Chapitre 6 - Calcul littéral

Première page de « Kitab al-moukhtasar fi hisab al-jabr » ou « Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison », publié en 825 par Al-khwarizmi

Problème

Le roi fit venir un prisonnier devant deux cellules et lui expliqua que chacune contenait soit un tigre soit une princesse, et que toutes les combinaisons étaient possibles : il pouvait y avoir un tigre dans chaque cellule, une princesse dans chaque cellule, ou un tigre et une princesse.
Le roi fit apposer les affiches suivantes sur les portes des deux cellules :
Affiche 1: Au moins une des deux cellules contient une princesse.
Affiche 2: Il y a un tigre dans l'autre cellule.
« Dois-je faire confiance à ce qui est écrit ? » demanda le prisonnier.
« Elles disent la vérité toutes les deux, ou bien elles sont fausses toutes les deux » affirma le roi, puis il lui dit de choisir et d'entrer.
Quelle cellule doit choisir le prisonnier pour ne pas être dévoré ?

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] Monômes, polynômes

Définir précisément les notions de monômes et de polynômes donner des exemples.

2 [Aller plus loin] Monômes, polynômes

1. Donner la définition générale d'un monôme et d'un polynôme à une variable x.

2. Donner la définition générale d'un monôme à trois variable x, y et z et d'un polynôme à une variable x.

3 [Souvenirs] Développer les expressions

1. Avec des trous

Recopier et compléter les expressions à l'aide des identités remarquables :

a. $(.... + 4)^2 = x^2 + ... + ...$

b. $(y - ....)^2 = ... - 6y + ...$

c. $(.... + 6)(.... - ....) = k^2 - ....$

d. $(1 - ....)(.... + ...) = ... - 49x^2$

e. $(.... - 8)^2 = ... - 48x + ...$

f. $(.... + ...)(.... - 3) = 100y^2 - ....$

2. Calcul mental

a. Développer et réduire l'expression

$(x + 15)^2 - (x - 15)^2$.

b. En déduire le résultat de $1215^2 - 1185^2$.

c. Calculer mentalement 99^2.

d. Calculer mentalement 102^2.

e. Calculer mentalement $95 \cdot 105$.

f. Calculer mentalement 49^2.

g. Calculer mentalement $1001 \cdot 999$.

3. Ne rien oublier

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $(x^2 + 2)^2$

b. $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 - 8x^2$

c. $2(3t - 5)^2 - 2(1 - 4t)^2$

d. $(1 + 4y)^2 - (2y + 3)^2 - (1 + 4y)(2y + 3)$

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 7

4 [Souvenirs] Factoriser

1. Une propriété connue

a. Recopier et compléter (k, a et b sont des nombres réels quelconques) :

$$k\cdot a+k\cdot b=\ldots\ldots\cdot(\ldots\ldots+\ldots\ldots)\quad ;\quad k\cdot a-k\cdot b=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b. Quelle est la propriété utilisée ? Quelle action réalise-t-on ? Comment appelle-t-on k ?

c. Pour chacune des expressions suivantes et en utilisant la question précédente, indiquer quelle expression ou quel nombre peut jouer le rôle de k, quelles expressions ou quels nombres peuvent jouer le rôle de a et de b:

$$\text{A} = 7x + 14 \qquad \text{B} = 8y + 7y \qquad \text{C} = 6ab + 5a$$

$$\text{D} = 6m - 9m^2 \qquad \text{E} = 6m + 12m^2 \qquad \text{F} = 15m^4 - 5m^5$$

$$\text{G} = (7x + 5)(3x + 2) + (7x + 5)(x - 9)\ ; \qquad \text{H} = (x - 4)(3x - 5) - (8x + 7)(3x - 5)\ ;$$

$$\text{I} = (x^2 - 4)(3x - 5) - (x^2 - 4)(3x - 5)^2\ ;$$

d. Transformer chacune des expressions ci-dessus en un produit de facteurs.

