dessus de la rivière en fonction du temps t (en secondes) est donnée par $h(t) = -4,9t^2 + 8t + 10$. Déterminer le temps que met la pierre pour arriver dans la rivière. »

12 [Aller plus loin] Équation paramétrique

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ l'équation $x(x+4) = m$ admet-elle une unique solution ?

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 12 à 23

13 [Activité] Construction d'une boîte

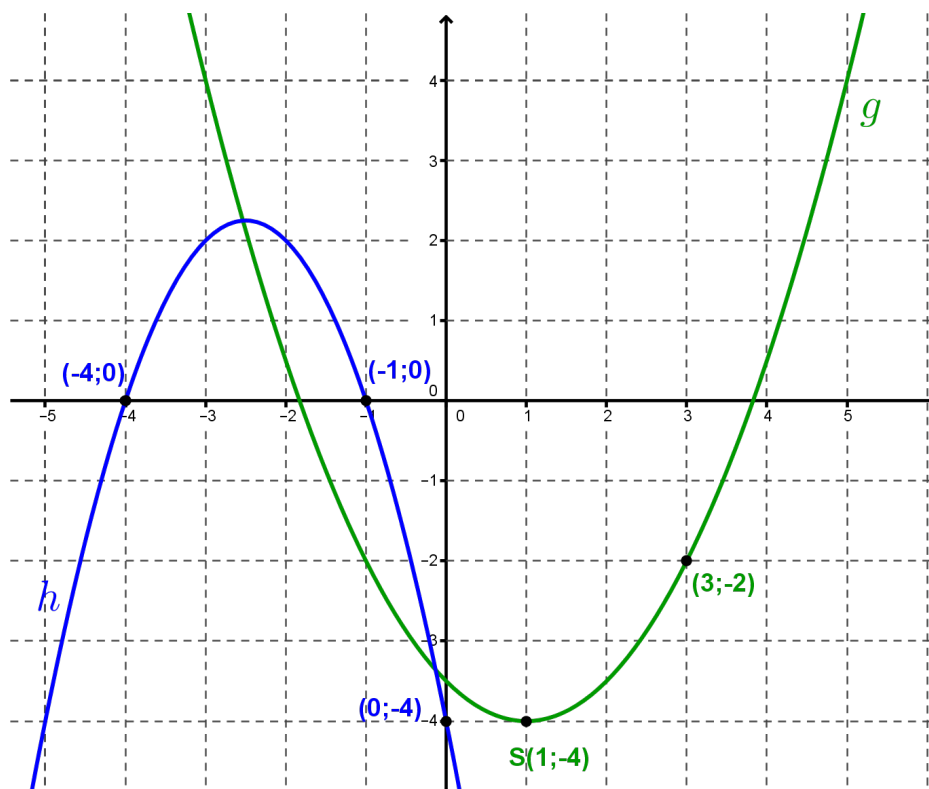
On veut construire une boîte ouverte de base carrée à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés. De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?

- Mettre en équation ce problème.
- Interpréter graphiquement cette équation et déterminer graphiquement la(les) solution(s).
- Résoudre algébriquement l'équation trouvée en **a**.
- Mêmes questions, mais on désire cette fois fabriquer une boîte de volume 50 cm^3 .
- Comparer les deux approches, graphique et algébrique.

Voir la théorie 9 à 10 et les exercices 24 à 26

14 [Activité] A partir d'un graphique

On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions de degré 2, g et h . Déterminer l'expression algébrique de chaque fonction. Donner, à chaque fois, les trois formes développée, canonique et factorisée.



Voir la théorie 11 et les exercices 27 à 31

15 [Activité] Intersections

Calculer les coordonnées des points d'intersection des fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -0,25(x^2 - 2x - 3)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

16 [Aller plus loin] Intersections ?

Calculer les coordonnées des points d'intersection des fonctions f et g définies par $f(x) = -\frac{2}{3}(x^2 - 2x - 3)$ et $g(x) = -0,75((x-2)^2 + 5)$ puis interpréter graphiquement le résultat.

Voir la théorie 12 et les exercices 32 à 33

17 [Aller plus loin] Degré supérieur à 2

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $3x(3x + 6)(x + 3) = 0$

d. $7(x^2 - 1)(x^2 + 2x + 3) = 0$

b. $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 0$

e. $(1 - x^2)x - 2(x^2 - x) = -x(x^2 - 2x + 1)$

c. $3x(3x + 6)^2(x + 3)^3 = 0$

f. $x^{35}(3 - x^2)(7 + 2x^2)(x - \sqrt{3})(2 - 3x) = 0$

2 Déterminer les zéros des fonctions définies ci-dessous, puis utiliser GeoGebra pour explorer leurs représentations graphiques :

a. $f(x) = (10x + 7)(x - 5)(x + 3)$

c. $f(x) = x^3(3 - x^2)(7 + 2x^2)$

b. $f(x) = (x + 3)(4x - 1)(x - 3)$

d. $f(x) = -2(x^2 + 4x + 3)(x^2 + x + 3)(x^2 + 3x + 1)$

Voir la théorie 13 et les exercices 34 à 35

1 [A savoir] Fonctions de degré 2

Définition

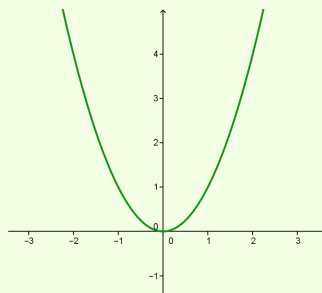
On appelle **fonction de degré 2** une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où les coefficients a , b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$.

Exemples :

- ☐ La fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 2x - 7$ est une fonction de degré 2. Ses coefficients sont $a = -3$, $b = 2$ et $c = -7$.
- ☐ La fonction g définie par $g(x) = (x-2)(3x+1)$ est une fonction de degré 2, car $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Ses coefficients sont $a = 3$, $b = -5$ et $c = -2$.
- ☐ La fonction h définie par $h(x) = (x+1)^2 - x^2$ n'est pas une fonction de degré 2, car $h(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$ et donc $a = 0$.

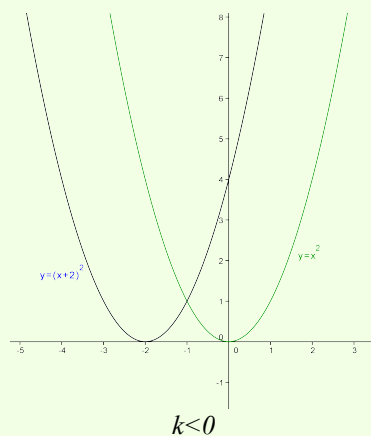
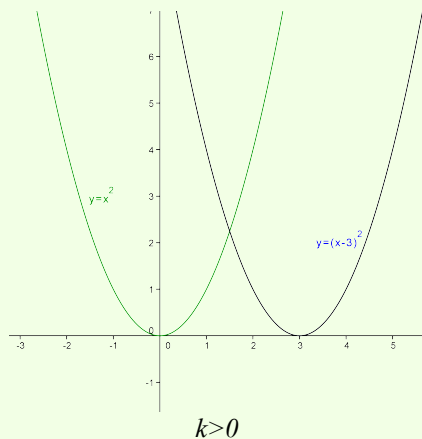
2 [A savoir] Étude de la représentation graphique de fonctions de degré 2

- ☐ La fonction de degré 2 « la plus simple » est la fonction g définie par $g(x) = x^2$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous. g admet un axe de symétrie d'équation $x = 0$, car $g(-x) = (-x)^2 = x^2 = g(x)$.