2. Différences de deux carrés

Factoriser et réduire ces expressions le plus possible :

a. $x^2 - 16$

b. $1 - y^2$

c. $100x^2 - 9$

d. $36 - 81z^2$

e. $4\pi^2 - 25$

f. $(t + 3)^2 - 16$

g. $(2x + 1)^2 - 25$

h. $(3i + 7)^2 - (i + 5)^2$

3. D'autres identités

Factoriser ces expressions le plus possible :

a. $t^2 + 81 + 18t$

b. $4x^2 - 4xy + y^2$

c. $81 + 16y^2 - 72y$

d. $x^2 + 36 - 12x$

e. $\frac{4}{9}p^2 + \frac{4}{3}pq + q^2$

f. $\pi^2 + 10\pi + 25$

g. $x^2+12x+20$

h. x^2+3x+2

i. x^2-3x+2

j. x^2-x-6

Prérequis et activités de découverte

5 [Activité] Factoriser ou développer?

Soit x une variable réelle. On considère l'expression suivante: $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$

a. L'expression $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$ est-elle une somme ou un produit ?

b. $(x+3)(2-x)(2+x)$ et $(4-x^2)(x^2-9)$ sont les .... de l'expression [compléter].

c. L'expression $(4-x^2)(x^2-9)$ est-elle une somme ou un produit ?

d. $(4-x^2)$ et (x^2-9) sont les .... de l'expression considérée en c. [compléter].

e. Développer et réduire le plus possible $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$.

f. Factoriser le plus possible $(x+3)(2-x)(2+x)+(4-x^2)(x^2-9)$.

Voir la théorie 3 à 7 et les exercices 8 à 17

6 [Aller plus loin] Ruses!

Factoriser le plus possible :

a. $3xy+6xy^2+1+2y$

b. $y^2+12y+36-4y^2-24y$

c. $3(x-y)x^2+7(y-x)z^3$

7 [Aller plus loin] Feeling!

Factoriser le plus possible :

a. $2x^2-5x-3$

b. $2x^2-x-3$

8 [Aller plus loin] Triangle de Pascal

1. Qu'est-ce que le triangle de Pascal ?

2. Quel rapport y a-t-il entre le triangle de Pascal et les identités remarquables ?

3. Qui était Pascal ?

Voir la théorie 8 à 10 et les exercices 18 à 23

1 [Souvenirs] Monômes et polynômes

Définition

Un **monôme** est le produit d'un nombre réel donné, appelé **coefficient**, et d'une ou plusieurs variables élevées à certaines puissances entières positives. Le **degré** d'un monôme est la somme des exposants des variables qui le composent.

Exemples

- ☐ $2x^3y^2z^6$ est un monôme de coefficient 2 et de degré 11.
- ☐ $\dfrac{-2x^{13}u^2}{5}$ est un monôme de coefficient $-\dfrac{2}{5}$ et de degré 15.
- ☐ 9, x, $3y$, $-x^2$, $3t^4$ et $\sqrt{2}y^3$ sont des monômes d'une variable.
- ☐ $\dfrac{9}{x}$, x^{-5}, $3xyz+1$, $\sqrt{x}$ ne sont pas des monômes.

Remarque : une constante est dite de degré 0.

Définition

Un **polynôme** est une somme de monômes. Ces monômes s'appellent les **termes** du polynôme. Le degré d'un polynôme est le plus grand degré des monômes qui le composent.

Exemples

- ☐ $4x^4y^2+7xy^2+9$ est un polynôme de degré 6.
- ☐ $4x^4+7x^2+9x^{99}$ est un polynôme de degré 99.
- ☐ $2x+3$, $-y^3-8$ et $x^5-\pi$ sont des polynômes.

Vocabulaire

Les **termes** sont les éléments qui constituent une somme.
Les **facteurs** sont les éléments qui constituent un produit.

Exemples

- ☐ Dans l'expression $2x+3$, $2x$ et 3 sont les termes.
- ☐ Dans l'expression $(2x+3)(x-4)$, $(2x+3)$ et $(x-4)$ sont les facteurs.

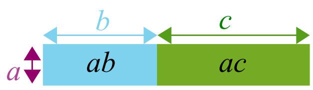
2 [Souvenirs] Développer une expression algébrique

Définitions

La **distributivité** est une propriété de la multiplication qui permet d'effectuer le produit d'un nombre et d'une somme : si a, b et c sont des variables réelles, alors

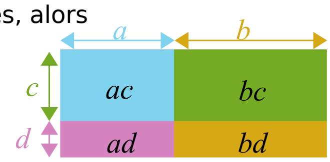
$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b-c) = ab - ac$$



La **double distributivité** découle de cette première propriété et permet d'effectuer le produit de deux sommes : si a, b, c et d sont des variables réelles, alors

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$



Développer une expression algébrique, c'est la transformer en une **somme** de termes.
Réduire une expression algébrique, c'est l'écrire avec **le moins de termes** possibles.

Exemple : Développer et réduire l'expression $(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$

$(2x+3)(x-4)+4x(x-2)$ ← On commence par les multiplications (ordre des opérations)

$= 2x^2+3x-8x-12+4x^2-8x$ ← On additionne les termes de mêmes degrés.

$= 6x^2-13x-12$

Exemple : La **forme développée** de $(x-1)(x^3+3x-2)$ est $x^4-x^3+3x^2-5x+2$.

Voir les exercices 1 à 7

3 [Souvenirs] Factoriser

Factoriser une expression algébrique, c'est la transformer en **produit** de **facteurs**.

Exemple

- ☐ $3x^3+6x^2$ se factorise en $3x^2(x+2)$.
- ☐ $3x^2$ et $(x+2)$ sont les **facteurs** de $3x^2(x+2)$.

Remarque : $x(x-3)+4$ n'est pas une forme factorisée de x^2-3x+4 , car $x(x-3)$ et 4 ne constituent pas un produit, ce sont les termes d'une somme !

4 [A savoir] Identités remarquables

Théorème

Si a, b et $x \in \mathbb{R}$, alors on a :

1 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

4 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

Exemple : développer puis réduire au maximum $(2x+3zx)^2$, $(x-5)(x+3)$, $(x^4-2)^2$ et $(2x^3y-3x^2y^4)(2x^3y+3x^2y^4)$

directement avec la 1ere identité : $(2x+3zx)^2=4x^2+12zx^2+9z^2x^2$

directement avec la 4e identité : $(x-5)(x+3)=x^2-2x-15$

directement avec la 2e identité : $(x^4-2)^2=x^8-4x^4+4$

directement avec la 3e identité : $(2x^3y-3x^2y^4)(2x^3y+3x^2y^4)=4x^6y^2-9x^4y^8$

Remarque : les identités remarquables peuvent servir à factoriser et à développer, mais sont surtout utiles pour la factorisation !

5 [A savoir] Pourquoi factoriser?

L'intérêt de la factorisation est le suivant:

- ☐ si on connaît les signes de a et b , on ne connaît pas le signe de de $a+b$ ou de a - b ; par contre, grâce à la règle des signes, on connaît celui de $a \cdot b$. Il est donc souvent intéressant, lorsqu'on s'intéresse à étudier le signe d'une expression, que celle-ci soit factorisée ;
- ☐ lorsqu'on sait que $a+b=0$ ou $a-b=0$, on ne peut pas en déduire grand chose à propos des valeurs de a et b , hormis bien sûr qu'elles soient opposées ou égales ; par contre, quand $a \cdot b=0$, on est certain que $a=0$ ou $b=0$. Ce fait sera fondamental lorsque nous étudierons dans le chapitre suivant les équations de degré supérieur à un.

Exemple

Si on souhaite trouver tous les x tels que $x^2-2x-15=0$, c'est bien difficile ...

Par contre, si on factorise l'expression à gauche: $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$, le problème devient : trouver tous les x tels que $(x-5)(x+3)=0$, ce qui est facile à résoudre : soit $x-5=0$, soit $x+3=0$, c'est-à-dire soit $x=5$, soit $x=-3$.

6 [A savoir] Méthodes de base pour factoriser

1 Mise en évidence

La **mise en évidence** est une technique fondamentale de factorisation qui consiste à utiliser la distributivité “dans l'autre sens ”: si a, b et c sont des variables réelles, alors

$ab + ac = a(b + c)$ $\qquad$ $ab - ac = a(b - c)$

Exemple : faire apparaître un facteur commun dans l'expression $3y + 21$ puis factoriser.

$3 \cdot y + 3 \cdot 7$	⟵ On repère un facteur commun.
$= 3(y + 7)$	⟵ On factorise par mise en évidence.

Remarque: on peut vérifier le résultat d'une mise en évidence en effectuant la distributivité.

On peut également mettre en évidence une expression entière et non seulement un unique nombre ou un monôme.

Exemple : factoriser l'expression $(5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)^2$

$(5x - 7)(9x - 2) - (5x - 7)(5x - 7)$	⟵ On repère un facteur commun.
$= (5x - 7)[(9x - 2) - (5x - 7)]$	⟵ On factorise par mise en évidence.
$= (5x - 7)(4x + 5)$	⟵ On réduit l'expression à l'intérieur des crochets.