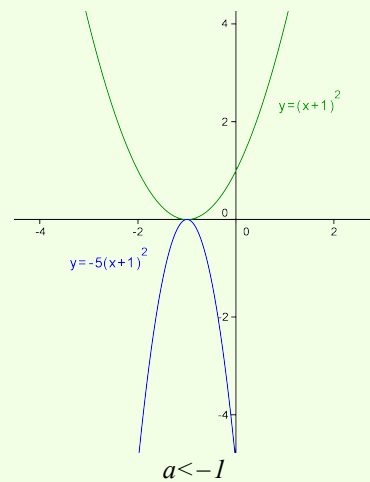
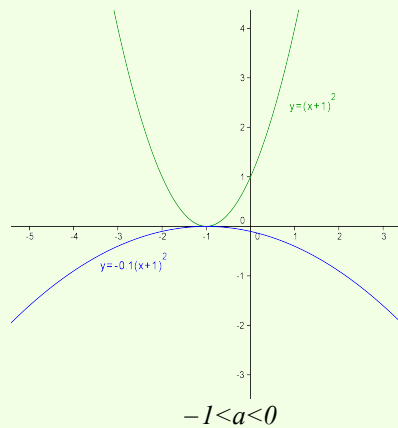
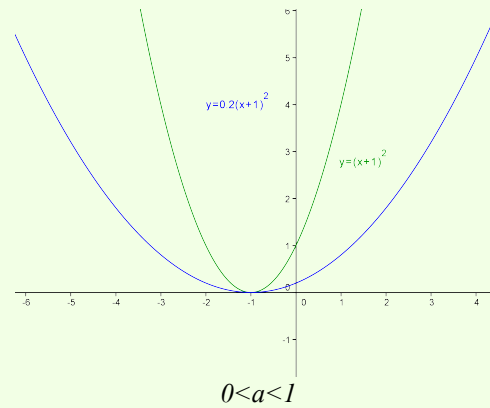
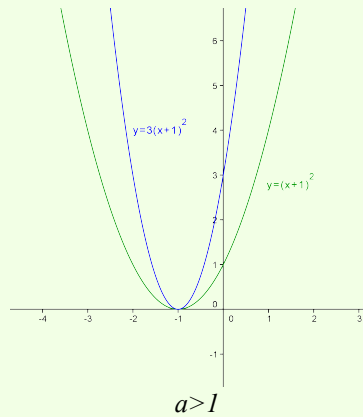


- ☐ La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = (x-k)^2$ correspond à la courbe représentative de g qu'on a déplacée horizontalement d'une distance k .

Attention, le sens du déplacement dépend du signe de k .

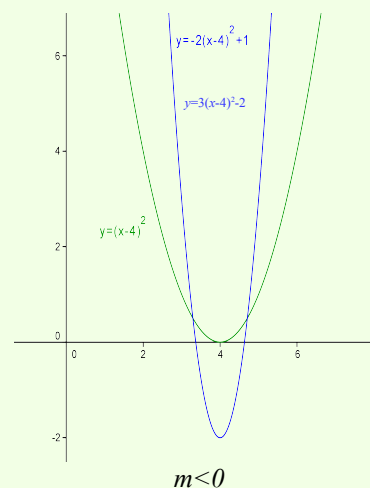
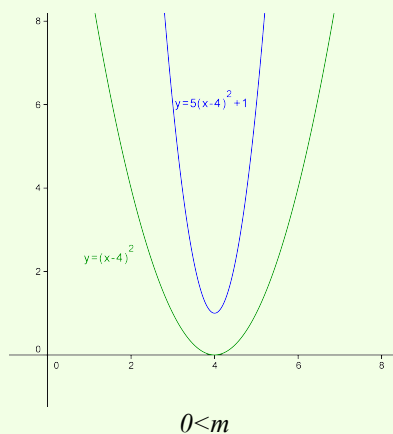


□ La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = a \cdot (x - k)^2$ correspond à la courbe représentative de g qu'on a déplacée horizontalement d'une distance k , puis qu'on a resserrée ou élargie autour de l'axe vertical $x = k$ selon la valeur de a . De plus, si a est négatif, la courbe est « tournée vers le bas ».



□ La courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = a \cdot (x - k)^2 + m$ correspond à la courbe représentative de g qu'on a déplacée horizontalement d'une distance k , puis qu'on a resserrée ou élargie autour de l'axe vertical $x = k$ selon la valeur de a . Enfin on l'a déplacée verticalement d'une distance m .

Attention, le sens du déplacement dépend du signe de m .



Vocabulaire

La courbe représentative d'une fonction de degré 2 s'appelle une **parabole**.

Écrire une expression de degré 2 comme $a(x-k)^2+m$ par complétion du carré

Pour **compléter le carré** $x^2 + kx$ ou $x^2 - kx$, on ajoute $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; c'est-à-dire on ajoute le carré de la moitié du coefficient de x .

Exemple : soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5x + 3$. Écrire f sous la forme $f(x) = a(x-k)^2 + m$ et en déduire l'axe de symétrie et le sommet de sa courbe représentative.

$$f(x) = x^2 - 5x + 3$$

On complète le carré en ajoutant

$$f(x) = x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$

$$\leftarrow +\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2.$$

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3$$

$\leftarrow$ On récrit l'identité remarquable sous forme factorisée.

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{12}{4}$$

$\leftarrow$ On met les termes constants au même dénominateur.

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$\leftarrow$ On réduit.

Donc, la forme recherchée est : $f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$ et on a : $k = \frac{5}{2}$ et $m = -\frac{13}{4}$.

D'où : axe de symétrie : $x = \frac{5}{2}$; sommet : $S\left(\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$.

Vocabulaire

Une fonction f de degré 2 peut s'écrire sous différentes formes :

☐ $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'appelle la **forme développée**. Cette écriture est toujours possible et elle permet de lire immédiatement l'ordonnée à l'origine c .

☐ $f(x) = a(x-k)^2 + m$ s'appelle la **forme canonique**. Cette écriture est toujours possible et permet de d'obtenir facilement le sommet $S(k; m)$ de la parabole.

Théorème « Forme canonique »

Soit $E(x) = ax^2 + bx + c$ une expression de degré 2 (avec $a \neq 0$), alors $E(x) = a(x-k)^2 + m$, où $k = -\frac{b}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$ et $m = -\frac{\Delta}{4a}$.

Si une fonction f est définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), alors :

☐ sa courbe représentative admet un **axe de symétrie** d'équation $x = -\frac{b}{2a}$;

☐ elle admet un **sommet** au point $S(k; m) = S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$;

☐ si $a > 0$ elle est **convexe** (de forme $\cup$) et si $a < 0$ elle est **concave** (de forme $\cap$).



3 [A savoir] Représenter graphiquement une fonction de degré 2 en utilisant la forme canonique

Méthode des 5 points	Illustration avec $f(x)=2x^2-6x+1$
On cherche l'intersection avec l'axe Oy en calculant $f(0)$.	Si $x=0$, alors $f(0)=2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 1 = 1$. Donc l'intersection avec Oy est le point $(0; 1)$.
On identifie l'axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a}$	Axe de symétrie : $x = \frac{3}{2}$.
On identifie le sommet : $S(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a})$	Sommet : $(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2})$.
Si c'est possible, on obtient un point supplémentaire de la représentation graphique par symétrie du point intersection avec l'axe Oy.	Le symétrique de $x=0$ par rapport à l'axe de symétrie est $x=3$. Donc le point $(3; 1)$ appartient aussi à la représentation graphique.
On précise, en fonction de a , la forme convexe ou concave de la parabole.	$a=2$, donc $a>0$, donc parabole convexe (c'est-à-dire $\cup$).
Si nécessaire, on détermine encore quelques points supplémentaires, ainsi que leurs symétriques par rapport à l'axe $x = -\frac{b}{2a}$.	Prenons $x=2$ alors $f(2)=2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = -3$ donc le point $(2; -3)$ appartient à la parabole. Par symétrie, le point $(1; -3)$ appartient également à la parabole.
Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole.	

Voir les exercices 1 à 2

4 [A savoir] Résoudre un problème d'optimisation

Définition

Un **problème d'optimisation** est un problème dans lequel il s'agit de déterminer la valeur extrême (le maximum ou le minimum) d'une grandeur.

Exemple : un fermier désire construire un enclos rectangulaire pour ses moutons le long d'une rivière. La clôture à construire n'aura que trois côtés, car le quatrième côté sera constitué de la rivière. Il dispose de 2420 mètres de clôture. Quelles dimensions faut-il donner à l'enclos pour qu'il ait une aire maximale ? Quelle est alors la valeur de cette aire ?

Étape n°1 : Choisir la (ou les) inconnue(s)

Soit x la largeur de l'enclos et y la longueur.

On repère la ou les grandeurs non connues dans l'énoncé.