2 Identités remarquables

Les **identités remarquables** permettent de retrouver la forme factorisée de certaines expressions.

Exemple: factoriser l'expression $25x^2 - 20x + 4$.

$25x^2 - 20x + 4$ ⟵ On observe trois termes et des signes différents.

$= (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2$ ⟵ On repère l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$= (5x - 2)^2$ ⟵ On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Remarque : Utilisées de gauche à droite, les identités remarquables développent, utilisées de droite à gauche, elles factorisent.

Remarque : l'expression $x^3-5x^2-4x-20$ se factorise en $(x^2-4)(x+5)$ mais le facteur x^2-4 peut encore s'écrire sous la forme $(x+2)(x-2)$

On dit alors que $(x^2-4)(x+5)$ est **partiellement factorisé** et que $(x+2)(x-2)(x+5)$ est **complètement factorisé**.

7 [A savoir] Un peu de méthode

Même si plusieurs chemins mènent à la factorisation complète, il est souvent judicieux d'essayer ces différentes techniques dans un ordre précis. En effet, commencer par des techniques les plus « simples » permet rendre l'expression moins complexe pour l'application des techniques plus « élaborées ».

1. La mise en évidence
2. Les identités remarquables

Exemple: factoriser l'expression $3x^5+6x^3+27x$

$3x^5 + 18x^3 + 27x$

$= 3x(x^4 + 6x^2 + 9)$ ⟵ on met en évidence.

$= 3x(x^2 + 3)^2$ ⟵ on factorise avec l'identité remarquable.

Attention de ne pas oublier de continuer à **factoriser le plus possible** après la première étape de factorisation ! Il faut étudier chaque nouveau facteur obtenu pour voir si il ne peut pas lui-même encore être factorisé.

Exemple: factoriser l'expression $(2x+1)(-y^2-1)-(3-2y^2)(2x+1)$

$(2x+1)(-y^2-1)-(3-2y^2)(2x+1)$

$= (2x+1)[(-y^2-1)-(3-2y^2)]$ ←on met en évidence

$= (2x+1)(-y^2-1-3+2y^2)$ ←on réduit

$= (2x+1)(y^2-4)$ ←on réduit

$= (2x+1)(y-2)(y+2)$ ←on factorise avec une identité remarquable

Voir les exercices 8 à 17

8 [Aller plus loin] Autres méthodes pour factoriser

3 Ruses et astuces !

Les ruses permettant de factoriser une expression algébrique sont nombreuses et, lors d'exercices, il faut faire le choix du(des) meilleur(s) outil(s) à employer.
Il arrive que plusieurs techniques différentes mènent à une même factorisation. De plus, on peut à tout moment tester l'exactitude d'une factorisation en développant le résultat obtenu pour vérifier qu'on retrouve bien l'expression initiale !

i Regroupements

- **Repérer une identité remarquable « cachée »**

Exemple 1 : factoriser l'expression $x^2+6x+9-y^2$

$$\begin{aligned} x^2+6x+9-y^2 &= (x^2+6x+9)-y^2 \\ &= (x+3)^2-y^2 \\ &= [(x+3)+y][(x+3)-y] \\ &= (x+y+3)(x-y+3) \end{aligned}$$

- **Factorisation partielle**

Exemple 2 : factoriser l'expression $4ac+2bc-2ad-bd$

$$4ac+2bc-2ad-bd=2c(2a+b)-d(2a+b)=(2a+b)(2c-d)$$

- **Factoriser par déplacement de termes**

Exemple 3 : factoriser l'expression $x^2+xz+z-1$

$$x^2+xz+z-1=x^2-1+xz+z=(x+1)(x-1)+z(x+1)=(x+1)(x-1+z)$$

Exemple 4 : factoriser l'expression $ab+4a-a^2-2b-4$

$$\begin{aligned} ab+4a-a^2-2b-4 &= ab-2b-a^2+4a-4 \\ &= ab-2b-(a^2-4a+4) \\ &= b(a-2)-(a-2)^2 \\ &= (a-2)(b-(a-2))=(a-2)(b-a+2) \end{aligned}$$

ii Ruse de signe

Exemple 5 : factoriser l'expression $(a+b+c)(c-d)+(a+c+d)(d-c)$

$$\begin{aligned} (a+b+c)(c-d)+(a+c+d)(d-c) &= (a+b+c)(c-d)-(a+c+d)(c-d) \\ &= (c-d)[(a+b+c)-(a+c+d)] \\ &= (c-d)(b-d) \end{aligned}$$

9 [Aller plus loin] Un peu – plus - de méthode

Losque l'on dispose des ruses et astuces supplémentaires, on ne les utilise à priori qu'en dernier recours, après avoir testé les méthodes plus simples.

1. La mise en évidence
2. Les identités remarquables
3. Les autres ruses et astuces de factorisation

Exemple: factoriser l'expression $x^2+xz+z-x$

$$x^2+xz-z-x=x(x+z)-(x+z)=(x+z)(x-1)$$

10 [Aller plus loin] D'autres identités remarquables

Théorème

Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a :

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
3. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$
4. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

Voir les exercices 18 à 25

Exercices d'entraînement

Développer - réduire

1 Calculer :

a. la différence de $2x^3-4x^2+5x+1$ et de x^4-3x^2-2x+3.

b. le produit de x^2-3x+5 par $2x-3$.

2 Réduire le plus possible les expressions suivantes :

a. $(6x+5y)-(4x+y-3z)-(2z+5x+3y)$

b. $2a-(3b+3c)-(5b-(6c-6b)+5c)$

3 Développer et réduire le plus possible les expressions suivantes :

a. $(3a)^3$

b. $\left(\dfrac{2a}{3b^2}\right)^3$

c. $(5x^2)^4$

d. $(2dx^3y^4)^3$

e. $9x(3x+1)$

f. $13x^2(2x-5)$

g. $ax(b-3x)$

h. $5x^3(x^2+1)$

4 Développer puis réduire ces expressions le plus possible :

a. $\left(n-\dfrac{1}{6}\right)^2$

b. $\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2$

c. $\left(y+\dfrac{2}{5}\right)\left(y-\dfrac{2}{5}\right)$

d. $\left(4x-\dfrac{3}{8}\right)^2$

e. $\left(3x+\dfrac{7}{2}\right)^2$

f. $\left(\dfrac{2}{3}w+5\right)\left(5-\dfrac{2}{3}w\right)$

5 Développer puis réduire ces expressions le plus possible :

a. $(x+3)(x+5)$

b. $(x-3)(x+2)$

c. $(a-4)(a+5)$

d. $(x-1)(x-17)$

e. $(x^2+4)(x^2-8)$

f. $(x-2a)(x+3a)$

6 Développer puis réduire les expressions suivantes.

a. $(a+3b-1)^2$

b. $(2x+3)^2$

c. $(4x-1)(x^2+3x+2)$

7 n désigne un nombre entier. On pose $A=(3n+1)^2+16n^2-26n+3$.

a. Développer et réduire A.

b. Montrer que A est le carré d'un nombre entier.

Voir la théorie 1 à 2

Factoriser

8 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. $8a^3+10ba^2-2a$

b. $112a^3b^2c^2+32a^3b^2c^3+16a^2b^2c^3$

c. $y(b-a)-x(b-a)$

d. x^4+x^6

e. $12-12x$

f. $(a+b)(c-a)+(a+b)(a-b)+(a+b)(b-c)$

g. $(3x+5)(2x-1)-(2x-1)(7x-2)$

h. $(3x+5)(2x-1)4x-(2x-1)3x(7x-2)$

i. $(-6x+1)(4x^2-4)-(4x^2-4)(2x-2)$

9 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. x^2-1

b. $4a^2-4ab+b^2$

c. $x^2+16x+64$

d. $9x^2-12x+4$

e. x^2+5x+6

f. $x^4+2x^2y^2+y^4$

g. $16x^4-49$

h. x^3-4x^2+4x

i. x^2-2x-3

j. x^2-x-42

10 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. $x^2+16-8x$

b. x^4+2x^2+1

c. $a^2-a+\dfrac{1}{4}$

d. $0,81-0,64x^2$

e. $x^2+5x-14$

f. x^2+2x-8

g. $2x^3-6x^2-36x$

h. $3x^3-36x^2+108x$

i. $4x-x^3$

j. $12x-2x^2-18$

11 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. x^2-2x-8

b. x^2+9x+8

c. $x^2-15x+50$ **e.** x^2+x-12

d. $x^2+4x-12$ **f.** x^2-x-90

12 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. $4x^2+12xy+9y^2$

b. $(x+1)^2-(x-1)^2$

c. $(a+b)^2-c^2$

d. $(a-b)^2-2x(a-b)+x^2$

13 Indiquer ce qui a été réalisé : Réduit ? Développé? Factorisé ?

a. $(x+1)^2-4(1-x)^2=x^2+2x+1-4(1-2x+x^2)$

b. $x^2+2x+1-4(1-2x+x^2)=$
$x^2+2x+1-4+8x-4x^2$

c. $x^2+2x+1-4+8x-4x^2=-3x^2+10x-3$

d. $x^2-2x+1=(x-1)^2$

14 Soit x une variable réelle. On considère l'expression suivante :
$x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^4-9)$