On les note généralement $x, y, \dots$

Étape n°2 : Exprimer la grandeur à optimiser à l'aide d'une fonction

La grandeur à maximiser est l'aire A de l'enclos :

$$A = xy$$

On identifie la grandeur à optimiser et on l'exprime à l'aide des inconnues.

$$2x + y = 2420 \Leftrightarrow y = 2420 - 2x$$

$$\text{D'où } A = x(2420 - 2x)$$

On réduit l'expression à une seule inconnue en utilisant une (ou plusieurs) relation(s) existant entre les inconnues.

$$A(x) = x(2420 - 2x)$$

On obtient ainsi une fonction d'une seule variable.

Étape n°3 : Déterminer les domaine des valeurs intéressantes pour le problème

x doit être (strictement) positif, car c'est une longueur, et inférieur à 1210 m, car la longueur totale de la clôture est de 2420 m.

On détermine pour quelles valeurs de la variable le problème a un sens.

$$\text{Donc } x \in]0; 1210[.$$

Étape n°4 : Étudier la parabole

$$A(x) = x(2420 - 2x) = -2x^2 + 2420x$$

$a = -2 < 0$, donc parabole concave ($\cap$), donc le sommet est le maximum.

Le maximum de A est en :

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2420}{2(-2)} = 605 \text{ m}$$

On détermine la forme convexe ou concave de la parabole et on calcule les coordonnées du sommet de la parabole.

Et l'aire maximale est donc de :

$$\begin{aligned} A_{\max} &= -2 \cdot 605^2 + 2420 \cdot 605 \\ &= 732'050 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Étape n°5 : Vérifier

$$605 \in]0; 1210[\quad \text{Donc c'est bon.}$$

On vérifie que la valeur trouvée pour la variable est dans le domaine des valeurs intéressantes pour le problème.

Étape n°6 : Conclure

La largeur de l'enclos ayant une aire maximale est de 605 m, sa longueur est de $2420 - 2 \cdot 605 = 1210$ m et la valeur de l'aire est de $732'050 \text{ m}^2$.

Voir les exercices 3 à 7

5 [A savoir] Équations du 2^e degré

Définition

Une **équation du deuxième degré** (ou **équation de degré 2**) [à une variable notée x] est une équation de la forme $p(x)=q(x)$, où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes tels que le degré de $p(x) - q(x)$ est égal à 2.

Remarque : une équation du deuxième degré est toujours équivalente à une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où x est une variable réelle et a , b et c sont des constantes réelles avec a non nulle.

Exemples :

☐ $2x^2 - 3 = -3x^2 + x - 1$ et $\pi x^2 - 3\sqrt{2} + x = 1$ sont des équations du 2^e degré.

☐ $x^2 - 3 = -3x^3 + x - 1$ et $\frac{1}{x^2 - 1} = 2$ ne sont pas des équations du 2^e degré.

6 [A savoir] Résoudre une équation du 2^e degré par factorisation

Théorème « Cas particulier de l'équation $x^2 = d$ »

Les solutions de l'équation $x^2 = d$ (pour $d \geq 0$) sont $x_1 = +\sqrt{d}$ et $x_2 = -\sqrt{d}$.

Théorème du produit nul

Si p et q sont des expressions algébriques, alors :

$$p \cdot q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 0 \quad \text{ou} \quad q = 0$$

Autrement dit :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Cette propriété permet de trouver toutes les solutions d'une équation de degré 2 lorsqu'une factorisation est trouvée.

Attention, il faut qu'un des membres de l'équation soit nul (c'est-à-dire que le nombre 0 doit apparaître d'un côté de l'équation).

Exemple : résoudre l'équation $2x^2 - 3x = x^2 + x + 21$.

$$2x^2 - 3x = x^2 + x + 21$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$



On rend nul le membre de droite.

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 7) = 0$$



On factorise le membre de gauche.

Par le théorème du produit nul, on a :

$$x + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \quad \Leftrightarrow x = 7$$

On peut tester les valeurs trouvées :

Pour $x = -3$: $2(-3)^2 - 3(-3) = 27$ et $(-3)^2 + (-3) + 21 = 27$

Pour $x = 7$: $2(7)^2 - 3(7) = 77$ et $(7)^2 + (7) + 21 = 77$

Donc $S = [-3 ; 7]$.

Remarque : cette méthode fonctionne aussi pour une équation de degré supérieur à 2 qu'on peut factoriser.

Voir les exercices 8 à 11

7 [A savoir] Résoudre une équations du 2^e degré... suite

Résoudre une équation de degré 2 par la complétion du carré

Pour **compléter le carré** $x^2 + kx$ ou $x^2 - kx$, on ajoute $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; c'est-à-dire on ajoute le carré de la moitié du coefficient de x .

Exemple : résoudre l'équation $x^2 - 5x + 3 = 0$ par la complétion du carré

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = 0$$

← On complète le carré en ajoutant $+\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = 0$$

← On récrit l'identité remarquable sous forme factorisée.

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{12}{4} = 0$$

← On réduit.

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

← On réduit encore et on isole le carré.

$$\Leftrightarrow x - \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$$

← On prend la racine carrée des deux côtés (selon le théorème $x^2=a$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}}$$

← On isole x .

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

← On met au même dénominateur.

d'où $S = \left[\frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right]$

← On note les solutions de l'équation.

Théorème « Formule de Viète »

Soit $E(x) = ax^2 + bx + c$ une expression de degré 2 et $\Delta = b^2 - 4ac$, alors on a :

□ Si $\Delta > 0$:

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
a deux solutions distinctes :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} ;$$

l'expression $ax^2 + bx + c$
se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

□ si $\Delta = 0$:

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
a une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} ;$$

l'expression $ax^2 + bx + c$
se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

□ si $\Delta < 0$:

l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
n'a pas de solution ;

l'expression $ax^2 + bx + c$
ne peut pas être factorisée.

Vocabulaire

$\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle le **discriminant**

Exemple 1 : résoudre l'équation $2x^2 + 5x = -x^2 + 8$.

$2x^2 + 5x = -x^2 + 8 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$ ◀ On écrit l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$

Ici $a = 3$, $b = 5$, $c = -8$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 121 > 0$

Cette équation a donc 2 solutions distinctes :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 11}{6}$$

Ce qu'on note ainsi : $x_1 = \frac{-5+11}{6} = \frac{6}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{-5-11}{6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$

Et donc l'ensemble des solutions est : $S = \left\{ -\frac{8}{3}; 1 \right\}$.

Remarque : on obtient également une factorisation de l'expression $3x^2 + 5x - 8$:

$$3x^2 + 5x - 8 = 3\left(x - \left(-\frac{8}{3}\right)\right)(x - 1) = 3\left(x + \frac{8}{3}\right)(x - 1) = (3x + 8)(x - 1)$$

Exemple 2 : factoriser l'expression $4x^2 - 4x + 1$.

Ici $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

Cette expression a donc 1 seul facteur (double) qui s'annule pour $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

et on peut factoriser : $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

Remarque : on a aussi résolu l'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Exemple 3 : résoudre l'équation $4x^2 - 4x + 3 = 0$.

Ici $a = 4$, $b = -4$, $c = 3$, donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = -32 < 0$

Cette équation n'admet donc pas de solution : $S = \emptyset$

Remarque : on a aussi démontré que l'expression $4x^2 - 4x + 3$ n'est pas factorisable.

8 [Aller plus loin] François Viète (1540-1603)

François Viète étudia le droit à l'université de Poitiers. C'est ainsi qu'il fut avocat puis conseiller au parlement (cour de justice) sous Henri III et Henri IV. Mais Viète s'intéressa à l'astronomie et découvrit les mathématiques. On lui doit de nombreuses publications de géométrie (coniques, problèmes de construction, trisection de l'angle, quadrature du cercle). Selon certains historiens, il aurait perçu avant Kepler la nature elliptique des orbites planétaires dans son Harmonicon Coeleste, vers 1597, mais ce traité est hélas perdu. Viète résolut complètement l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.

Source: <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Viete.html>



Voir les exercices 12 à 23

9 [A savoir] Représenter graphiquement de manière efficace une fonction de degré 2

Caractéristiques de la parabole

Pour représenter graphiquement une fonction de degré 2 il faut déterminer, lorsque cela est possible, les informations suivantes :

- ☐ l'ordonnée à l'origine
- ☐ les zéros
- ☐ l'axe de symétrie
- ☐ le sommet
- ☐ la forme convexe ou concave
- ☐ quelques points supplémentaires

Les différentes formes d'écriture d'une fonction f de degré 2

- ☐ forme **développée** : $f(x)=ax^2+bx+c$
Cette écriture est toujours possible ; elle permet de lire immédiatement l'ordonnée à l'origine c .
- ☐ forme **canonique** : $f(x)=a(x-k)^2+m$
Cette écriture est toujours possible ; elle permet de lire immédiatement les coordonnées du sommet $S(k;m)$ de la parabole.
- ☐ forme **factorisée** : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
Cette écriture n'existe que si $\Delta \geq 0$; elle permet de lire immédiatement les intersections de la parabole avec l'axe Ox , à savoir, les deux points $(x_1;0)$ et $(x_2;0)$ si $\Delta > 0$ ou l'unique point $(x_0;0)$ si $\Delta = 0$.

Selon la forme sous laquelle la fonction est donnée, certaines informations peuvent donc être obtenues directement. Les autres informations sont ensuite déterminées sans forcément passer par l'écriture des deux autres formes de la fonction.

Exemple 1 : pour la fonction f définie par $f(x) = -2(x+4)(x-1)$ donner, si cela est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

□ $f(x)$ est sous forme factorisée, on obtient donc directement les points d'intersection de la parabole avec l'axe Ox : $(-4;0)$ et $(1;0)$ ($Z_f = \{-4; 1\}$).

□ L'axe de symétrie de la parabole est la droite verticale passant par le milieu de $(-4;0)$ et $(1;0)$: $x = \frac{-4+1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

□ $x = -\frac{3}{2}$ est aussi l'abscisse du sommet ; on calcule l'ordonnée :

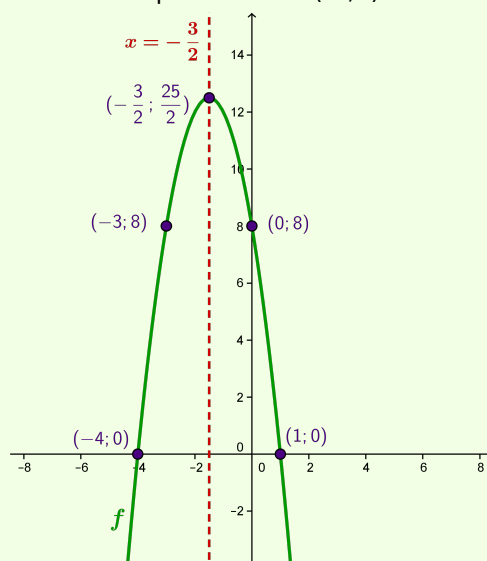
$$y = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -2\left(-\frac{3}{2}+4\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right) = -2\left(\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{2} . \quad \text{Donc : } S\left(-\frac{3}{2}; \frac{25}{2}\right)$$

□ $a = -2 < 0$ donc la parabole est concave ($\cap$)

□ $f(0) = -2(0+4)(0-1) = -2 \cdot 4(-1) = 8$, donc le point d'intersection avec l'axe Oy est $(0;8)$

□ De plus, le symétrique de $(0;8)$ par rapport à l'axe de la parabole est $(-3;8)$.

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :



Exemple 2 : pour la fonction f définie par $f(x) = 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4$ donner, si cela est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

□ $f(x)$ est sous forme canonique, on obtient donc directement les coordonnées du sommet de la parabole : $S\left(-\frac{3}{2}; -4\right)$ et l'axe de symétrie : $x = -\frac{3}{2}$.

□ Recherche des zéros : il faut résoudre l'équation : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 - \frac{3}{2}$ d'où $Z_f = \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$.

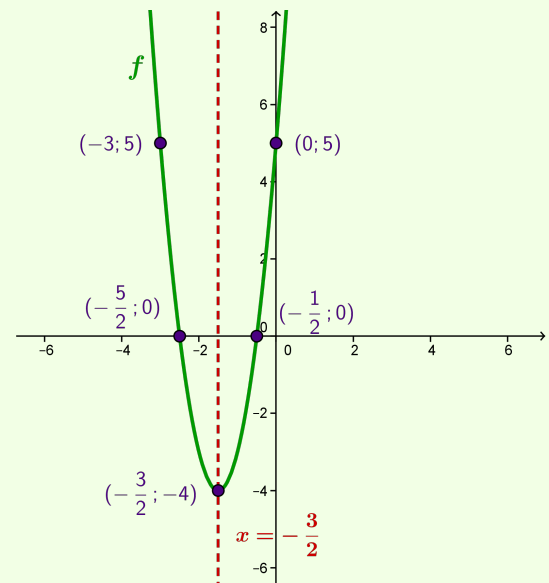
Remarque : Pour résoudre cette équation, on aurait aussi pu développer puis utiliser la formule de Viète.

□ $a = 4 > 0$ donc la parabole est convexe ($\cup$)

□ $f(0) = 4\left(0 + \frac{3}{2}\right)^2 - 4 = 4 \cdot \frac{9}{4} - 4 = 5$, donc le point d'intersection avec l'axe Oy est $(0;5)$.

□ Le symétrique de (0;5) par rapport à l'axe de la parabole est (-3;5).

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :



Exemple 3 : pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x + 2$ donner, si cela est possible, l'ordonnée à l'origine, les zéros, l'axe de symétrie, le sommet, la forme convexe ou concave et la représenter graphiquement.

□ $f(x)$ est sous forme développée, donc on obtient directement l'ordonnée à l'origine : 2.

□ $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$ donc la forme factorisée n'existe pas et $Z_f = \emptyset$.

□ Axe de symétrie : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$

□ $x = \frac{1}{2}$ est l'abscisse du sommet ; on calcule l'ordonnée :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1-2+8}{4} = \frac{7}{4}. \text{ Donc } S\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right).$$

□ $a = 1 > 0$ donc la parabole est convexe ($\cup$)

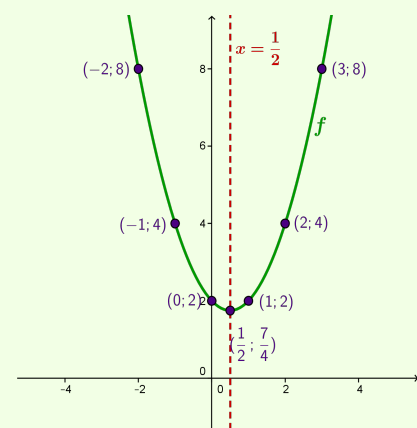
□ Points supplémentaires : $f(-1) = (-1)^2 - (-1) + 2 = 4$ et $f(-2) = (-2)^2 - (-2) + 2 = 8$

□ Le symétrique de (-1;4) par rapport à l'axe de la parabole est (2;4).

Le symétrique de (-2;8) par rapport à l'axe de la parabole est (3;8).

Le symétrique de (0;2) par rapport à l'axe de la parabole est (1;2).

Toutes ces informations se placent dans le repère et permettent de tracer la parabole :





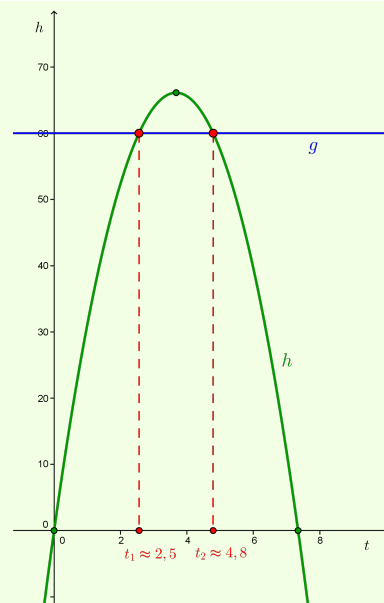
10 [A savoir] Résoudre un problème

Exemple : la hauteur h (en m) au-dessus du sol d'une fusée jouet t secondes après son lancement est donnée par $h(t) = -4,9t^2 + 36t$. Quand la fusée sera-t-elle à 60 m du sol ?

Approche graphique :

On considère les fonctions h et g définies par $h(t) = -4,9t^2 + 36t$ et $g(t) = 60$.

On les représente graphiquement de façon précise (voir ci-contre) et on lit que leurs points d'intersection ont comme abscisses environ 2,5 et 4,8.