a. L'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^4-9)$ est une ....

b. $x^4(x^2-3)(x^2+3)$ et $4(x^4-9)$ sont les .... de l'expression.

c. L'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)$ est ....

d. x^4, (x^2-3) et (x^2+3) et sont les .... de l'expression $x^4(x^2-3)(x^2+3)$.

e. Développer le plus possible et simplifier au maximum $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^4-9)$.

f. Factoriser le plus possible $x^4(x^2-3)(x^2+3)-4(x^4-9)$

15 Impossible ? Calculer
$34356786455\cdot 34356786447-34356786451^2$

16 On considère la suite des carrés parfaits 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ...

a. Calculer 4 − 1, puis 9 − 4, puis 16 − 9, etc. Que constatez-vous ?

b. Que pouvez-vous conjecturer à propos de la suite des différences de deux carrés successifs ? Démontrer cette propriété.

17 On donne le programme de calcul suivant :

• Choisir un nombre.
• Ajouter 6.
• Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi au départ.
• Ajouter 9 à ce produit.
• Écrire le résultat.

a. Écrire les calculs intermédiaires et donner le résultat fourni lorsque le nombre choisi est 2. Recommencer avec − 5.

b. Écrire ces deux résultats sous la forme de carrés de nombres entiers.

c. Démontrer que le résultat est toujours un carré, quel que soit le nombre choisi.

Voir la théorie 3 à 7

Factoriser +

18 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. $(2x + 1)^2 + (2x + 1)$

b. $3(2x - 3)^2 - (2x - 3)$

c. $(x + 4)(3x + 4) - x - 4$

d. $(3x + 7)(2x + 1) + (x - 4)(- 2x - 1)$

19 Factoriser [le plus possible] et réduire les facteurs [le plus possible] :

a. $y(b-a)-x(a-b)$

b. $x^2+1+a(x^2+1)$

c. $x^2-1+a(1-x^2)+b(x^2-1)a$

20 Factoriser le plus possible les expressions suivantes à l'aide de la mise en évidence partielle.

a. $3a-1+3ab-b$ **d.** $x^2+ax+bx+ab$

b. $a^2+ab+3a^2c+3abc$ **e.** $x^2y^2-y^2+x^2-1$

c. $ay-by-az+bz$ **f.** $2ax+2ay-bx-by$

Exercices d'entraînement

21 Factoriser complètement les expressions algébriques suivantes en utilisant tous les outils à disposition :

a. $5x^3-45x$

b. $(2x+1)(-y^2-2)-(3-2y^2)(2x+1)$

c. $x^2-4-(x+1)(x-2)+(x-2)^2$

d. $(7x-3)(7x+3)-(7x-3)^2$

e. $2x(4x+6)(2x-2)-4x(2x+3)(3x-3)$
$+6x(6x+9)(5x-5)$

f. $(3x+2)^2-(x-5)^2$

g. $(1-4x)(2x+3)-(4x-1)(3x+2)$
$+16x^2-1$

h. $(x^2+3x-10)^2-(x^2+2x-8)^2$

22 Factoriser :

a. $2x^2+5x+3$

b. $2x^2+7x+3$

c. $2x^2+2x+3$

23

a. Développer $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

b. Factoriser a^3+b^3.

c. Remplacer b par $-b$ dans les expressions **a.** et **b.** Peut-on factoriser a^3-b^3 ?