Approche algébrique :

Il faut résoudre l'équation : $-4,9t^2 + 36t = 60 \Leftrightarrow 4,9t^2 - 36t + 60 = 0$

Ici $a = 4,9$, $b = -36$, $c = 60$, donc $\Delta = (-36)^2 - 4 \cdot 4,9 \cdot 60 = 120$

Les solutions sont : $t_{1,2} = \frac{36 \pm \sqrt{120}}{2 \cdot 4,9} = \frac{36 \pm 2\sqrt{30}}{2 \cdot 4,9} = \frac{18 \pm \sqrt{30}}{4,9}$

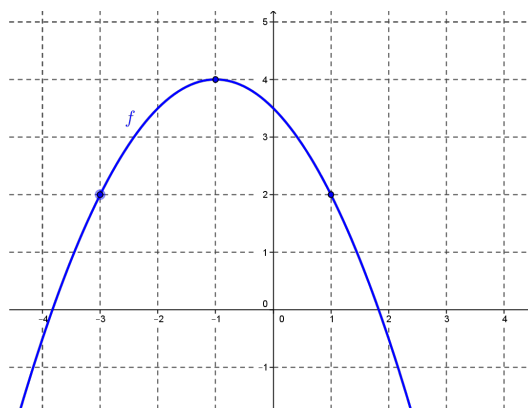
D'où $t_1 = \frac{18 - \sqrt{30}}{4,9} \approx 2,56 \text{ s}$ et $t_2 = \frac{18 + \sqrt{30}}{4,9} \approx 4,79 \text{ s}$

La fusée est donc à 60 m au-dessus du sol aux temps 2,56 s et 4,79 s environ.

Voir les exercices 24 à 26

11 [A savoir] Déterminer l'expression algébrique d'une fonction de degré 2 à partir de sa représentation graphique

Exemple 1 : on donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction f de degré 2. Déterminer son expression algébrique $f(x)$.



Sur le graphique, on lit les informations suivantes :

- ☐ le sommet de la parabole : $S(-1;4)$
- ☐ d'autres points : $f(1) = 2$ et $f(-3) = 2$
- ☐ la parabole est concave donc $a < 0$

(On ne peut pas lire précisément les zéros.)

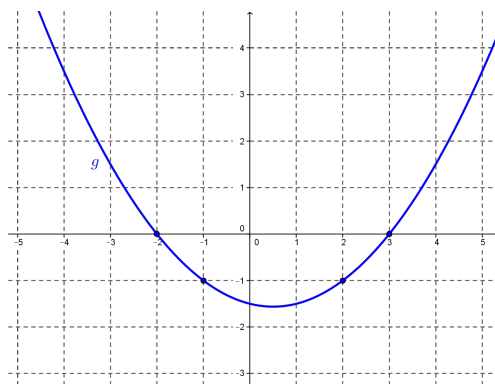
Comme on connaît le sommet, on utilise la forme canonique $f(x) = a(x-k)^2 + m$ avec $k = -1$ et $m = 4$: $f(x) = a(x - (-1))^2 + 4$ d'où $f(x) = a(x+1)^2 + 4$.

Il reste à déterminer a : on utilise un des points connus de la parabole, par ex, $f(1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \circ f(1) = a(1+1)^2 + 4 = 4a + 4 \\ \circ f(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4a + 4 = 2 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \quad (\text{on a bien } a < 0)$$

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 4$.

Exemple 2 : on donne ci-dessous la représentation graphique d'une fonction g de degré 2. Déterminer son expression algébrique $g(x)$:



Sur le graphique, on lit les informations suivantes :

- ☐ les zéros : $Z_g = \{-2; 3\}$
- ☐ d'autres points : $g(-1) = -1$ et $g(2) = -1$
- ☐ la parabole est convexe donc $a > 0$

(On ne peut pas lire précisément les coordonnées du sommet.)

Comme on connaît les zéros, on utilise la forme factorisée $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$: $g(x) = a(x - (-2))(x - 3)$ d'où $g(x) = a(x+2)(x-3)$.

Il reste à déterminer a : on utilise un des points connus de la parabole, par ex, $g(2) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \circ g(2) = a(2+2)(2-3) = -4a \\ \circ g(2) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -4a = -1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \quad (\text{on a bien } a > 0)$$

Donc $g(x) = \frac{1}{4}(x+2)(x-3)$.

Voir les exercices 27 à 31



12 [A savoir] Intersections

Exemple : déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection des fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

Il faut résoudre le système
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 1 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$$
.

On utilise la méthode par comparaison : $\frac{1}{2}x + 1 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$

C'est une équation à une inconnue de degré 2 à résoudre : $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = \frac{49}{4}$

donc $x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}}{2}$ d'où $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{3}{2}$.

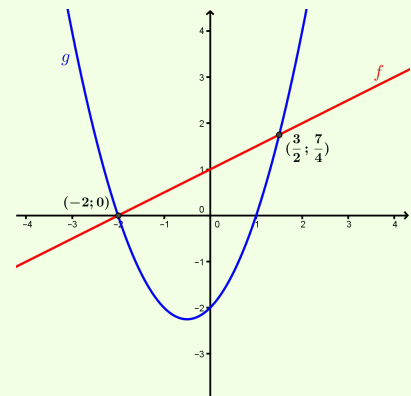
On remplace x_1 dans la 1^{re} équation pour trouver y_1 :

$$y_1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0,$$

puis on fait de même avec x_2 : $y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$.

D'où $S = \{(-2; 0); (\frac{3}{2}; \frac{7}{4})\}$.

Les points d'intersection sont donc $(-2; 0)$ et $(\frac{3}{2}; \frac{7}{4})$.



Voir les exercices 32 à 33

13 [Aller plus loin] Degré supérieur à 2

Lorsqu'on peut factoriser l'expression algébrique d'une fonction de degré 2 ou supérieur à 2, le théorème du produit nul permet de trouver ses zéros.

Exemple : déterminer les zéros de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Il faut résoudre l'équation : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(x+2) - 1(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x-1) = 0$$

Par le théorème du produit nul, on a : $x + 2 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \Leftrightarrow x = -1 \quad \Leftrightarrow x = 1$$

Donc : $Z_f = \{-2; -1; 1\}$

Remarque : une méthode pour trouver les zéros entiers et rationnels de fonctions de degré supérieur à 2 (à coefficients entiers) sera vue en deuxième année, et les représentations graphiques de fonctions de degré supérieur à 2 seront étudiées en deuxième et troisième années.

Voir les exercices 34 à 35

Forme canonique

1 Donner la forme canonique des expressions suivantes :

a. $x^2 + 2x + 3$

b. $-x^2 + 4x - 6$

c. $x^2 + 7x + 4$

2 Pour chacune des fonctions de degré 2 définies ci-dessous, donner, si cela est possible, la forme canonique, l'ordonnée à l'origine, l'axe de symétrie, le sommet et la représenter graphiquement :

a. $f(x) = x^2 + x + 1$

b. $f(x) = -x^2 + x + 1$

c. $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

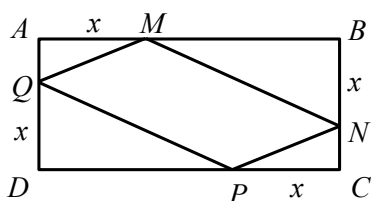
Voir la théorie 1 à 3

Problèmes d'optimisation

3 Pour quelle valeur de x l'expression $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$ est-elle minimale, et que vaut alors cette expression ? Interpréter graphiquement.

4 Une agence de voyage organise une excursion. Le prix du billet a été fixé à 60 CHF, mais la compagnie a consenti, dans le cas où plus de 100 personnes feraient le voyage, à baisser le prix de chaque billet de 25 cts par personne additionnelle. Sachant qu'il en coûte 1000 CHF à l'agence pour transporter les 100 premiers passagers et 15 CHF par passager additionnel, trouver le nombre de passagers pour lequel le bénéfice net de la compagnie est maximal. Interpréter graphiquement.

5 Dans un rectangle $ABCD$, dans lequel $\overline{AB} = 8$ et $\overline{AD} = 4$, on construit un quadrilatère $MNPQ$ tel que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = x$.



a. Déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème.

b. Quel nom prend le quadrilatère $MNPQ$?

c. Exprimer l'aire de $MNPQ$ en fonction de x .

d. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ? Quelle est cette valeur minimale ?

e. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette valeur maximale ?

6 Un fermier dispose de 160 m de clôture pour entourer un champ rectangulaire. Une grange de 13 m de long forme partiellement clôture le long d'un de ses côtés.

a. Quelles seront les dimensions du plus grand champ que l'on pourra entourer ?

b. Déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème et interpréter graphiquement.

7 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos pour un zoo selon le plan ci-contre. Quelles dimensions donner à ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol ?



Voir la théorie 4

Équations – 1^{re} partie

8 Vrai ou faux ? Justifier.

a. L'équation $x^2 = (x+1)^2$ n'a pas de solution.

b. L'équation $(x+1)(-3-3x)^2 = 0$ admet une seule solution.

c. L'équation $(x+1)(-3-3x)^2 = 0$ est équivalente à l'équation $3x+1 = x$.

9 Résoudre les équations suivantes :

a. $x(x-1) + 2x(x-3) = 0$

b. $(3x+1)^2 - 4 = 0$

c. $(x-1)(x+3) - 2(x-1)(x-2) = 0$

d. $2x(x-4) + (x-5)(4-x) = 0$

e. $x^2 - (3x+1)^2 = 0$

f. $4x^2 - (x+3)^2 = 0$

10 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 2x + 1 = 0$

c. $x^2 = 3$

b. $x^2 + 4 = 0$

d. $3x^2 - \frac{1}{15} = 0$

11 Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2 - 7x = 0$

b. $3(x-1)^2 - 7(x-1) = 0$

c. $x^2 + 2x + 1 = (2x-3)(x+1)$

Voir la théorie 5 à 6

Équations – 2^e partie

12 Résoudre les équations suivantes par la complétion du carré :

a. $x^2 + 8x + 9 = 0$ c. $4x^2 - 12x - 11 = 0$

b. $x^2 + 6x + 7 = 0$ d. $3x^2 - 4x - 1 = 0$

13 Résoudre les équations suivantes en donnant un résultat exact simplifié au maximum :

a. $4x^2 + 11x + 6 = 0$ e. $0 = 11x^2 + 31x + 20$

b. $x + \frac{13}{32}x^2 + \frac{29}{32} = 0$ f. $x^2 = 1 + 2x$

c. $2x^2 - 7x = -3$ g. $9x^2 + 25 = 30x$

d. $37x + 14 = 15x^2$ h. $x^2 + x + 1 = 0$

14 Résoudre les équations suivantes, puis factoriser le membre de gauche :

a. $2x^2 + 11x + 9 = 0$

b. $-13x^2 + 17x + 30 = 0$

c. $5x^2 + 4x + 8 = 0$

d. $32x^2 - 32x + 8 = 0$

e. $-9x^2 + 14x + 39 = 0$

15 Quelles sont les dimensions d'un rectangle dont :

a. le périmètre vaut 78m et l'aire 360m² ?

b. le périmètre vaut 68m et l'aire 290m² ?

16 Un terrain rectangulaire de 26m sur 30m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire de ce trottoir est 240m², quelle est sa largeur ?

17 Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle sachant que le petit côté a 21cm de moins que le moyen et que celui-ci a 3cm de moins que l'hypoténuse.

18 On considère les équations de la famille

$x^2 + mx + 8 = 0$ où m est un nombre réel. Quelles sont les équations de cette famille qui admettent -4 comme solution ? Quelle est alors l'autre solution ?

19 On considère les équations de la famille $x^2 + 4mx + m + 3 = 0$ où m est un réel. Quelles sont les équations de cette famille qui admettent deux solutions de signe opposés ?

20 Déterminer la valeur du nombre réel p pour que l'équation de la forme $x^2 - 6x + p = 0$ satisfasse la condition donnée (x_1 et x_2 sont les solutions de l'équation) :

a. $x_1 = x_2$ c. $x_1 = -x_2$

b. $x_1 = 2x_2$ d. $x_1 = \frac{1}{x_2}$

21 Existe-t-il un nombre réel tel que la somme de ce nombre et de son inverse soit égale à 1 ? Si oui, donner un exemple, sinon quelle devrait être cette somme pour qu'un tel nombre existe ?

22 Dans chaque cas, déterminer l'ensemble des préimages de -1, 0 et 2 par la fonction réelle f définie par :

a. $f(x) = 2x^2$ b. $f(x) = 3x^2 + x$

23 Déterminer une équation du 2^e degré qui admette :

a. deux solutions réelles qui sont -2 et 4

b. une unique solution réelle qui est 7

c. deux solutions réelles qui sont 75 et -36

d. deux solutions réelles qui sont $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$

e. une unique solution réelle qui est 1 et dont le coefficient de x^2 soit 7

f. aucune solution et dont le coefficient de x^2 soit -4.

Voir la théorie 7 à 8

Représentations graphiques et problèmes

24 Pour chacune des fonctions f de degré 2 définies ci-dessous, donner, si possible, l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, l'axe de symétrie, le sommet et la représenter graphiquement :

a. $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

b. $f(x) = -2x^2 - 1$

c. $f(x) = (1-x)(x+4)$

d. $f(x) = (x+5)^2 - 34$

e. $f(x) = -3(x+1)^2 - 2$

f. $f(x) = 2\left(\frac{1}{5}-x\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)$

g. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

h. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

i. $f(x) = (x+2)^2$

j. $f(x) = -x^2 + x + 4$

k. $f(x) = 2x^2 - 8x - 10$

25 Une balle de baseball est lancée verticalement avec une vitesse initiale de 19,6 m/s. La hauteur h au-dessus du sol en mètres après un temps t en secondes est donnée par la fonction $h(t) = -4,9t^2 + 19,6t$.

a. Quand la balle sera-t-elle à 14,6 m au-dessus du sol ?

b. Quand touchera-t-elle le sol ?

Résoudre d'abord graphiquement puis algébriquement ce problème.

26 A partir d'un pont situé à 20 m au-dessus d'une rivière, une pierre est jetée vers le haut avec une vitesse initiale de 10 m/s. A partir de ce moment, la hauteur h du projectile par rapport à la rivière [en m] au temps t [en s] est donnée par la formule : $h(t) = 20 + 10t - \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 10 \text{ m/s}^2$.

a. A quel moment la pierre atteint-elle sa hauteur maximale ?

b. Quelle est cette hauteur maximale ?

c. Combien de temps après son lancer la pierre retombe-t-elle dans l'eau ?

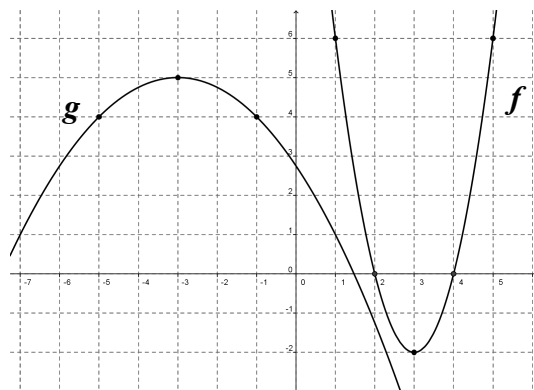
d. Déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème.

e. Interpréter graphiquement.

Voir la théorie 9 à 10

Exprimer à partir d'une représentation graphique

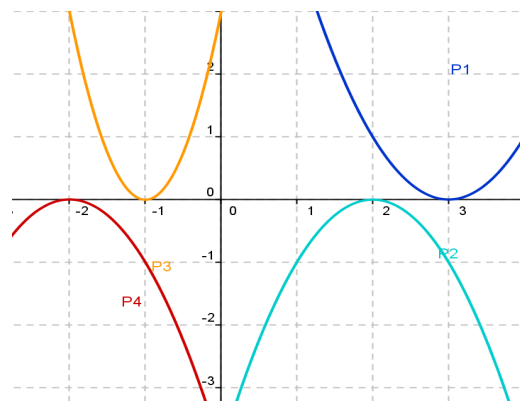
27 Voici une représentation graphique de deux fonctions du deuxième degré f et g :



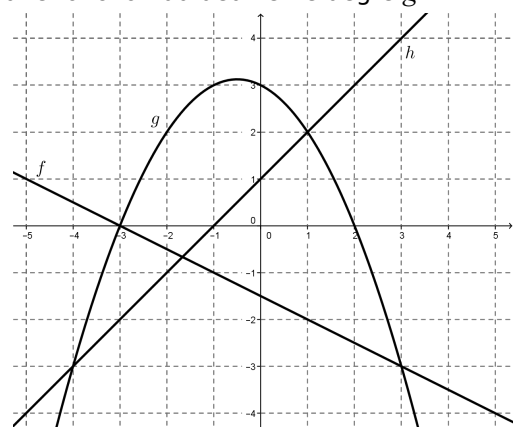
a. Déterminer l'expression algébrique de chaque fonction. (Donner les formes développée, canonique et factorisée de chaque fonction.)

b. Calculer les coordonnées exactes des points d'intersection des fonctions avec les axes Ox et Oy .

28 On considère les représentations graphiques suivantes de quatre fonctions P1, P2, P3, P4 de degré 2. Déterminer l'expression algébrique de chacune de ces fonctions.



29 Voici les représentations graphiques de deux fonctions du premier degré f et h et d'une fonction du deuxième degré g :



a. Déterminer à partir du graphique :

- i $f(1)$ iv $g(1)$ vii $h(1)$
 ii $f(-2)$ v $g(-2)$ viii $h(-2)$
 iii $f(0)$ vi $g(0)$ ix $h(0)$

b. Vrai ou faux ? « Le point $(-49; -48)$ appartient à la courbe représentative de h . »

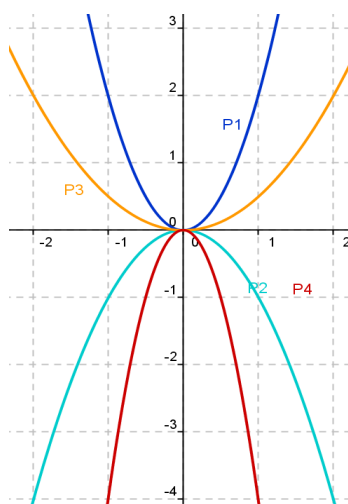
c. Résoudre graphiquement :

- i $f(x) = -3$ v $f(x) = h(-3)$
 ii $g(x) = 3$ vi $g(x) = h(x)$
 iii $h(x) = 0$ vii $g(x) > f(x)$
 iv $f(x) = g(2)$

d. Lire sur le graphique les zéros de f , g et h .

e. Déterminer les expressions algébriques de f , g et h .

30 On considère les représentations graphiques suivantes de quatre fonctions P1, P2, P3, P4 de degré 2. Déterminer l'expression algébrique de chacune de ces fonctions.



31 Soient les trois points A(1;2), B(2;4) et C(4;-4).

- a.** Sont-ils alignés ?
b. Déterminer l'expression algébrique de la fonction de degré 2 passant par ces trois points

Voir la théorie 11

Intersections

32 Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points d'intersection de la droite d et de la parabole P suivantes :

a. $d: 3x+y-2=0$ et $P: y=2x^2-5x+2$;

b. $d: x+2y-4=0$ et $P: y=\frac{1}{2}x^2+1$.

33 On considère les trois fonctions f , g et h définies par $f(x)=1-2x+x^2$,
 $g(x)=2(x-1)^2-3$ et $h(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-6)$.

a. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection de ces fonctions.

b. Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de ces fonctions.

Voir la théorie 12

Degré > 2

34 Résoudre les équations suivantes :

- a.** $(x^2 - 9)(2x + 1) = (x + 3)(2x + 1)^2$
b. $(x + 1)(2 - x)(x + 3) + (x + 1)(2 - x)(5 - 2x) = (x + 1)(x - 2)$

35 Résoudre les équations suivantes :

- a.** $x^3 - x = 0$
b. $3x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$
c. $8x^3 - 4x^2 + 54x = 27$
d. $-x^3 + 7x^2 = 10x$
e. $3x^2 - 54 = 0$

Voir la théorie 13

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

36 On considère les expressions suivantes. Les écrire sous forme canonique en utilisant explicitement la complétion du carré puis vérifier avec les formules directes que la solution est correcte :

- a.** $f(x)=x^2+5x+2$ **d.** $f(x)=x^2-9x-7$
b. $f(x)=-x^2+4x+4$ **e.** $f(x)=-x^2-x+3$
c. $f(x)=x^2+7x-4$ **f.** $f(x)=2x^2+5x-6$

37 Déterminer l'ensemble des préimages de -1 par la fonction réelle f définie par :

a. $f(x) = x^2 + 5x + 5$

b. $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

c. $f(x) = x^2 + 7x + 5$

d. $f(x) = x^2 - 6x + 7$

e. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

f. $f(x) = 2x^2 + 5x - 7$

38 Résoudre les équations suivantes :

a. $(x + 1)(x - 8) = 0$

b. $(5x - 3)(6 + x) = 0$

c. $(11 - 8x)(3x + 7) = 0$

d. $(7 - x)(x - 7) = 0$

e. $2x(3x + 2)(3x - 1) = 0$

f. $x(x + 2)(x - 3) = 0$

g. $(2x + 3)(3x - 1) = 0$

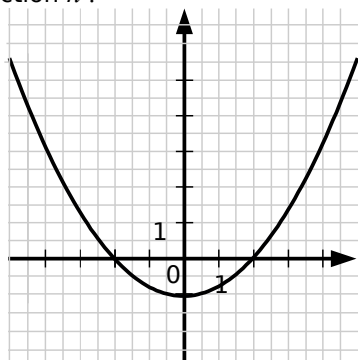
39 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 10x + 16 = 0$ d. $x^2 - 5x = -6$

b. $x^2 - 3x - 4 = 0$ e. $x^2 - 8x + 7 = 7$

c. $36 = x^2$

40 Voici une représentation graphique d'une fonction h :



a. Quelle est l'image de 0 par la fonction h ?

b. Quels nombres ont pour image 0 par la fonction h ?

c. Donner une valeur approchée de l'image de 4 par la fonction h et de l'image de -3 par

la fonction h .

41 On considère la fonction g définie par $g(x) = (x - 3)(x + 1)$.

a. Quelle est l'image de 2 par g ?

b. Quelle est l'image de -5 par g ?

c. Quelles sont les préimages de 0 par g ?

d. Quelles sont les préimages de -3 par g ?

42 On considère les fonctions du deuxième degré f et g définies par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 3$ et $g(x) = x^2 - 8x + 12$.

Déterminer pour chacune de ces fonctions :

a. les zéros ;

b. l'axe de symétrie de la parabole ;

c. les coordonnées du sommet ;

d. la concavité ou convexité de la parabole ;

e. l'ordonnée à l'origine ;

f. une représentation graphique.

43 Parmi tous les rectangles ayant un périmètre égale à 24 centimètres, quelles sont les dimensions de ceux qui ont une aire maximale ?

44 La distance qu'une voiture parcourt entre le moment où le conducteur décide de freiner et celui où la voiture s'arrête est appelée la distance de freinage. Pour une certaine voiture circulant à v km/h, la distance de freinage d (en m) est donnée par $d = 0,2v + 0,006v^2$. Si un conducteur décide de freiner 100 m avant un signal stop, à quelle vitesse doit-il rouler pour s'arrêter au bon endroit ?

Résoudre d'abord graphiquement puis algébriquement ce problème.

45 Lorsque le prix d'un lecteur de CD en vogue est 300 CHF, un magasin en vend 15 par semaine. Cependant, chaque fois que le prix est réduit de 10 CHF, on en vend deux de plus par semaine. Quel était le prix de vente si les revenus de la semaine sont de 7000 CHF ?

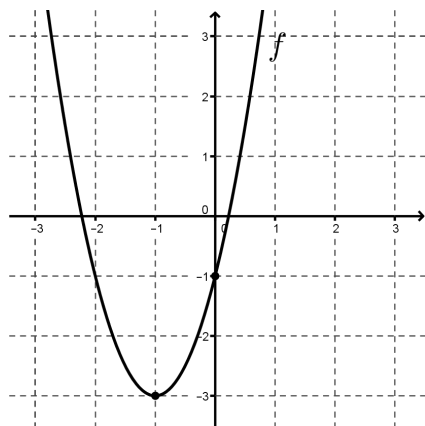
46 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Déterminer algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection de ces fonctions. Puis illustrer graphiquement.

47 On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -3x^2 - x + 5$ et $g(x) = 2x + 7$.

Déterminer algébriquement les coordonnées des éventuels points d'intersection de ces fonctions. Puis illustrer graphiquement.

48 Voici une représentation graphique d'une fonction f du deuxième degré :



a. Déterminer l'expression algébrique de f .

b. Calculer les coordonnées exactes des points d'intersection de f avec les axes Ox et Oy .

49 Résoudre les équations suivantes :

a. $(x^2 - 7)(x^2 + 2)(x + 3) = 0$

b. $x^4 = 81$

c. $5x^3 = 3x$

d. $(x - 1)^4 - (x + 1)^4 = 0$

e. $x + 3 = x^2(x + 3)$

f. $(x^2 - 3x + 4)(-x^2 + 2x + 3) = 0$

50 Résoudre les équations suivantes :

a. $x^3 = 4x^2 + 11x$

b. $(x^4 - 3x^3 + x^2)(x^2 - 7) = 0$

c. $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

d. $x^4 + 81 = 18x^2$

51 Résoudre les équations suivantes :

a. $(3x^2 + 4)^2 - 2(15x^2 + 20) + 25 = 0$

b. $(2x^2 - 3)^2 - (2x^2 - 2)^2 = 0$

c. $(x^2 + 5)^2 - (3 - 2x)^2 = 0$

d. $(2x - 3)^2 - 3(4x^2 - 9) = 0$

e. $3(3x - 2)^2 - 2(9x^2 - 4) = 0$

52 Résoudre les équations suivantes :

a. $3x(3x + 6)(x + 3) = 0$

b. $7(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 3) = 0$

c. $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 0$

d. $(1 - x^2)x - 2(x^2 - x) = -x(x^2 - 2x + 1)$

e. $x^{35}(3 - x^2)(7 + 2x^2)(x - \sqrt{3})(2 - 3x) = 0$

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

36

a. $f(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{17}{4}$ $f(x) = (x - \frac{9}{2})^2 - \frac{53}{4}$

b. $f(x) = -(x - 2)^2 + 8$ **e.** $f(x) = -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{13}{4}$

c. $f(x) = (x + \frac{7}{2})^2 - \frac{33}{4}$ **f.** $f(x) = 2(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{73}{8}$

d.

37

a. $S = \{-3; -2\}$

d. $S = \{2; 4\}$

b. $S = \{1; 3\}$

e. $S = \{-4; 1\}$

c. $S = \{-6; -1\}$

f. $S = \{ \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4} \}$

38

a. $S = \{-1; 8\}$

e. $S = \{ -\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{3} \}$

b. $S = \{-6; \frac{3}{5}\}$

f. $S = \{-2; 0; 3\}$

c. $S = \{ -\frac{7}{3}; \frac{11}{8} \}$

g. $S = \{ -\frac{3}{2}; \frac{1}{3} \}$

d. $S = \{7\}$

39

a. $S = \{2; 8\}$

c. $S = \{-6; 6\}$

e. $S = \{0; 8\}$

b. $S = \{-1; 4\}$

d. $S = \{2; 3\}$

40

a. L'image de 0 par h est -1 .

b. Les nombres qui ont pour image 0 par h sont -2 et 2 .

c. Une valeur approchée de l'image de 4 par h est 3,25. Une valeur approchée de l'image de -3 par h est 1,25.

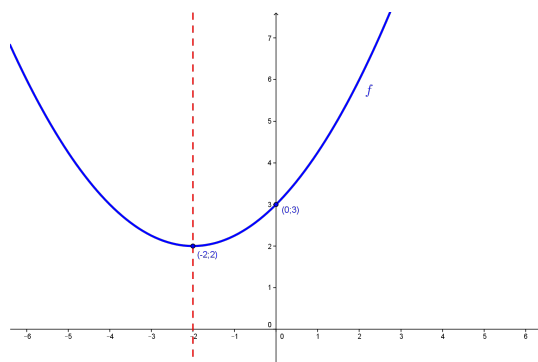
41

- a. $g(2) = (2 - 3)(2 + 1) = -3$.
- b. $g(-5) = (-5 - 3)(-5 + 1) = 32$
- c. $g^{-1}(0) = [-1; 3]$
- d. $g^{-1}(-3) = [0; 2]$

42

Pour la fonction f :

- e. pas de zéros ($Z_f = \emptyset$)
- f. $x = -2$
- g. $S = (-2; 2)$
- h. $a > 0 \Rightarrow$ parabole convexe $\cup$
- i. $f(0) = 3$
- j.



Pour la fonction g :

- a. $g(x) = x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$ donc les zéros de g sont $x = 2$ et $x = 6$ et $Z_g = \{2; 6\}$.
- b. $x = 4$
- c. $S = (-4; 4)$
- d. $a > 0 \Rightarrow$ parabole convexe $\cup$
- e. $f(0) = 12$

43 REP

44 La vitesse est d'environ 113,5 km/h.

45 Le prix de vente était de 200CHF.

46 Les points d'intersection de f et g sont $(2; 3)$ et $(-\frac{1}{3}; \frac{20}{9})$.

47 Il n'y a pas de point d'intersection entre f et g .

48

- a. $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$ (forme canonique)
- b. $(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}; 0)$, $(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}; 0)$ et $(0; -1)$

49

- a. $S = \{-3; -\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$
- b. $S = \{-3; 3\}$
- c. $S = \{-\sqrt{\frac{3}{5}}; 0; \sqrt{\frac{3}{5}}\}$
- d. $S = \{0\}$
- e. $S = \{-3; -1; 1\}$
- f. $S = \{-1; 3\}$

50

- a. $S = \{2 - \sqrt{15}; 0; 2 + \sqrt{15}\}$
- b. $S = \{-\sqrt{7}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}; 0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \sqrt{7}\}$
- c. $S = \{-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\}$
- d. $S = \{-3; 3\}$

51

- a. $S = \{-\sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{\frac{1}{3}}\}$
- b. $S = \{-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\}$
- c. $S = \emptyset$
- d. $S = \{-3; \frac{3}{2}\}$
- e. $S = \{\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\}$

52 Résoudre les équations suivantes :

- a. $S = \{-3; -2; 0\}$
- b. $S = \emptyset$
- c. $S = \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$
- d. $S = \{0; 1\}$
- e. $S = \{-\sqrt{3}; 0; 2/3; \sqrt{3}\}$

« Présentée sous forme mathématique, l'erreur acquiert un grand prestige »
Gustave Le Bon, anthropologue, psychologue et sociologue français (1841-1931)

A savoir en fin de chapitre

Fonctions de degré 2

- ✓ connaître la définition des fonctions de degré 2 et leurs caractéristiques : axe de symétrie, sommet, concave/convexe, forme canonique, forme développée ;
- ✓ représenter graphiquement une fonction de degré 2 en utilisant la forme canonique ;

Voir la théorie 1 à 3 et l'exercice 1 à 2

Optimisation

- ✓ modéliser une situation à l'aide d'une fonction de degré 2 ; déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème ; déterminer les valeurs extrêmes de la variable dépendante ;

Voir la théorie 4 et les exercices 3 à 7

Équations de degré 2 simples

- ✓ connaître le théorème du produit nul ;
- ✓ résoudre des équations de degré 2 par factorisation ;

Voir la théorie 5 à 6 et les exercices 8 à 11

Équations de degré 2 avec Viète

- ✓ connaître la formule de Viète ;
- ✓ résoudre des équations de degré 2 en utilisant la formule de Viète ;
- ✓ factoriser une expression du 2^e degré à l'aide de la formule de Viète ;
- ✓ résoudre un problème en le modélisant par une équation de degré 2 ;

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 12 à 23

Représentation graphique et résolution de problèmes

- ✓ représenter graphiquement de manière efficace une fonction de degré 2 quelle que soit la forme (développée, canonique, factorisée) sous laquelle elle est donnée ;
- ✓ résoudre algébriquement un problème pouvant être modélisé par une équation ou une fonction de degré 2 et interpréter graphiquement ;

Voir la théorie 9 à 10 et les exercices 24 à 26

Expression algébrique à partir d'un graphique

- ✓ déterminer l'expression algébrique d'une fonction du deuxième degré étant donnée sa représentation graphique ;

Voir la théorie 11 et les exercices 27 à 31

Intersections

- ✓ poser et résoudre un système d'équations pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de deux fonctions ;

Voir la théorie 12 et les exercices 32 à 33

Degré > 2

- ✓ résoudre des équations de degré supérieur à 2 en se ramenant aux degrés 1 ou 2 par factorisation ;

Voir la théorie 13 et les exercices 34 à 35

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

<http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch07>