d. Factoriser les expressions suivantes :

i. x^3-1

ii. $27x^3+125$

iii. $64x^3-216$

iv. $8x^3+1$

Voir la théorie 8 à 10

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

24 Développer et réduire les expressions :

A = $3\left(\frac{1}{4}+x\right)-\frac{1}{4}$

B = $\frac{2}{3}x+5\left(x-\frac{1}{6}\right)$

C = $\frac{3}{4}(x-5)+\frac{1}{2}$

D = $2+3\left(\frac{1}{5}x-\frac{1}{3}\right)$

25 Développer puis réduire les expressions :

A = $x(x+6)-x$

B = $x(y-2)+xy$

C = $3x(x+4)-6x^2$

D = $9x(x^2-6)+2x^2$

E = $5x(3+5x)+x(5+x)+4x(2x+1)$

F = $7x(3x-5)-6x(8+7x)$

G = $9(3+9x)+4x^2(7-12x)-11x(-5+8x)$

26 Développer et réduire les expressions :

A = $3(2x-6)-(3-5x)$

B = $(5-2y)-(-3y+7)$

C = $4(6+z)+(z-3)(2-z)$

D = $(2t-5)(3t+2)-(t^2+6)$

27 Développer et réduire les expressions :

A = $3(-2x+5)+(-2x+5)(x-3)$

B = $(2a-5)(3-4a)-2(5-a)$

C = $-(3-4z)(z-2)$

D = $-5r(2-3r)+(-r-2)(2r+5)$

28 Développer et et réduire les expressions :

A = $(2x+5)(-3x-1)-5(2-x)$

B = $2(-3x+5)+(-3x+7)(2x-9)$

C = $2t(3-4t)-(5-a)+(9t+2)(3t-3)$

D = $-(5-2z)(z-8)$

E = $-2s(2-s)+(-s-2)(s+5)$

F = $(5x+8)(-3x-7)+(9x-4)(-10+2x)$

G = $(3x-5)(-2x+1)-(5x-1)(3-4x)$

H = $-5(6x-4)(7x+2)+9x(8-x)(5x+4)$

29 Développer et simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a. $3y-((2x-4y)-x-(y+2x-(4y-x)-y))$

b. $(x+2)^2-(x+1)^2$

c. $(x-3)(x+3)-(5-2x)(5+2x)$

d. $(x+y)(y-x)(x^2+y^2)$

e. $(3x^2-5x+7)(x+4)+(2x^2-8x+3)(x-4)$

f. $3(2x+1)^2-(3-5x)(x-1)+(5-3x)(5+3x)$

g. $(2x+3x^2y)^3$

h. $(-a^2-b^4)^3$

30 Mettre en évidence le plus de facteurs possibles :

a. $4a^3-7a^2+3a$

b. $\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$

c. $4v^2z-16v^3z^2+8vz^4-16vz$

d. $7a^3b^2c-14a^2b^2c^2+28ab^3c$

31 Factoriser à l'aide de la mise en évidence.

a. $(2x+3)(6x-7)+(2x+3)(11x-15)$

b. $(5x+4)(9x-5)-(12x+7)(5x+4)$

c. $(9x+12)^2-(9x+12)(11x-7)$

d. $(y+1)(2-y)+(y-2)^2+(y-2)^2+(y-2)(y+2)$

32 Factoriser à l'aide des identités remarquables :

a. $4x^2+12xy+9y^2$

b. $x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$

c. $49x^2+28x+4$

d. x^4+2x^2+1

e. x^2+a^4

f. $x^2-8x+12$

g. $x^2-14x+13$

h. $x^2+5x-14$

i. x^2+x-20

j. $81x^4-16y^8$

33 Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

a. $(7x-1)(2x+3)-(3x+1)(7x-1)$

b. $(3x+2)(x-1)+4(1-x)+(5x-3)(x-1)$

c. $7x(8x-3)+(3-8x)(2x-5)-16x+6$

d. $(8x+4)(x+5)-(x-5)(2x+1)$

e. $(x+2)^2-(x+9)^2$

f. $(4x-3)(x+1)-(4x-3)$

g. $x-2-3(x-2)^2-4x(x-2)$

h. $(4-x)(x+1)+(2x-8)(x-4)$

34 Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

a. $(x^2-49)(2x+5)-(4x+28)(x-7)$

b. $(x^2+3x-10)^2-(x^2+2x-8)^2$

c. $(2-3x)(x-1)+(3x-2)^2$

d. $25x^2+(5x-2)(x-1)-(5x-2)^2-4$

e. $x^2+4(2-x)-4+(x-2)^2$

f. $(2x+5)(x+1)^4-(x+1)^5$

g. $4(5x+3)^2-9(x-1)^2$

h. $(x+4)^2-2(x+4)(2x-3)+(2x-3)^2$

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

24

A = $3x+\frac{1}{2}$

B = $\frac{17}{3}x-\frac{5}{6}$

C = $\frac{3}{4}x-\frac{13}{4}$

D = $1+\frac{3}{5}x$

25

A = x^2+5x

B = $2xy-2x$

C = $-3x^2+12x$

D = $9x^3+2x^2-54x$

E = $34x^2+24x$

F = $-21x^2-83x$

G = $-48x^3-60x^2+136x+17$

Exercices d'entraînement

26 A = 6x – 18 – 3 + 5x = 11x – 21

B = 5 – 2y + 3y – 7 = y – 2

C = – z^2 + 9z + 18

D = 5t^2 – 11t – 16

27

A= – 2x^2 + 5x

B = – 8a^2 + 28a – 25

C = 4z^2 – 11z + 6

D = 13r^2 – 19r – 10

28

A= – 6x^2 – 12x – 15

B = – 6x^2 + 35x – 53

C= 19t^2 – 15t + a – 11

D = 2z^2 – 21z +40

E = s^2 – 11s –10

F = 3x^2 –157x – 16

G =14x^2 – 6x – 2

H =– 45x^3 +114x^2+ 368x +40

I =–8x –72y– 90y+15yx–150+25x+24x – 40y

29

a. $2x+3y$

b. $2x+3$

c. $5x^2-34$

d. y^4-x^4

e. $5x^3-9x^2+22x+16$

f. $8x^2+4x+31$

g. $8x^3+36x^4y+54x^5y^2+27x^6y^3$

h. $-a^6-3a^4b^4-3a^2b^8-b^{12}$

30

a. $a(4a^2-7a+3)$

b. $\frac{1}{2}x(x^2-\frac{1}{2}x+3)$

c. $4vz(v-4v^2z+2z^3-4)$

d. $7ab^2c(a^2-2ac+4b)$

31

a. $(2x+3)(17x-22)$

b. $-3(5x+4)(x+4)$

c. $3(3x+4)(-2x+19)$

d. $3(y-2)(y-1)$

32

a. $(2x+3y)^2$

b. $(x-\frac{1}{4})^2$

c. $(7x+2)^2$

d. $(x^2+1)^2$

e. non factorisable

f. $(x-6)(x-2)$

g. $(x-13)(x-1)$

h. $(x-2)(x+7)$

i. $(x-4)(x+5)$

j. $(3x-2y^2)(3x+2y^2)(9x^2+4y^4)$

33

a. $(7x-1)(-x+2)$

b. $(x-1)(8x-5)$

c. $(8x-3)(5x+3)$

d. $(2x+1)(3x+25)$

e. $-7(2x+11)$

f. $(4x-3)x$

g. $-7(x-2)(x-1)$

h. $(x-4)(x-9)$

34

a. $(x+7)(x-7)(2x+1)$

b. $(2x+9)(x-2)^2$

c. $(3x-2)(2x-1)$

d. $(5x-2)(x+3)$

e. $2(x-2)^2$

f. $(x+1)^4(x+4)$

g. $(13x+3)(7x+9)$

h. $(-x+7)^2$

*« Ne t'inquiète pas si tu as des difficultés en maths,
je peux t'assurer que les miennes sont bien plus importantes ! »*

*Albert Einstein, physicien allemand, apatride, suisse, helvético-américain
Prix Nobel 1921 (1879-1955)*

A savoir en fin de chapitre

Développer - réduire

- ✔ vocabulaire relatif aux expressions algébriques étudiées ici : monôme, polynôme, somme, produit, terme, facteur ;
- ✔ développer et réduire des expressions algébriques ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 7

Factoriser

- ✔ voir les identités remarquables comme des théorèmes que l'on sait démontrer ;
- ✔ comprendre le lien entre la distributivité et la mise en évidence ;
- ✔ distinguer une expression sous forme de somme ou sous forme de produit ; repérer les termes et les facteurs ;
- ✔ les avantages d'une forme factorisée ;
- ✔ factoriser complètement une expression algébrique donnée en maîtrisant les différentes techniques proposées :

1. mise en évidence
2. identités remarquables

Voir la théorie 3 à 7 et les exercices 8 à 17

Factoriser +

- ✔ les outils avancés pour factoriser ;

3. trucs et astuces

Voir la théorie 8 à 11 et les exercices 18 à 23

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch06