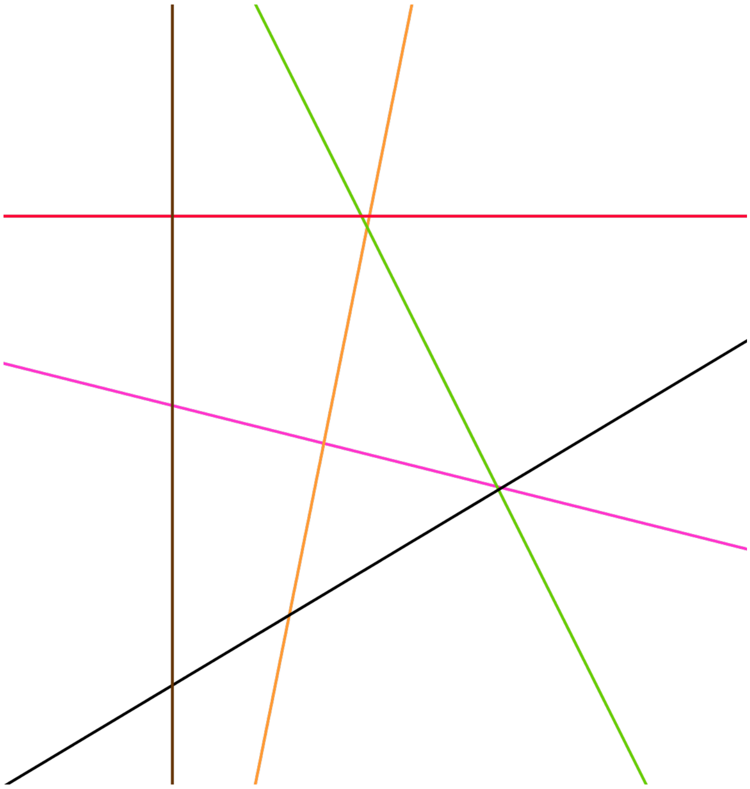
Chapitre 05 - Degrés 0 et 1



Problème

Au rugby, quand un joueur marque un essai, il doit le transformer. Pour cela, il peut choisir de placer le ballon sur n'importe quel point de la perpendiculaire à la ligne d'essai passant par le point où le ballon a été aplati.

Quel est le point qui lui offre le plus grand angle par rapport aux poteaux ? (Il pourra être utile de chercher des informations sur les dimensions des poteaux.)

1 [Activité] Équations à une inconnue

1. Qu'est-ce qu'une équation à une inconnue ?

2. Le nombre 3 est-il solution de l'équation $2x^3+x=1-\frac{2}{5}x$?

3. Déterminer une équation de degré 1 dont l'ensemble de solution soit S ={2}

4. Déterminer une autre équation de degré 1 dont l'ensemble des solutions soit S ={2}

5. Ces deux équations sont-elles égales ?

6. Peut-on déterminer une équation de degré 1 dont l'ensemble des solutions soit S = $\emptyset$?

2 [Souvenirs] Techniques de résolution d'équations

1. Recopier puis transformer chaque égalité en une égalité équivalente :

$x = 6$; + 8 ; + 8

$x = -4$; + 2,5 ; + 2,5

$x = 1{,}2$; – 2,3 ; – 2,3

$x = 7$; ×(–9) ; ×(–9)

$x = 2{,}5$; ÷ 5 ; ÷ 5

$x = -3$; ÷ 7 ; ÷ 7

2. Le but est de déterminer x dans chacune des équations suivantes. Recopier puis déterminer x :

$x + 5 = -2$; ... ; ... ; $x = \ldots$

On rédige de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x + 5 &= -2 \\ \ldots\ldots \quad x + 5 - 5 &= -2 - 5 \\ \ldots\ldots \quad x &= -7 \end{aligned}$$

$3x = 7$; ... ; ... ; $x = \ldots$

On rédige de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 3x &= 7 \\ \ldots\ldots \quad \frac{3x}{3} &= \frac{7}{3} \\ \ldots\ldots \quad x &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

3. Résoudre les équations suivantes en rédigeant comme ci-dessus. Vérifier ensuite que la solution est juste :

a. $x - 5{,}2 = 2{,}6$ **b.** $-6{,}5x = -14{,}2$ **c.** $-x = 7{,}2$

4. De la même façon mais en deux étapes, résoudre les équations suivantes :

a. $2x + 3 = 4x + 7$

b. $7x-6=-1+\frac{14x-8}{2}$

c. $2{,}6 - 5x = -1{,}4$

d. $3(x+1)=x+2+2x+1$

e. $\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}x+\frac{4}{2}$

Prérequis et activités de découverte

3 [Activité] Interprétation du résultat

Problème 1 : Sylvia a sept ans de plus que sa soeur Rose. Dans 10 ans, Sylvia aura le double de l'âge de Rose. Quel est l'âge de Rose ? Appeler x l'âge de Rose.

Problème 2 : En 2000, Paul avait 10 ans et Louis 17 ans. En quelle année, l'âge de Louis a-t-il été le double de l'âge de Paul ? Appeler x la différence entre cette année et 2000.

a. Mettre ces deux problèmes en équation. Que remarque-t-on ?

b. Résoudre l'équation, en déduire la solution de chaque problème et conclure.

4 [Activité] Problèmes

1. Un magasin de vêtements faisant les soldes annonce que tous les prix ont été baissés de 20%. Si le prix d'une chemise soldée est 28.- quel était son prix de vente ?

2. Le sixième d'un piquet est enfoncé dans la terre, les deux cinquièmes dans la neige et le reste, qui est en dehors, mesure 3,25m. La température de l'air est de 4°C. Trouver la hauteur du piquet.

3. Une société d'investissement a 100'000.- à investir pour un client et décide d'investir dans deux fonds, A et B. L'intérêt annuel attendu pour le fonds A est de 15%, mais il y a un certain risque et le client ne veut pas investir plus de 50'000.- dans ce fonds. Pour le fonds B, plus solide, l'intérêt est de 10%. Déterminer s'il y a une façon d'investir l'argent pour que l'intérêt annuel soit :

a. 12'000.-

b. 13'000.-

4. * Un chimiste a 10 millilitres d'une solution qui contient une concentration d'acide à 30%. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour augmenter la concentration à 50% ?

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 12

5 [Activité] Plusieurs inconnues

1. On considère l'équation (E) : $x^2y^2 - 2xy + 3y = 1$; donner un **couple** qui soit solution de (E) et un couple qui ne soit pas solution de (E).

2. * Explorer avec GeoGebra des **courbes représentatives d'équations à deux inconnues**. Par exemple, **représenter graphiquement les équations** suivantes :

a. $(x^2-2)+(y^2-1)=16$

b. $2x^2+3y^2=20$

c. $2x^2-3y^2-4x-12y=13$

d. $x^2+3y^2-2x+12y=-1$

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 13 à 15

Prérequis et activités de découverte

6 [Souvenirs] Pente

1. Donner la définition de la **pente d'une droite**.

2. Pourquoi cette définition ne dépend-t-elle pas du choix des deux points ?

3. Quelle est la pente d'une droite horizontale ? Et celle d'une droite verticale?

4. Un téléphérique part de la station du village à l'altitude de 1200m pour arriver à la station du sommet à 3457m. La longueur du câble est de 3100m. Quelle est la pente entre les deux stations ? Donner aussi la réponse en %.

7 [Activité] Représenter graphiquement une équation

Représenter graphiquement les équations suivantes :

a. $y=3x-2$

b. $y=x+1$

c. $y=-x$

d. $x+y+1=0$

e. $2x+2y=0$

f. $x+2y-3=0$

g. $y+1=0$

h. $x-3=0$

8 [Activité] Parallélisme, perpendicularité

1. Enoncer et démontrer un théorème qui établit une relation entre les pentes de deux droites parallèles.

2. Enoncer et démontrer un théorème qui établit une relation entre les pentes de deux droites perpendiculaires.

3. Déterminer une droite d qui passe par le point G(-3;2) et soit parallèle à la droite d' d'équation $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

4. Déterminer une droite d qui passe par le point G(-3;2) et soit perpendiculaire à la droite d' d'équation $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$.

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 17 à 26

9 [Activité] Degré 0

1. Donner des exemples de **fonctions constantes**, ou **fonction de degré 0**. Déterminer le domaine de définition et l'ensemble des zéros de telles fonctions.

2. Que peut-on dire de leurs courbes représentatives ?

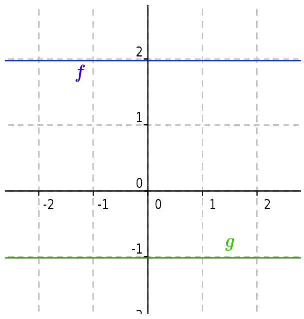
3. Quelle serait la définition générale d'une telle fonction ?

4. Quel lien y a-t-il entre les équations du type $y=c$ et les fonctions de degré 0 ?

5. Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a. f est définie par $f(x)=4$ **b.** g est définie par $g(x)=-\sqrt{2}$

6. Déterminer les fonctions / les équations dont on donne les courbes représentatives ci-contre:



Voir la théorie 8 à 9 et les exercices 27 à 29

10 [Activité] Degré 1

1. Donner la définition générale d'une **fonction de degré 1**, ou **fonction du premier degré**.

2. Donner des exemples.

3. Que savez-vous de la représentation graphique d'une fonction de degré 1 ?

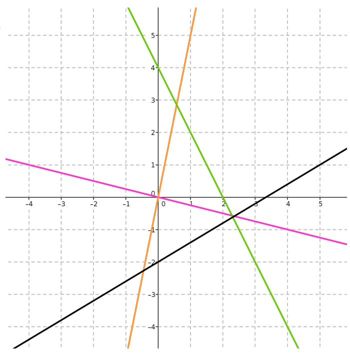
4. Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a. f est définie par $f(x)=2x-1$ **b.** g est définie par $g(x)=-0.5x+3$

5. Déterminer une fonction dont la courbe représentative est la droite qui contient les points A(1;2) et B(-3;2).

6. Peut-on déterminer une fonction dont la courbe représentative contienne C(-3;2) et D(-3;-4) ?

7. Déterminer les fonctions représentées par les droites ci-contre :



8. Déterminer une fonction dont la courbe représentative contienne les points E(-4;2) et F(3;6).

11 [Activité] Fonctions linéaires et affines

1. Fonctions linéaires

On se propose d'étudier le lien entre le prix de l'essence (en francs) et la quantité d'essence (en litres), sachant que le prix par litre est fixe.

a. Compléter le tableau suivant qui donne le prix pour différentes quantités d'essence.

x (volume d'essence en l)	0,0	1,0		3,0	4,5	6,0	8,0	
y (prix en CHF)			3,60	5,40				18,00

b. Quelle opération effectue-t-on pour calculer y à partir de x ? Et pour calculer x à partir de y ?

c. Comment le prix change-t-il si on multiplie par 2 le volume d'essence ? Et si on le multiplie par 10 ?

d. Le prix y est-il proportionnel au volume d'essence x ? Justifier. Si tel est le cas, quel est le coefficient de proportionnalité ?

e. Dans cette situation, le prix y dépend du volume x. On dit que « y est fonction de x » et on écrit : $y = f(x)$.

f. Calculer le prix pour un volume d'essence de 50 litres, de 78,9 litres.

g. Déterminer l'expression algébrique $f(x)$.

h. Représenter graphiquement la fonction f pour $0 \leq x \leq 10$.

i. Quelles sont la pente et l'ordonnée à l'origine de cette droite ? Quelles sont les unités de ces deux nombres ?

j. Dans ce cas, on dit que le prix est une **fonction linéaire** du volume d'essence. Donner la définition générale d'une fonction linéaire.

k. Donner un autre exemple où une variable est une fonction linéaire d'une autre variable.

2. Fonctions affines

Une compagnie de taxi propose le tarif suivant : un forfait initial de 4,00 CHF, plus un coût de 2,00 CHF par kilomètre parcouru. On se propose d'étudier le lien entre le prix de la course (en CHF) et la distance parcourue (en km).

a. Compléter le tableau suivant qui donne le prix pour différentes distances parcourues.

x (distance parcourue en km)	0,0	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0
y (prix en CHF)	4,00						

b. Le prix y est-il proportionnel à la distance parcourue x ? Justifier.

c. Dans cette situation, le prix y dépend de la distance parcourue x. On dit que « y est fonction de x » et on écrit : $y = f(x)$. Donner l'expression algébrique de la fonction f.

d. Calculer le prix du taxi pour se rendre de Genève à Lausanne (distance 62,5 km).

e. Représenter graphiquement la fonction f pour $0 \leq x \leq 10$.

f. Quelles sont la pente et l'ordonnée à l'origine de cette droite ? Quelles sont les unités de ces deux nombres ?

g. Dans ce cas, on dit que le prix est une **fonction affine** de la distance parcourue. Donner la définition générale d'une fonction affine.

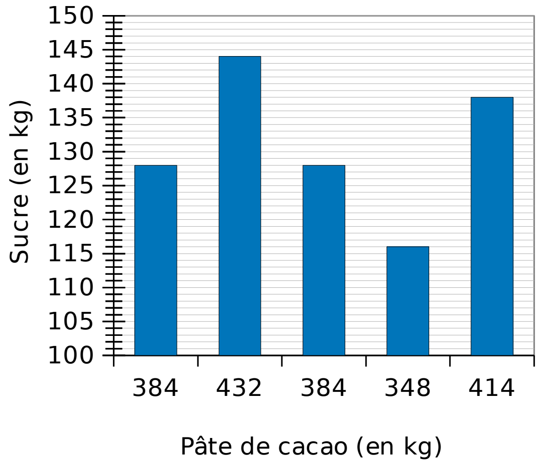
h. Donner un autre exemple où une variable est une fonction affine d'une autre variable.

12 [Activité] Proportionnalité et linéarité

Pour fabriquer du chocolat noir, il faut mélanger de la pâte de cacao et du sucre. Dans une pâtisserie, on a relevé les quantités de pâte de cacao et de sucre utilisées les cinq derniers mois dans le graphique ci-dessous :

a. D'après ce tableau, peut-on dire que la masse de sucre est proportionnelle à celle de la pâte de cacao ? Justifier.

b. Interpréter graphiquement.



13 [Activité] Problème

Deux villes B et C sont reliées par une autoroute. Une voiture quitte la ville B à 13 heures et roule à la vitesse constante de 40 km/h vers la ville C. Trente minutes plus tard, une autre voiture quitte B et roule vers C à la vitesse constante de 55 km/h. Si l'on ne tient pas compte de la longueur des voitures, à quel moment la seconde voiture rejoindra-t-elle la première ? Interpréter graphiquement.

Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 30 à 37

14 [Activité] Interpréter graphiquement

1. Résoudre l'équation $-\frac{2}{5}x+1=-\frac{3}{2}$ puis interpréter graphiquement ce problème.

2. Résoudre l'équation $4x$ - 3 = - $2x$ - 7 puis interpréter graphiquement ce problème.

Voir la théorie 12 et les exercices 38 à 39

Prérequis et activités de découverte

15 [Souvenirs] Systèmes

1. Salomé propose une énigme à sa petite sœur : « Dans un élevage de poules et de lapins, j'ai compté 2 171 têtes et 4 368 pattes. Combien y a-t-il de poules ? Combien y a-t-il de lapins ? » Comment la résoudre ?

2. Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} y = -3x - 4 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 9x - 3y = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 5x - 7y = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y = -3x - 4 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$

16 [Activité] Avec un graphique

Résoudre graphiquement les systèmes suivants puis vérifier algébriquement la solution :

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 7y = 1 \\ 15x + 12y = 8 \end{cases}$

17 [Activité] Un peu extrême

1. On considère le système d'équations suivant : $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ -35x + 7y = -7 \end{cases}$. Le résoudre par la méthode de votre choix. Que constate-t-on ? Interpréter graphiquement.

2. Mêmes questions qu'en **1.** avec le système $\begin{cases} -12x + 3y = 15 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$

3. Que peut-on dire du nombre de solutions que peut admettre un système 2x2 ? Interpréter géométriquement.

Voir la théorie 13 à 19 et les exercices 40 à 48

18 [Aller plus loin] 3x3

Résoudre les systèmes suivants de trois équations et trois inconnues :

a. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \\ -x + 3y - 4z = -1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 59 \\ x + z = 75 \\ y + z = 32 \end{cases}$

Voir la théorie 20 et les exercices 49 à 50

1 [Souvenirs] Équations à une inconnue

Définitions

Une **équation (à une inconnue)** est une égalité entre deux expressions algébriques, appelées membre de gauche et membre de droite de l'équation, contenant une variable qu'on note le plus souvent x mais qui peut être représentée par n'importe quelle autre lettre.

Dans notre contexte, il sera implicite, si cela n'est pas précisé autrement, que la variable représente un nombre réel.

Exemples

- ☐ $x + 5 = 9$ est une équation à une inconnue x.
- ☐ $2y^5 + 5y = 3y - 6$ est une équation à une inconnue y.
- ☐ $\frac{1}{x+5} = \frac{9}{x}$ est une équation à une inconnue x.

Définitions

Soit une équation à une inconnue x. Une **solution de l'équation** est un nombre qui, lorsqu'on l'attribue à la variable x, transforme l'équation en une égalité vraie.

Exemples

- ☐ 1 est une solution de $2x^5 + 5x = 7$, car l'égalité $2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1 = 7$ est vraie.
- ☐ 3 n'est pas une solution de $2x^5 + 5x = 7$, car $2 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3 = 7$ est fausse.

Résoudre une équation, c'est déterminer toutes les solutions de cette équation.
L'**ensemble des solutions d'une équation** est l'ensemble qui contient exactement toutes les solutions de cette équation.

Notation

On note S l'ensemble des solutions d'une équation.
Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on note $S = \varnothing$ ou $S = \{\ \}$.

Exemples

- ☐ Si on considère l'équation $x + 5 = 9$, alors $S = \{4\}$.
- ☐ Si on considère l'équation $(x+5)(x-1)=0$, alors $S = \{-5;1\}$.
- ☐ Si on considère l'équation $x^2 = -1$, alors $S = \varnothing$.

Définition

Une **identité** est une égalité entre deux expressions qui est vraie quelles que soient les valeurs des différentes variables employées.

Exemples

- ☐ $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ est une identité, car tout $x \in \mathbb{R}$ est solution de cette équation.
- ☐ $(x+1)^2 = x^2 + 1$ n'est pas une identité, car seul $x = 0$ est solution de cette équation.

Définition

Deux **équations** sont **équivalentes** lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

Exemples

☐ $x + 5 = 9$ et $x + 7 = 11$ sont équivalentes, car dans les deux cas S $=\{4\}$

☐ $x + 5 = 9$ et $x + 7 = 12$ ne sont pas équivalentes, car l'ensemble des solutions de $x + 5 = 9$ est $S=\{4\}$, alors que l'ensemble des solutions de $x + 7 = 12$ est $S=\{5\}$

Principes d'équivalence

1. Si **on additionne ou on soustrait** aux deux membres d'une équation **un même nombre**, on obtient une nouvelle équation équivalente.
2. Si **on multiplie ou on divise** les deux membres d'une équation **par un même nombre non nul**, on obtient une nouvelle équation équivalente.

Notation

Pour indiquer que deux équations sont équivalentes, on utilise le symbole $\Leftrightarrow$ (qui se lit « si et seulement si »). On peut également indiquer la façon dont on a agi sur l'équation initiale pour obtenir une nouvelle équation équivalente.

Exemples : résoudre les équations $x - 5 = 2$, $x + 2 = 9$ et $\frac{2}{3}x=4$ en utilisant une notation appropriée

$$\begin{aligned} & x-5=2 \quad \big) +5 \\ \Leftrightarrow\ & x-5+5=2+5 \\ \Leftrightarrow\ & x=7 \end{aligned}$$

Si on additionne le même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

$$\begin{aligned} & x+2=9 \quad \big) -2 \\ \Leftrightarrow\ & x+2-2=+9-2 \\ \Leftrightarrow\ & x=7 \end{aligned}$$

Si on soustrait le même nombre réel aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}x=4 \quad \big) \cdot \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2}{3}x\cdot\frac{3}{2}=4\cdot\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x=6 \end{aligned}$$

Si on multiplie par le même nombre réel <u>non nul</u> les deux membres d'une équation, alors on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

$$\begin{aligned} & 3x=12 \quad \big) \div 3 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{3x}{3}=\frac{12}{3} \\ \Leftrightarrow\ & x=4 \end{aligned}$$

Si on divise par le même nombre réel <u>non nul</u> les deux membres d'une équation, alors on obtient une nouvelle équation équivalente à la première.

Exemple : résoudre l'équation $2x - 5 = 1$ en utilisant une notation appropriée

$2x-5=1 \quad)+5$ $\Leftrightarrow \quad 2x=6 \quad)\div 2$ $\Leftrightarrow \quad x=3$	Ici on écrit un peu plus directement les résultats obtenus d'une équation équivalente à la suivante.

2 [Souvenirs] Équations de degré 1

Définition

Une **équation de degré 1** (ou **équation du 1er degré**) [à une variable notée x] est une équation équivalente à une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des constantes réelles (a non nulle) et x une variable réelle.

Exemples

- $2x-3=-3x-1$ est une équation du premier degré, car $2x-3=-3x-1 \Leftrightarrow 5x+(-2)=0$ (on a donc $a = 5$ et $b = -2$).
- $\pi x-3\cdot\sqrt{2}+x=-1$ est une équation du premier degré, car $\pi x-3\cdot\sqrt{2}+x=-1 \Leftrightarrow (\pi+1)x+(1-3\cdot\sqrt{2})=0$ (on a donc $a=(\pi+1)$ et $b=(1-3\cdot\sqrt{2})$)
- $2x^2-3x=5+2x^2-6x$ est une équation du premier degré, car $2x^2-3x=5+2x^2-6x \Leftrightarrow 3x-5=0$ (on a donc $a = 3$ et $b = -5$)
- $\frac{1}{x-1}=2$ et $\pi x^2-3\sqrt{2}+x=1$ ne sont pas des équations du 1[er] degré

Simplifier une équation

Exemple : Simplifier l'équation suivante : $5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=7+\frac{8x}{5}-4$.

$5\left(\frac{2}{3}x+1\right)=7+\frac{8x}{5}-4$.	
$\Leftrightarrow 5\cdot\frac{2}{3}x+5\cdot 1=\frac{8x}{5}+3$	On développe d'abord puis on réduit chacun des deux membres de l'équation.
$\Leftrightarrow \frac{10}{3}x+5=\frac{8}{5}x+3$	On met ensuite chaque terme de l'équation au même dénominateur, ici 15.
$\Leftrightarrow \frac{50}{15}x+\frac{75}{15}=\frac{24}{15}x+\frac{45}{15}$	On multiplie chaque membre par 15 pour éliminer la fraction.
$\Leftrightarrow \quad 50x + 75 = 24x + 45$	Il reste à résoudre l'équation $50x+75 = 24x+45$

Résoudre une équation de degré 1

Pour résoudre une équation de degré 1, il faut isoler l'inconnue.
Pour cela, on transforme l'équation en une autre équation qui lui est équivalente.

Exemple : résoudre l'équation suivante : $7x + 2 = 4x + 9$.

$$7x+2=4x+9 \quad)-4x$$

On cherche à éliminer les termes en x dans le membre de droite en retranchant $4x$ aux deux membres.

$$\Leftrightarrow \quad 3x+2=9$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x+2=9 \quad)-2$$

On cherche à isoler le terme inconnu dans le membre de gauche en retranchant 2 aux deux membres.

$$\Leftrightarrow \quad 3x=7 \quad)\div 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{7}{3}$$

On cherche la valeur de l'inconnue x en divisant les deux membres par 3.

On vérifie ensuite que $\frac{7}{3}$ est une solution effective de l'équation initiale $7x+2 = 4x+9$.

$$S=\left\{\frac{7}{3}\right\}$$

On note la solution sous forme d'ensemble.

Calculer une préimage algébriquement

Calculer une préimage algébriquement revient à résoudre une équation.

Exemple : soit f définie par $f(x) = -7x-12$. Déterminer l'ensemble des préimages de -2 ?

Il faut résoudre l'équation $f(x) = -2$: $-7x-12=-2 \Leftrightarrow -7x=10 \Leftrightarrow x=-\frac{10}{7}$

On dit que $-\frac{10}{7}$ est l'unique préimage de -2 et on note $f^{-1}(-2)=\left\{-\frac{10}{7}\right\}$

Voir les exercices 1 à 12

3 [A savoir] Équations à plusieurs inconnues

Définitions

Une **équation à n inconnues** est une égalité entre deux expressions algébriques (le membre de gauche et le membre de droite) qui comprend n variables.

Dans notre contexte, il sera implicite, si cela n'est pas précisé autrement, que les variables, qu'on note le plus souvent par les lettres x, y, z, t, …, représentent des nombres réels.

Exemples

- $xyz = 9$ est une équation à trois inconnues x, y et z .
- $2x^5 + 5y = 3x - 6$ est une équation à deux inconnues x et y .

Définition

Soit une équation à deux inconnues x et y .
Une **solution d'une équation en x et y** est un couple de nombres $(a\ ;\ b)$, qui, lorsqu'on remplace x par le nombre a et y par le nombre b donne une égalité vraie.

Exemple : soit l'équation (E) : $2y - 2 = 3x - 1$; donner un couple qui soit solution de (E) et un couple qui ne soit pas solution de (E)

- Le couple (1 ; 2) est une solution de (*E*) puisque si $x = 1$ et $y = 2$, l'égalité 2•2 - 2 = 3•1 – 1 est vraie.
- Le couple (3 ; 5) n'est pas une solution de (*E*) puisque $2\cdot 5-2 \neq 3\cdot 3-1$.

Remarque : il y a le plus souvent une infinité de couples solutions pour une telle équation.

4 [A savoir] Représenter graphiquement une équation

Soit Γ une courbe du plan et (*E*) une équation à deux inconnues x et y.
Si on a :

$$P(x_0;y_0)\in\Gamma \Leftrightarrow (x_0;y_0) \text{ est solution de } (E)$$

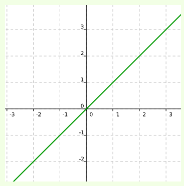
autrement dit : le point P est sur la courbe Γ $\Leftrightarrow$ le couple de nombres $(x_0;y_0)$ est solution de l'équation (*E*)

on dit que (*E*) est une **équation de Γ** et que Γ est la **courbe représentative de (*E*)**.
Représenter graphiquement l'équation (*E*) consiste à représenter tous les couples du plan qui sont solution de (*E*).

Chaque fois qu'on a affaire à une équation à deux inconnues x et y, on peut donc essayer de la représenter graphiquement.

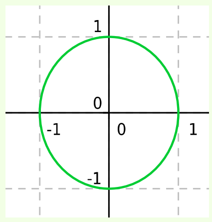
Exemple 1 : soit l'équation (*E*) : $y - x = 0$; représenter graphiquement (*E*)

L'équation (*E*) est équivalente à $y = x$; donc tous les couples solution de (E) sont les couples dont les deux coordonnées sont égales.



Exemple 2 : représenter graphiquement l'équation $x^2+y^2=1$

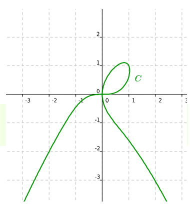
Pour représenter graphiquement tous les points $(x;y)$ du plan qui sont solution de cette équation, on peut observer qu'il s'agit en fait de tous les points situés sur un cercle de centre (0;0) et de rayon 1 !



Remarque : représenter graphiquement une équation peut être difficile ; on peut alors s'aider d'un logiciel comme GeoGebra.

Réciproquement, chaque fois qu'on considère une courbe représentative du plan – c'est-à-dire un sous-ensemble de points $(x;y)$ du plan, on peut essayer de déterminer une équation dont une représentation graphique donnerait cette courbe. Ceci est le plus souvent encore plus difficile !

Exemple : quelle pourrait bien être l'équation de la courbe ci-contre ?



Réponse (difficile, il faut nous croire !) : $x^4 - 2xy + y^3 = 0$

Voir les exercices 13 à 15

5 [Souvenirs] Les droites

Pente et ordonnée à l'origine d'une droite non verticale du plan

Soit d une droite non verticale du plan :

☐ la **pente m** de d est définie par $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, où $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ appartiennent à d ;

☐ l'**ordonnée à l'origine (o.o.) n** de d est la seconde coordonnée (l'ordonnée) du point d'intersection de d avec l'axe Oy ;

Remarques :

☐ La pente d'une droite ne dépend pas du choix des points de la droite utilisés pour la calculer (cf le théorème de Thalès, qui sera (re)vu plus loin).

☐ Si d est horizontale, c'est à dire si $y_1=y_2$ pour tout choix de P_1 et P_2, alors la pente de d est nulle.

☐ Si d est verticale, c'est à dire si $x_1=x_2$ pour tout choix de P_1 et P_2, alors la pente de d n'existe pas (elle est « infinie »).

Exemple : déterminer pente et o.o. de la droite d passant par les points $P_1(0\,;1)$ et $P_2(3\,;2)$

La pente de d est : $m=\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}$

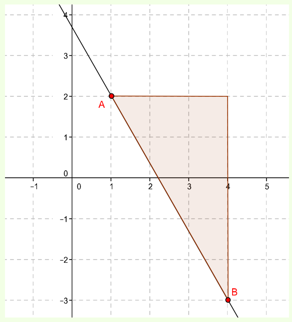
Comme d passe par le point $P_1(0\,;1)$, on sait que l'ordonnée à l'origine de d est 1.

Représenter graphiquement une droite à partir d'un point et de la pente

Exemple : représenter graphiquement la droite d passant par $A(1\,;2)$ et de pente $m=-\frac{5}{3}$.

Une droite est déterminée par deux points.

Comme $m=-\frac{5}{3}=\frac{-5}{3}$ On peut obtenir un deuxième point B en partant de A et en se déplaçant de 3 unités vers la droite (horizontalement dans le sens de l'axe) et de 5 unités vers le bas (verticalement dans le sens opposé. Ainsi : $B(4;-3)$.



6 [A savoir] Équations $ax+by=c$ et droites du plan

Soit d une droite du plan et E une équation à deux inconnues x et y de la forme $ax+by=c$ (où a,b et c sont des constantes réelles, avec a et b non nulles simultanément).

Théorème « équation d'une droite oblique du plan »

Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$:

☐ E : $ax+by=c$ peut également s'écrire sous la forme $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$, ce qu'on écrit plutôt $y=mx+n$ en renommant les constantes ; sa courbe représentative est une **droite oblique** du plan de pente m et d'ordonnée à l'origine n :

☐ réciproquement, si d est une droite oblique du plan, alors son équation est de la forme $y=mx+n$;

Vocabulaire

l'équation $ax+by=c$ s'appelle <u>une</u> **équation cartésienne de d** (il existe plusieurs équations cartésiennes équivalentes de d) ; l'équation $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ est l'**équation réduite** de d (cette écriture est unique).

Théorème « cas particulier : équation d'une droite verticale du plan »

Si $b=0$ (et $a\neq 0$), l'équation devient E : $ax=c$

☐ E peut alors aussi s'écrire $x=\frac{c}{a}$, ce qu'on écrit plutôt $x=k$ en renommant la constante ; sa courbe représentative est une **droite verticale** du plan ;

☐ réciproquement, si d est une droite verticale du plan, alors son équation est de la forme $x=c$

Théorème « cas particulier : équation d'une droite horizontale du plan »

Si $a=0$ (et $b\neq 0$), l'équation devient E : $by=c$

☐ E peut alors aussi s'écrire $y=\frac{c}{b}$, ce qu'on écrit plutôt $y=n$ en renommant la constante ; sa courbe représentative est une **droite horizontale** du plan ;

☐ réciproquement, si d est une droite horizontale du plan, alors son équation est de la forme $y=n$

Remarque :

☐ lorsque l'on considère une équation réduite, par exemple $y=-2x+1$, on sait que la pente de la droite est égale à –2 (et non –2x !) et l'ordonnée à l'origine à 1 ;

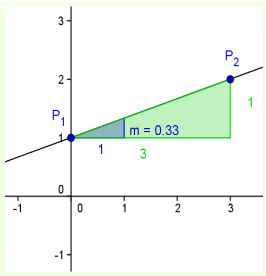
☐ les équations des droites verticales ne peuvent pas être écrites sous forme réduite.

Exemple 1 : représenter la droite d passant par les points $P_1(0\,;1)$ et $P_2(3\,;2)$ et donner son équation.

Sa pente est $m=\frac{2-1}{3-0}=\frac{1}{3}$ et son ordonnée à l'origine est 1 car elle passe par $P_1(0\,;1)$.

L'équation réduite de d est donc $y=\frac{1}{3}x+1$.

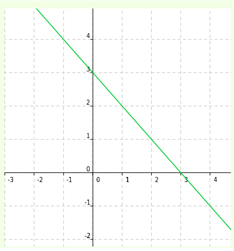
Une équation cartésienne est $-\frac{1}{3}x+y=1 \Leftrightarrow -x+3y=3$.



Exemple 2 : représenter l'équation $y+x=3$

L'équation cartésienne $y+x=3$ est équivalente à l'équation réduite $y=-x+3$.

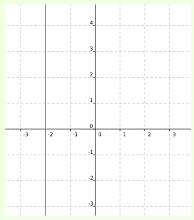
Elle est représentée par la droite oblique ci-dessous :



Exemple 3 : représenter l'équation $3 - x = 5$

L'équation cartésienne $3 - x = 5$ est équivalente à l'équation $x = -2$. On représente tous les points $(x;y)$ du plan qui sont solution de cette équation ;

dans ce cas, il s'agit de tous les points dont la 1re coordonnée est égale à -2, soit une droite verticale !



7 [A savoir] Droites parallèles et perpendiculaires

Théorème (droites parallèles)

Deux droites de pentes m_1 et m_2 sont parallèles $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

Théorème (droites perpendiculaires)

Deux droites de pentes m_1 et m_2 sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ $m_1 \cdot m_2 = -1$

Exemple : déterminer la droite d passant par le point $A(2;5)$ et perpendiculaire à la droite d' d'équation $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$.

Comme d est perpendiculaire à d', elles ont des pentes inverses et opposées ;
celle de d' vaut $-\frac{1}{3}$, on en déduit que celle de d vaut 3, car $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

d est donc d'équation $y = 3x + b$; reste à trouver b ...

Comme $A(2;5) \in d$, on peut substituer dans l'équation : $5 = 3 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 5 - 6 = -1$
L'équation de d est donc $y = 3x - 1$

Voir les exercices 17 à 26

8 [A savoir] Relation algèbre, géométrie ... et fonctions !

Si on a affaire à une équation à deux inconnues x et y, on peut essayer d'exprimer l'une des inconnues (en général y), en fonction de x. Si on y arrive, on a alors une écriture du type $y = f(x)$, ce qui devient équivalent à considérer une fonction !
Les équations du type $y = m$ représentées par les droites horizontales sont associables aux **fonctions de degré 0**, les équations du type $y = px + q$ représentées par les droites obliques aux **fonctions de degré 1** et les équations du type $y = ax^2 + bx + c$ représentées par les paraboles les **fonctions de degré 2**. Les équations du type $x = k$ représentées par les droites verticales ne sont pas associables à des fonctions.

Exemple 1 :

L'équation $2x - y = 1$ peut s'écrire $y = 2x - 1$. Considérer cette équation devient alors équivalent à considérer la fonction f définie par $f(x) = 2x - 1$.

Exemple 2 :

L'équation $6x^2 - 3y - 12 = 0$ peut s'écrire $y = -2x^2 - 4$. Considérer cette équation devient alors équivalent à considérer la fonction f définie par $f(x) = -2x^2 - 4$.

En résumé, **étant donnée une équation à deux inconnues x et y :**

☐ si elle peut s'écrire sous la forme $y = f(x)$, c'est-à-dire qu'on arrive à exprimer une variable en fonction de l'autre (!), alors cette équation définit une fonction f ; les courbes représentatives de l'équation ou de la fonction sont identiques ;

☐ si elle ne peut pas s'écrire sous la forme $y = f(x)$, elle ne définit pas une fonction ; on peut cependant (essayer de) représenter graphiquement cette équation, mais cela est souvent difficile ;

étant donnée une courbe représentative (un sous-ensemble de points du plan) :

☐ s'il existe au moins une droite verticale qui intersecte la courbe plus d'une fois, la courbe donnée ne peut pas être celle d'une fonction ;

☐ si elle n'est jamais intersectée plus d'une fois par toute droite verticale, elle représente une fonction, mais il est souvent difficile de trouver l'équation $y = f(x)$!

Nous allons donc nous restreindre à certains types d'équations et de courbes pour lesquelles nous pourrons proposer des méthodes de résolution et de représentation graphique efficaces.

9 [A savoir] Degré 0

Définition

☐ On appelle **fonction de degré 0**, ou **fonction constante**, une fonction f définie par une expression de la forme $f(x)=c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

☐ Considérer une fonction f de degré 0 ou une équation de la forme $y=c$ est équivalent : à la **fonction f** définie par $f(x)=c$ correspond l'**équation** $y = c$.

Exemple

La fonction f définie par $f(x) = -5$ est une fonction constante, avec $c = -5$. Considérer cette fonction est équivalent à considérer l'équation $y = -5$.

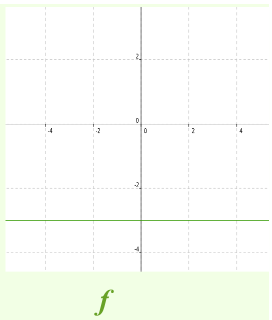
Représentation graphique

☐ Une fonction f de degré 0 définie par $f(x) = c$ [ou une équation $y=c$] est représentée graphiquement par une **droite horizontale** d passant par le point (0 ; c).

☐ Toute droite horizontale d passant par le point (0 ; c) représente la fonction f de degré 0 définie par $f(x) = c$ [ou l'équation $y=c$]

Exemple : représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = -3$

f est représentée par une droite d horizontale passant par (0 ; -3).



Voir les exercices 27 à 29

10 [A savoir] Degré 1

Définitions

☐ On appelle **fonction du premier degré** ou **fonction de degré 1** une fonction f définie par une équation de la forme $f(x) = ax+b$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

☐ Considérer une fonction f de degré 1 ou une équation de la forme $y = ax+b$ est équivalent : à la **fonction f** définie par $f(x)= ax+b$ correspond l'**équation** $y = ax+b$.

☐ La **fonction identité** est la fonction f définie par $f(x) = x$

Remarque : on exige que a soit différent de 0 pour être certain de ne pas avoir de fonction constante !

☐ Une fonction de la forme $f(x) = ax+b$ (de degré 0 si a=0, de degré 1 sinon) est aussi appelée **fonction affine**.

☐ Une fonction de la forme $f(x) = ax$ (de degré 0 si a=0, de degré 1 sinon) est appelée **fonction linéaire**.

Exemple

☐ f définie par $f(x) = x - 2$ est une fonction affine de degré 1 ($a = 1$ et $b = -2$).

☐ g définie par $g(x) = -3x$ est une fonction linéaire de degré 1 ($a = -3$ et $b = 0$).

Représentation graphique

☐ Une fonction f de degré 1 définie par $f(x) = ax+b$ [ou une équation $y=ax+b$] est représentée graphiquement par une **droite oblique** d de pente a et d'ordonnée à l'origine b.

☐ Toute droite oblique d de pente a et d'ordonnée à l'origine b représente la fonction f de degré 1 définie par $f(x) = ax+b$ [ou l'équation $y= ax+b$]

Exemple 1 : représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = 2x - 3$

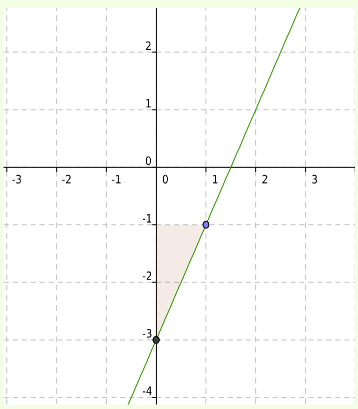
f est représentée par une droite oblique d d'équation $y = 2x - 3$, donc de pente 2 et d'ordonnée à l'origine -3.

On commence par placer l'ordonnée à l'origine -3 sur l'axe Oy ; cela donne un premier point de d.

A partir de ce point, on construit un deuxième point de d de telle sorte que la pente entre ces deux points soit égale à 2.

Comme $2=\frac{2}{1}$, le déplacement vertical entre les deux points est égal à +2 et le déplacement horizontal est égal à +1.

Il suffit enfin de relier ces deux points pour obtenir d.



Exemple 2 : représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x) = -\frac{2}{5}x + 4$

f est représentée par une droite oblique d d'équation $y = -\frac{2}{5}x + 4$, donc de pente $-\frac{2}{5}$ et d'ordonnée à l'origine 4. On commence par placer l'ordonnée à l'origine 4 sur l'axe Oy ; cela donne un premier point de d : $(0;4)$.

A partir de ce point, on construit un deuxième point de d de telle sorte que la pente entre ces deux points soit égale à $-\frac{2}{5}$; comme $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$, on peut choisir d'associer le signe – au numérateur ou au dénominateur.

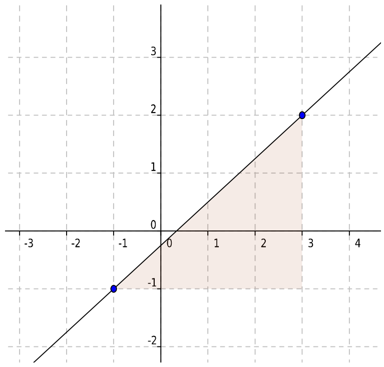
Si on fait le choix du numérateur, le déplacement vertical entre les deux points est égal à -2 et le déplacement horizontal est égal à 5.

Le signe – est interprété comme un déplacement dans le sens opposé à celui de l'axe concerné.

Il suffit enfin de relier ces deux points pour obtenir d.

Déterminer une fonction de degré 1 à partir de sa représentation graphique ou d'informations sur sa courbe représentative

Exemple 1 : déterminer l'expression algébrique de la fonction f représentée par la droite ci-contre :



On identifie deux points dont on est certain des coordonnées ; ici A(-1 ;-1) et B(3;2).

On calcule la pente entre ces deux points : $p = \frac{2-(-1)}{3-(-1)} = \frac{3}{4}$.

Cette droite est donc d'équation $y = \frac{3}{4}x + b$; reste à trouver b ...

(3;2) appartient à la droite, donc $f(3)=2$ et le couple (2;3) est solution de l'équation $y = \frac{3}{4}x + b$; on substitue : $2 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$.

$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$ est l'équation de d., et f est la fonction de d°1 définie par $f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Exemple 2 : déterminer la fonction f dont la courbe représentative est la droite d de pente –3 passant par le point A(2;5)

L'équation de f est de la forme $y = mx + n$ où m est la pente et n l'ordonnée à l'origine.
Comme la pente est donnée, on a donc $y = -3x + n$; reste à déterminer n.

Comme $A \in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de f, soit: $5 = -3 \cdot 2 + n \Leftrightarrow 5 = -6 + n \Leftrightarrow n = 11$.

f est donc la fonction du degré 1 définie par $f(x) = -3x + 11$.

Exemple 3 : déterminer la fonction f dont la courbe représentative est la droite d passant par le point $A(2;5)$ et parallèle à la droite d' d'équation $2x+6y-1=0$

Comme d est parallèle à d', elles ont la même pente ; déterminons celle de d' :
$2x+6y-1=0 \Leftrightarrow 6y=-2x+1 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{6}x+\frac{1}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$,
d'où pente de d' : $m' = -\frac{1}{3}$ et donc la pente de d' est $m= -\frac{1}{3}$; ainsi $d: y=-\frac{1}{3}x+n$; reste à déterminer n.

Comme $A\in d$, on sait que les coordonnées de A sont solution de l'équation de d, soit:
$5=-\frac{1}{3}\cdot 2+n \Leftrightarrow 5=-\frac{2}{3}+n \Leftrightarrow n=5+\frac{2}{3} \Leftrightarrow n=\frac{17}{3}$. f est donc la fonction du degré 1 définie par $f(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{17}{3}$.

Exemple 4 : déterminer la fonction f dont la courbe représentative est la droite d passant par le point $A(2;5)$ et perpendiculaire à la droite d' d'équation $2x+6y-1=0$

Comme d est perpendiculaire à d', elles ont des pentes inverses et opposées ;
déterminons celle de d' : $2x+6y-1=0 \Leftrightarrow 6y=-2x+1 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{6}x+\frac{1}{6} \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$
d'où $m' = -\frac{1}{3}$ et donc pente de d : m = 3, ainsi $d: y=3x+n$; reste à déterminer n.

Comme $A\in d$: $5=3\cdot 2+n \Leftrightarrow n=-1$. f est donc la fonction du degré 1 définie par $f(x)=3x-1$.

11 [Souvenirs] Proportionnalité et fonctions linéaires

Une situation dans laquelle deux grandeurs x et y varient proportionnellement avec un coefficient de proportionnalité a peut être modélisée à l'aide d'une fonction linéaire f définie par $f(x)=ax$, où $y=f(x)$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Exemple : on pèse une série d'objets en aluminium : la masse est-elle proportionnelle au volume ?

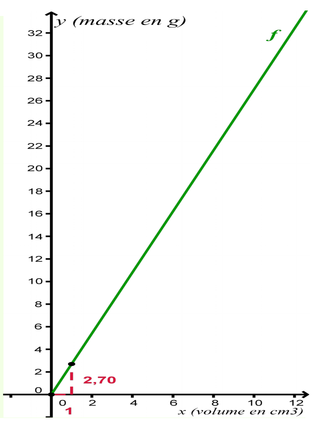
x (volume en cm^3)	1,0	2,0	5,0	7,5	10,0	12,0
y (masse en g)	2,70	5,40	13,50	20,25	27,00	32,40

On a : $\frac{2,70}{1,0}=\frac{5,40}{2,0}=\frac{13,50}{5,0}=\frac{20,25}{7,5}= \dots = \mathbf{2,7}$

Le rapport y/x est constant et égal au coefficient de proportionnalité a = 2,7 (pour $x\neq 0$). (Ce nombre est appelé masse volumique de l'aluminium et son unité est le g/cm^3.)

Ainsi, la masse de l'objet est une fonction linéaire de son volume et cette situation peut être modélisée par la fonction f définie par $f(x)=2,7x$. Sa représentation graphique est une droite de pente 2,7 passant par l'origine (voir le graphique ci-contre).

Remarque : dans cette situation, on a $x\in\mathbb{R}_+$, car un volume négatif n'a pas de sens !



Voir les exercices 30 à 37

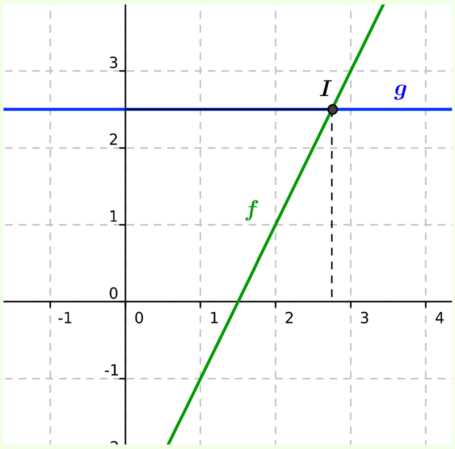
12 [A savoir] Interpréter graphiquement une équation

Soit $p(x)=q(x)$une équation du 1er degré. On peut considérer $p(x)$ et $q(x)$ comme deux expressions algébriques qui définissent deux fonctions p et q [ou deux équations $y = p(x)$ et $y = q(x)$].
Résoudre l'équation initiale est alors équivalent à trouver l'abscisse de l'éventuel point d'intersection entre (les courbes représentatives de) p et q.
Cette méthode géométrique permet de se représenter la situation mais ne donne à priori qu'une solution approchée.

Exemple 1 : résoudre l'équation $2x$ - 3 = 2,5 puis interpréter graphiquement ce problème.

Graphiquement : on considère les fonctions p et q définies par $p(x)=2x$ - 3 et $q(x)$= 2,5 ;

on les représente graphiquement de façon précise (voir ci-contre) et on observe que leur point d'intersection a comme abcisse environ 2,7.



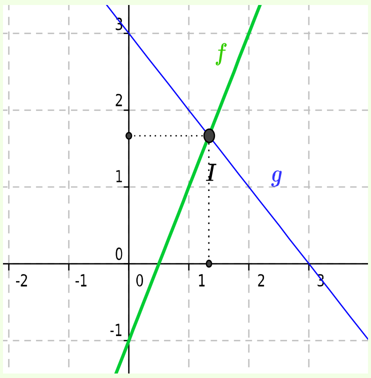
Algébriquement :

$$2x-3=2{,}5$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-3\mathbf{+3}=+2{,}5\mathbf{+3}$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x=5{,}5=\frac{11}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{11}{4}=2.75$$

Exemple 2 : résoudre l'équation $2x$ - 1 = - x + 3 puis interpréter graphiquement ce problème.

Graphiquement : on considère les fonctions p et q définies par $p(x)=2x$ - 1 et $q(x)$= - x + 3 ;

on les représente graphiquement de façon précise (voir ci-contre) et on observe que leur point d'intersection a comme abscisse environ 1,3.



Algébriquement :

$$2x-1=-x+3$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x-1\mathbf{+x+1}=-x+3\mathbf{+x+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3x=4$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{4}{3}$$

Remarque : l'approche graphique permet de se représenter la situation et d'estimer une réponse; l'approche algébrique fournit une solution à priori exacte.

Voir les exercices 38 à 39

13 [A savoir] Systèmes d'équations

Définitions

Un **système d'équations** est un ensemble d'équations portant sur les mêmes inconnues qui doivent être résolues simultanément. Un **système d'équations linéaires** est un système dont toutes les équations sont du premier degré.

Exemples :

- $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 14 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à trois inconnues.
- $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.
- $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x \cdot y = 5 \end{cases}$ est un système de deux équations à deux inconnues (non linéaire).

Une solution d'un système d'équations à deux inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ est un **couple** noté $(x_0\,;\,y_0)$ qui vérifie les deux équations simultanément ;
une solution d'un système d'équations à trois inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ est un **triplet** noté $(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ qui vérifie les trois équations simultanément.

Exemple:

Le triplet $(1\,;3\,;1)$ est solution du système $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 14 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$ car $3\cdot1+2\cdot3+5\cdot1=14$ et $1-2\cdot3+2\cdot1=-3$, mais ce n'est pas la seule ; par exemple, $(43\,;0\,;-23)$ en est une autre.

Résoudre un système d'équations, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions.

Remarque : pour résoudre un système d'équations à deux inconnues, on cherche à « éliminer une inconnue » pour se ramener à une équation à une inconnue.

Définition

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Principes d'équivalence

- En multipliant les deux membres d’une équation d’un système par un même nombre non nul, on obtient un système équivalent.
- En additionnant à une équation d'un système une autre équation du même système, on obtient un système équivalent.

Remarque : on additionne les équations « membre par membre ».

14 [Souvenirs] Résoudre un système par substitution

Exemple : résoudre le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y = 9 + 3x$ ⟵ On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$4x - 3(9 + 3x) = -17$ ⟵ On remplace (substitute) y par $9 + 3x$ dans la deuxième équation.

$4x - 27 - 9x = -17$
$\Leftrightarrow -5x = 10$
$\Leftrightarrow x = -2$ ⟵ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.

$y = 9 + 3 \cdot (-2)$
$\Leftrightarrow y = 3$ ⟵ On remplace x par -2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Conclusion : $S=\{(-2;3)\}$

15 [Souvenirs] Résoudre un système par comparaison

Exemple : résoudre le système $\begin{cases} y = 3x + 9 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$ par comparaison.

$\begin{cases} y = 3x+9 \\ y=2x+6 \end{cases}$ ⟵ On observe que y est exprimé en fonction de x dans les deux équations

$\Leftrightarrow 3x + 9 = 2x + 6$ ⟵ On égalise les deux expressions en x.

$3x + 9 = 2x + 6$
$\Leftrightarrow x = -3$ ⟵ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.

$y = 3 \cdot (-3) + 9$
$\Leftrightarrow y = 0$ ⟵ On remplace x par -3 dans une des deux équations trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.

Conclusion : $S=\{(-3;0)\}$

Remarque : cette méthode sera utile pour déterminer algébriquement les points d'intersection entre des paraboles ou, par la suite, des fonctions (résolution de systèmes d'équations non linéaires).

16 [Souvenirs] Résoudre un système par addition

Exemple : résoudre le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par addition.

Déterminer une des inconnues

$\begin{cases} 5 \cdot (5x - 4y) = 5 \cdot 8 \\ 4 \cdot (2x + 5y) = 4 \cdot 1 \end{cases}$ ⟵ On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$ ⟵ On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$25x + 8x = 40 + 4$ ⟵ On additionne membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y.

$33x = 44$ et donc $x=\frac{4}{3}$ ⟵ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.

Déterminer l'autre inconnue

$\begin{cases} \mathbf{2} \cdot (5x - 4y) = \mathbf{2} \cdot 8 \\ \mathbf{5} \cdot (2x + 5y) = \mathbf{5} \cdot 1 \end{cases}$ ⟵ On multiplie les deux membres de la première équation par **2** et ceux de la seconde par **5**.

$\begin{cases} 10x - 8y = 16 \\ 10x + 25y = 5 \end{cases}$ ⟵ On obtient ainsi le même coefficient devant x dans les deux équations.

$-8y - 25y = 16 - 5$ ⟵ On soustrait membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer x.

$-33y = 11$ et donc $y = -\frac{1}{3}$ ⟵ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de y.

Conclusion : $S = \{(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3})\}$

Remarque : on aurait également pu trouver la valeur de y en remplaçant x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations de départ.

17 [A savoir] Représentation graphique d'un système

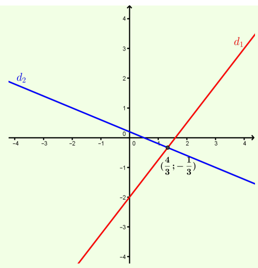
Relation entre algèbre et géométrie

On considère un système de deux équations à deux inconnues x et y. Soit S l'ensemble des couples qui sont solutions de ce système. Si on représente dans un repère les courbes (ou droites) correspondant aux deux équations, les points de S sont les **points d'intersection** de ces deux courbes.

Exemple : considérons le système d'équations linéaires $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ qui admet pour ensemble de solutions $S = \{(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3})\}$ (voir résolution algébrique faite précédemment).

Les représentations graphiques des équations $5x - 4y = 8$ et $2x - 5y = 1$ sont les droites d_1 et d_2.

Le couple $(\frac{4}{3} ; -\frac{1}{3})$ est solution du système, c'est-à-dire qu'il vérifie les deux équations simultanément. Géométriquement, il s'agit donc d'un point qui se trouve à la fois sur les deux droites ; c'est le point d'intersection des droites.



18 [A savoir] Cas particuliers

Certains systèmes 2x2 n'ont pas une unique solution. Ils peuvent n'avoir aucune solution, cela correspond à considérer deux équations représentées par deux droites parallèles, mais aussi avoir une infinité de solutions, ce qui correspond à considérer deux équations représentées par deux droites confondues. Attention, dans cette dernière situation, tous les couples ne sont pour autant pas des solutions du système, il faut alors utiliser une écriture spécifique pour l'ensemble solution.

Exemple 1 : considérons le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$

On peut aussi rédiger la résolution ainsi, en numérotant les équations :

$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$, puis $\begin{matrix} 2\cdot① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -4x + 2y = 1 \end{cases}$

on additionne et on obtient : 0 = 7, ce qui est impossible. On en déduit que $S=\emptyset$

Remarque : en écrivant le système comme $\begin{cases} y = 2x-3 \\ 2y = 4x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-3 \\ y = 2x-\frac{1}{2} \end{cases}$

on voit bien que ces deux équations sont représentées par deux droites parallèles de pente 2

Exemple 2 : considérons le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6 \end{cases}$

$\begin{matrix} 2\cdot① \\ (-1)\cdot② \end{matrix}\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$, puis on additionne et on obtient 0 = 0. Les deux équations sont équivalentes et donc représentées par deux droites confondues. Tous les points appartenant à cette droite sont solution du système ; on écrit : $S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 | 2x-y=3\}$

19 [A savoir] Résoudre un problème avec deux inconnues

Exemple : un musée propose un tarif pour les adultes à 7 CHF et un autre pour les enfants à 4,50 CHF. Lors d'une journée, ce musée a reçu la visite de 205 personnes et la recette totale a été de 1 222,50 CHF. Retrouver le nombre d'adultes et le nombre d'enfants ayant visité le musée lors de cette journée.

Étape n°1 : Choisir les inconnues

Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.

On repère les grandeurs non connues dans l'énoncé.
On les note généralement x et y.

Étape n°2 : Mettre le problème en équations

205 personnes ont visité le musée
donc $x + y = 205$
La recette totale a été de 1'222.50CHF
donc $7x + 4.50y = 1'222.50$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x et y.

$\begin{cases} x + y = 205 \\ 7x + 4.5y = 1222.50 \end{cases}$

L'énoncé se traduit donc par le système ci-contre.

Étape n°3 : Résoudre le système

$x + y = 205 \iff y = 205 - x$

$7x + 4.50(205 - x) = 1'222.50$
$2.50x = 300$
$x = 120$

et $y = 205 - 120 = 85$

On résout le système (ici, à l'aide de la méthode par substitution).

Étape n°4 : Vérifier

$120 + 85 = 205$ et
$7\cdot120 + 4.5\cdot85 = 1222.5$

On vérifie que le couple (120 ; 85) trouvé est solution du problème.

Étape n°5 : Conclure

120 adultes et 85 enfants ont visité le musée lors de cette journée.

Voir les exercices 40 à 48

20 [Aller plus loin] Systèmes 3x3

On peut également considèrer des systèmes d'équations, à priori linéaires, de trois équations à trois inconnues. Résoudre un tel système 3x3, c'est déterminer tous les triplets $(x;y;z)$ qui vérifient les trois équations ; on dispose des mêmes outils que pour les systèmes 2x2 ...

Exemple : résoudre le système $\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -4x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 7 \end{array}\right.$

On commence par identifier une des trois variables qu'on souhaite éliminer ; pour cela, on choisit deux des trois équations, on les multiplie si nécessaire afin que lorsqu'on les additionne, la variable z soit éliminée

$$\begin{array}{l} 1\cdot① \\ 2\cdot② \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -8x & + & 6y & + & 2z & = & 10 \end{array}\right.$$

$+$

$$④ \quad -5x + 7y - 0z = 9$$

La situation étant relativement symétrique, on choisit – par exemple - d'éliminer z partant de ① et ② :

on obtient ainsi une nouvelle équation – la ④ – qui n'a plus que x et y comme inconnues !

$$\begin{array}{l} (-3)\cdot② \\ 1\cdot③ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 12x & - & 9yy & - & 3z & = & -15 \\ 2x & - & 2y & + & 3z & = & 7 \end{array}\right.$$

$+$

$$⑤ \quad 14x - 11y + 0z = -8$$

On recommence à l'identique avec deux autres des trois équations de départ, ici ② et ③ ... et on obtient une équation ⑤ qui n'a elle aussi plus que x et y comme inconnues

Si on considère maintenant le système 2x2 constitué des deux équations ④ et ⑤, on a affaire à un système 2x2 classique qu'on sait résoudre !

$$\begin{array}{l} ④ \\ ⑤ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcr} -5x & + & 7y & = & 9 \\ 14x & - & 11y & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} 11\cdot④ \\ 7\cdot⑤ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcr} -55x & + & 77y & = & 99 \\ 98x & - & 77y & = & -56 \end{array}\right.$$

On choisit d'éliminer y

$+$

$$⑥ \quad 43x = 43$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 1$$

dans ④ : $-5\cdot 1 + 7y = 9$
$\Leftrightarrow 7y = 14$
$\Leftrightarrow \quad y = 2$

On choisit l'équation ④ ou ⑤ pour déterminer y

dans ② : $-4\cdot 1 + 3\cdot 2 + z = 5$
$\Leftrightarrow \quad z = 3$

On choisit l'équation ①, ② ou ③ pour déterminer z

La solution est un triplet : $S = \{(1;2;3)\}$

Remarque : on pourrait écrire ce système comme un **système** équivalent **triangulé** :

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ -5x & + & 7y & & & = & 9 \\ 43x & & & & & = & 43 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\left|\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ & & -5x & + & 7y & = & 9 \\ & & & & 43x & = & 43 \end{array}\right.$$

Remarque : comme pour les systèmes 2x2, il peut arriver qu'il n'y ait pas de solution ... ou qu'il y ait beaucoup de solutions ! Ces situations particulières seront étudiées en 3e et 4e années.

Voir les exercices 49 à 50

Exercices d'entraînement

Équations à une inconnue

1 Être solution ou non ?

a. Le nombre 1 est-il solution de l'équation $2x^5 - 3x^4 + 4x = 2x + 2$?

b. Le nombre $\sqrt{3}$ est-il solution de l'équation $2x^2 + x - 6 = \frac{3}{\sqrt{3}}$?

2 Proposer une équation.

c. a. Donner une équation de degré 1 dont l'ensemble de solution soit $S = \{\pi\}$

d. b. Donner trois équations de degré 1 dont l'ensemble de solution soit $S = \{2\}$

e. c. Donner une équation de degré 1 dont l'ensemble de solution soit $S = \emptyset$

3 Dire si les égalités suivantes sont toujours, parfois ou jamais vraies :

a. $x^2 - 1 = 0$

b. $x^2 - 1 = x^2 + 1$

c. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

d. $(x-3)^2 = 4$

e. $(x-3)^2 - 9 = 4x^2 - 6x$

f. $(x-3)^2 = 2(x - 3)$

4 Vrai ou faux ? Justifier !

a. $x^3 - x^2 = x$ est une équation.

b. $x^3 - x^2 = x$ est une identité.

c. $\frac{1}{x-1} = 2$ est une équation de degré un.

5 Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui admettent pour solution celle de l'équation $7y + 5 = 3y + 8$. Justifier.

a. $4y + 5 = 3y + 8$

b. $7y = 3y + 4$

c. $14y + 10 = 6y + 16$

d. $7y - 5 = 3y + 1$

6 Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{x}{5} - \frac{3x-2}{15} = \frac{1-x}{3}$

b. $3x = 1 + x$

c. $-4 = \frac{-4x+30}{5}$

d. $x - \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$

e. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 - \frac{x}{4}$

f. $\pi x = 1 + x$

g. $5x = 0$

h. $\frac{2x-4}{2} + 2 = x$

7 On considère la fonction f définie par $f(x) = 3x - 1$. Déterminer $f^{-1}(2)$ et D_f.

8 Un enseignant a l'intention d'acheter 12 calculatrices identiques pour ses élèves. Vu la quantité, le vendeur lui accorde un rabais de 15CHF par calculatrice, ce qui lui permet d'en acheter 14 pour le même prix. Quel est le prix, sans rabais, d'une calculatrice ?

9 On achète 100 litres de lait. Pour le vérifier, on le pèse et on trouve 102,7 kg. La masse volumique du lait pur est de 1030 grammes par litre. Donc le lait n'est pas pur. Trouver le volume d'eau qui a été ajouté.

10 Quelqu'un a acheté une pièce de drap. En la revendant 12CHF le mètre, il gagnerait 100CHF, et en la revendant 9CHF le mètre, il perdrait 23CHF. Quelle est la longueur de la pièce ?

11 Le tiers d'un capital est placé à 5% et le reste à 4%. L'intérêt annuel est de 130CHF. Quel est ce capital ?

12 Trouver une fraction égale à $\frac{4}{3}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est égale à 63. (Appeler x le numérateur de la fraction recherchée).

Voir la théorie 1 à 2

Plusieurs inconnues

13 Le triplet de nombres (0;1 ;-1) est-il solution de l'équation $x + 3y - z = 5x + 4y$? Et le triplet (-1;0;1) ?

14 Soit l'équation (E) : $-3xy - 2y^2 + x = 5$. Donner un couple qui soit solution de (E) et un couple qui ne soit pas solution de (E).

15 Vrai ou faux ? Justifier !

a. $(a - b)^2$ est une identité.

b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ est une identité.

c. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ est une équation.

16 Représenter dans un repère du plan tous les points (x ;y) tels que :

a. $x \cdot y = 0$

b. $x = 2$

c. $y = -1$

d. $y = 3x + 4$

Voir la théorie 3 à 4

Pente, droites

17 Sur un même repère, tracer les droites passant par le point $P(-2;3)$ et de pente :

a. $m=1$ **c.** $m=-3$ **e.** $m=0$

b. $m=\frac{1}{2}$ **d.** $m=-\frac{3}{5}$ **f.** $m=\frac{7}{3}$

18 Les points suivants sont-ils alignés ?

a. $P(-8;2), Q(5;-5)$ et $R(-15;6)$

b. $P(2;4), Q(-3;2)$ et $R(-13;-2)$

c. $P(\pi;\sqrt{5}), Q(\pi-4;3+\sqrt{5})$ et $R(8-\pi;-2+\sqrt{5})$

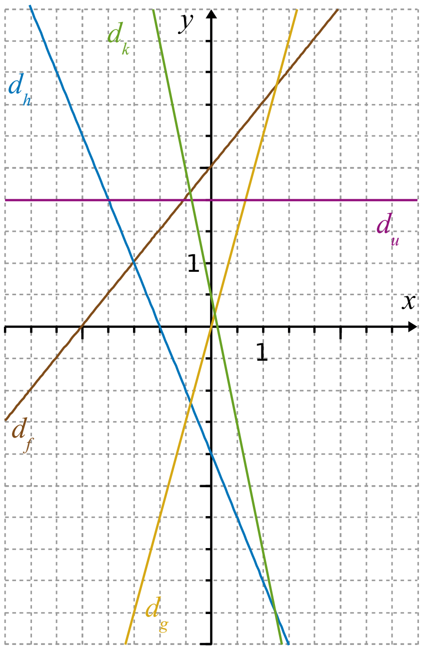
19 Quelle est la pente de la droite passant par les points :

a. $A(-1;3)$ et $B(4;6)$

b. $A(-2;6)$ et $B(4;0)$

20 Déterminer l'équation de la droite passant par $A(-34;255)$ et $B(-34;-2)$.

21 On considère les droites suivantes. Déterminer leurs équations :



22 On considère les équations suivantes :

a. $x+2y-3=0$ **c.** $x+y+3=0$

b. $-2x+y-4=0$ **d.** $y+8=0$

Déterminer les pentes et ordonnées à l'origine de leurs courbes représentatives puis les représenter graphiquement.

23 Donner une équation de :

a. la droite qui est de pente –1 et dont l'ordonnée à l'origine vaut $\frac{5}{8}$;

b. la droite qui passe par le point (4;4) et dont l'ordonnée à l'origine vaut 8;

c. la droite qui passe par le point (1;2) et de pente $-\frac{1}{2}$;

d. la droite qui passe par les points (1;2) et (5;9).

24 Les points $P(1;1)$, $Q(3;2)$ et $R(0;8)$ sont-ils les sommets d'un triangle rectangle ?

25 Les points $P(5;4)$, $Q(-3;-5)$ et $R(-8;-1)$ sont-ils les sommets d'un triangle rectangle ?

26 Établir une équation de la médiatrice du segment [AB], avec $A(-4;-3)$ et $B(6;1)$.

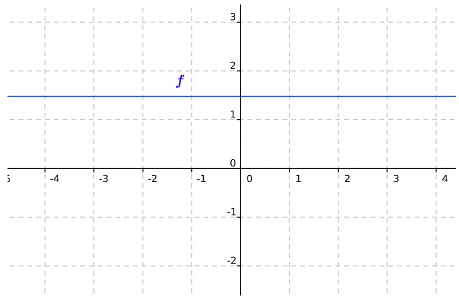
Voir la théorie 5 à 7

Degré 0

27 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

a. $f(x)=0.1$ **b.** $g(x)=\sqrt{5}$

28 Déterminer la fonction dont on donne une représentation graphique ci-dessous :



29 Quel phénomène peut modéliser une fonction de degré 0 ?

Voir la théorie 8 à 9

Degré 1

30 On considère la fonction f définie par $f(x)=3x-1$.

Déterminer $f^{-1}(0)$, $f^{2}(0)$, $f^{-1}(\frac{1}{3})$ et interpréter graphiquement.

31 On considère les fonctions f, g, h et j définies par $f(x)=x-3$, $g(x)=-\frac{2}{3}x+4$, $h(x)=-\frac{1}{2}x$ et $j(x)=-3$.

a. Donner la pente, l'ordonnée à l'origine et l'ensemble des zéros de chaque fonction.

b. Représenter ces quatre fonctions dans un même repère.

c. Pour chaque fonction, indiquer si elle est linéaire ou affine.

32 Dans chaque cas, déterminer l'expression algébrique de la fonction affine dont la droite représentative :

a. a une pente de –2 et passe par le point P(–2;–1) ;

b. a une ordonnée à l'origine de –4 et passe par le point K(3 ; 2) ;

c. passe par les points A(1;–2) et B(4;–1).

33 Déterminer la fonction dont la courbe représentative est :

a. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui est parallèle à la droite d' d'équation $y=9x-1$.

b. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui est perpendiculaire à la droite d' d'équation $y=9x-1$.

c. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui intersecte la droite d' d'équation $y-5x=1$ sur l'axe des ordonnées.

d. la droite d qui passe par le point (-2 ; -3) et qui intersecte la droite d' d'équation $y-5x=1$ en (-1 ; -4).

34 Soit f une fonction linéaire. Sachant que le point A(4;6) appartient à la représentation graphique de f, donner l'expression algébrique de cette fonction.

35 On constate que la température au niveau de la mer est en moyenne de 15,6 °C et elle baisse d'environ 10 °C lorsque l'on monte de 1'500 m.

a. Exprimer la température de l'air T (en °C) en fonction de l'altitude h (en m au-dessus du niveau de la mer) par une expression du type : $T(h)=a\cdot h+b$ pour $0\leq h\leq 6000$.

b. Calculer la température de l'air à l'altitude de 4'500 m.

c. Calculer l'altitude à laquelle il fait –17,8 °C.

d. La fonction T (h) de degré 1 est-elle affine ou linéaire ? Justifier.

e. Représenter graphiquement T.

f. Conjecturer une valeur pour le zéro de T, puis vérifier par un calcul.

g. Que signifie physiquement la pente de cette droite ?

h. De combien diminue la température T pour une augmentation d'altitude h de 1000 m ?

36 La famille Martin désire partir en Floride pour ses vacances. Toute la famille se rend à la banque pour échanger ses euros en dollars. Le tableau suivant résume les diverses conversions effectuées :

Somme en euros	100	180	220	300	500
Somme en dollars	130	234	286	390	650

a. La somme en dollars est-elle proportionnelle à la somme en euros ? Justifier.

b. Si tel est le cas, quel est le coefficient de proportionnalité ?

c. On note x la somme en euros. Exprimer la somme en dollars en fonction de la somme en euros. Noter f cette fonction.

d. Représenter graphiquement cette fonction pour $x\in[0;600]$.

37 Un radiateur contient 8 litres d'un mélange d'eau et d'antigel. Si 40% du mélange est de l'antigel, combien devrait-on enlever du mélange pour le remplacer par de l'antigel pour que le mélange résultant contienne 60% d'antigel ?

Voir la théorie 10 à 11

Interpréter graphiquement

38 Résoudre l'équation -3x + 2 = 5x - 4 puis interpréter graphiquement ce problème.

Exercices d'entraînement

39 Résoudre l'équation $-x+4=3$ puis interpréter graphiquement ce problème.

Voir la théorie 12

Systèmes 2x2

40 Le couple $\left(3\,;\frac{3}{2}\right)$ est-il solution du système $\begin{cases} 7x-12y = 3 \\ -5x+8y = 31 \end{cases}$?

41 Donner un système de deux équations à deux inconnues dont l'ensemble des solutions est $S=\{(-2\,;\,3)\}$.

42 Tracer les droites correspondant aux systèmes d'équations suivants et déterminer graphiquement les coordonnées du point d'intersection, puis vérifier algébriquement :

a. $\begin{cases} y = 3x-1 \\ y = 2x-3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-3y = 2 \\ 2x-6y = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-3y = 2 \\ 2x-7y = 6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3x+2y = 5 \\ 6x-4y = 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+y = 1 \\ 5x+5y = 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x+y = 1 \\ 3x+3y = 5 \end{cases}$

43 Résoudre les systèmes suivants avec la méthode de votre choix :

a. $\begin{cases} x-2y = -5 \\ 7x+10y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x+5y = 5 \\ 3x-7y = -2 \end{cases}$

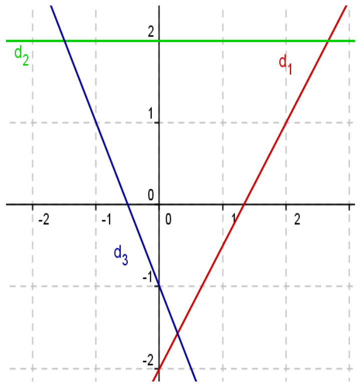
c. $\begin{cases} 5x+6y = -2 \\ 10x+3y = -7 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5x+4y = 13 \\ 2x-7y = 31 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x+5}{2} - \dfrac{3-y}{5} = 2{,}5 \\ x+7+\dfrac{y-6}{4} = 7\cdot\dfrac{5}{2} \end{cases}$

f. $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{5}{2} = \dfrac{2y-21}{2} + 1 \\ \dfrac{x+2}{3} + 3 = \dfrac{3-y}{5} - \dfrac{10}{3} \end{cases}$

44 On considère les trois droites suivantes :



a. Déterminer par lecture du graphique les points d'intersection.

b. Déterminer les équations correspondant à chacune de ces droites.

c. Poser des systèmes d'équations et déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection en valeurs exactes.

45 Pour chaque problème, poser le système qui permet de le résoudre et le résoudre.

a. La division euclidienne de deux nombres entiers naturels donne un quotient égal à 7 et un reste égal à 2. La somme de ces deux nombres entiers est égale à 138. Déterminer ces deux nombres entiers.

b. Il y a 6 ans, Jean avait 4 fois l'âge de Marie. Dans 4 ans, Jean aura 2 fois l'âge de Marie. Quel âge ont-ils maintenant ?

c. Un confiseur prépare deux sortes de boîtes comprenant des petits macarons et des grands. Dans la première boîte, il place dix petits macarons et quatre grands : cette boîte est vendue 7,20 chf. Dans la seconde boîte, il place cinq petits macarons et six grands : cette boîte est vendue 7,80 chf. Calculer le prix en chf de chaque sorte de macarons.

d. Maria veut réduire sa consommation d'eau. Elle a calculé qu'avec 1 m^3 d'eau elle pouvait prendre un bain et 17 douches ou bien 4 bains et 8 douches. Déterminer les volumes d'eau utilisés pour un bain et pour une douche.

e. Une agence de location de voitures fait payer la location en fonction du nombre de jours de location et du nombre de kilomètres parcourus. Simon a loué une voiture pendant trois jours et a parcouru 650 km ; il a payé 145,50 CHF. Aliksan a loué une voiture pendant quatre jours et a parcouru 580 km ; il a payé 151 CHF. Combien paiera un client qui doit faire 600 km sur trois jours ?

46 Il est recommandé de consommer 110 mg de vitamine C par jour. La maman de Julien achète du jus d'orange qui contient 52 mg de vitamine C pour 100 ml et du jus de pomme qui en contient 12 mg pour 100 ml. Pour suivre les recommandations tout en variant sa consommation de fruits, Julien souhaite boire un peu des deux dans un verre de 250 ml le matin au petit déjeuner. Quelle quantité de chaque jus devra-t-il mélanger pour bénéficier de son apport quotidien en vitamine C avec ce seul verre ?

47 On cherche l'équation d'une droite passant par les points $A(-2\,;3)$ et $B(58\,;33)$. Si les deux inconnues sont la pente et l'ordonnée à l'origine, poser le système qui permet de déterminer l'équation de cette droite et résolvez-le.

48 Les points d'intersection des droites suivantes forment un triangle : $d_1 : x-2y=4$, $d_2 : 2x-2y=0$ et $d_3 : 4x+2y=0$

a. Calculer les coordonnées des points d'intersection de ces trois droites.

b. Calculer l'aire du triangle ainsi formé.

Voir la théorie 13 à 19

Systèmes 3x3

49 Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 2x-y = 14 \\ 5x+y-z = 9 \\ 7x-5y-6z = 118 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-6y+z = -20 \\ 3x+y-4z = -11 \\ x+6y-3z = 10 \end{cases}$

50 Colin a passé trois épreuves de math et obtenu 5 de moyenne. La troisième comptait double. Sans tenir compte des coefficients, la somme de ses trois notes est de 15, et il a eu 1 bonne de plus à la dernière épreuve qu'à la première. Quelles sont les trois notes qu'il la obtenues ?

Voir la théorie 20

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

51 Résoudre les équations suivantes:

a. $5x = 3x + 3$ **f.** $5 + 6x = -x - 9$

b. $8x = 12x + 4$ **g.** $11x + 3 = 8x + 7$

c. $4 - 7y = 10y$ **h.** $5{,}5x + 1{,}5 = 9x + 6$

d. $7x + 1 = -4 - x$ **i.** $7 - 3{,}3x = 2x - 9{,}7$

e. $2 + 3x = 7 - 3x$ **j.** $5{,}1 - x = -8x + 1{,}7$

52 Résoudre les équations suivantes:

a. $4(x + 5) = 10x + 3$ **b.** $3(x - 2) = 6(x + 4)$

c. $7x - (5x + 3) = 5(x - 3) + 2$

d. $7(n + 2) - 3 = 25 - (3n + 4)$

e. $4y + 3(4y - 2) = 3(y + 1)$

53 Résoudre les équations suivantes:

a. $\frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{6}{5}$ **c.** $\frac{2x}{7} + \frac{3}{14} = \frac{x}{7} - \frac{1}{14}$

b. $\frac{5x}{8} - \frac{3}{10} = \frac{7x}{40}$ **d.** $\frac{2}{5}x - \frac{1}{9} = \frac{3}{9}x + \frac{4}{5}$

54 Résoudre les équations suivantes:

a. $2x - 7 = 5x + 12$ **c.** $54 + 3x = 0$

b. $\frac{x}{4} + 3 = 50$ **d.** $\frac{5}{18} - x = \frac{11}{45}$

e. $2(x - 1) - 6(2 - x) = x + 7$

f. $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

55 Joey pense à un nombre, lui ajoute 11, multiplie le tout par 3 et au résultat obtenu il retranche 3. Joey obtient 51.
Quel est le nombre de départ ?

56 Dans ma classe, il y a 28 élèves. Le jour où Lucas était absent, il y avait deux fois plus de filles que de garçons.
Combien y a-t-il de filles dans ma classe ?

57 Mario se rend de Genève à Naples en trois jours. Le premier jour, il parcourt les 5/9 de la distance totale, le deuxième jour, il parcourt la moitié du reste et le troisième jour, il parcourt 252 km.
Calculer la distance de Genève à Naples.

58 Une personne a dépensé le tiers de son argent, puis le cinquième de l'argent restant et il lui reste encore 14 CHF.
Combien d'argent avait-elle initialement ?

59 Dans un certain test médical destiné à mesurer la tolérance aux hydrates de carbone, un adulte boit 7cl d'une solution à 30 % de glucose. Lorsque le test est administré à un enfant, la concentration de glucose doit être ramenée à 20 %.
Combien de solution à 30 % et combien d'eau devra-t-on utiliser pour préparer 7 cl de solution à 20 % ?

60 Que vaut la pente de la droite passant par les points :

a. (5;3) et (5;6)

b. (-3;1) et (-5;5)

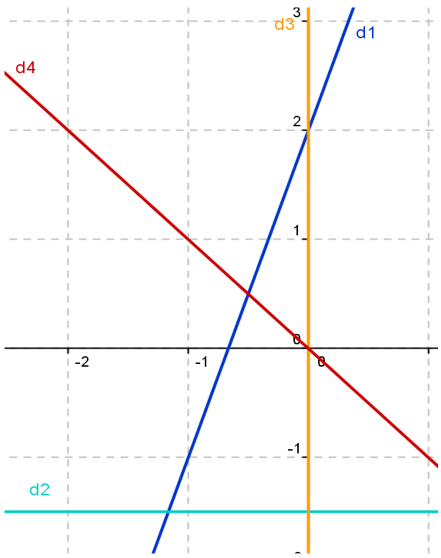
c. $(0\,;0)$ et $(a\,;b)$, $a \neq 0$

d. $(a\,;0)$ et $(0\,;b)$, $a \neq 0$

61 Les points suivants sont-ils alignés ? $P(-1\,;-2)$, $Q(5\,;-5)$ et $R(-15\,;6)$

62 Donner l'équation de la droite passant par $(5\,;-3)$ et de pente –0.25.

63 On considère les droites ci-dessous :



Déterminer une équation cartésienne de chacune d'entre-elles.

64 Donner l'équation de la droite passant par les points donnés.

a. $(0\,;0)$ et $(-1\,;3)$

b. $(3\,;1)$ et $(3\,;-4)$

c. $(1\,;2)$ et $(-3\,;2)$

d. $\left(\frac{5}{4}\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{3}{4}\,;-\frac{7}{2}\right)$

e. $(1-\sqrt{3}\,;3)$ et $(1+\sqrt{3}\,;5)$

65 Quelle est l'équation de la droite qui passe par $A(2\,;-4)$ et qui est perpendiculaire à la droite $2x-5y-8=0$?

66 Déterminer l'expression algébrique de la fonction linéaire g telle que $g(12)=6$.

67 On considère la fonction $f(x) = 3x - 1$.

Parmi les points suivants : A(0 ; -1), B(-11 ; -34), C(-1 ; -4), D(10 ; 25) et E(-3 ; -11), quels sont ceux qui appartiennent à la droite qui représente la fonction ? Expliquer la démarche.

68 Dans chacun des cas suivants, dire si la droite passant par les 2 points donnés est une droite linéaire ou affine (démonstration par le calcul, sans faire de graphique) :

a. $A(2\,;\,6)$; $B(-6\,;\,-18)$ **c.** $A(-4\,;\,-2)$; $B(-2\,;\,1)$

b. $A(0\,;\,5)$; $B(2\,;\,7)$

69 Les anglo-saxons utilisent le degré Fahrenheit comme unité de mesure de température alors que nous utilisons le degré Celsius. La température TF, en degré Fahrenheit, s'écrit en fonction de la température TC, en degré Celsius, de la manière suivante : TF = 1,8·TC + 32

a. Calculer les images de -60, -35, -20, 0, 20, 35 et 60.

b. Représenter graphiquement TF en fonction de TC (sur l'intervalle [-60 ; 60] de TC).

c. Quand nous disons « ce malade a 40 de fièvre», que diraient les Anglais ? Trouver la réponse d'abord sur le graphique, ensuite par le calcul.

d. Lire sur le graphique à quelle température correspondent 100 degrés Fahrenheit. Vérifier par le calcul.

e. Dans le grand nord canadien, lors d'une expédition internationale, deux explorateurs constatent que leur thermomètre, l'un gradué en degré Fahrenheit, l'autre en degré Celsius, affichent la même valeur. Quelle température fait-il ce jour-là ?

70 Un théâtre propose les 3 tarifs d'abonnement annuel suivants :

tarif 1 : carte d'abonnement à 200 CHF ; entrée libre à toutes les séances ;

tarif 2 : carte d'abonnement à 40 CHF ; billet =12 CHF par séance

tarif 3 : carte d'abonnement à 100 CHF ; billet =8 CHF par séance

a. Écrire l'expression des 3 fonctions qui représentent le coût total en fonction du nombre de séances. Indiquer les unités.

b. Tracer les graphiques des 3 fonctions sur une même feuille (bien réfléchir au choix des échelles, ce graphique doit permettre de comparer les 3 tarifs).

c. Pour quelle valeur du nombre de séances les tarifs 2 et 3 sont équivalents ? Répondre d'abord en observant le graphique, ensuite vérifier la réponse par le calcul.

d. Antoine estime qu'il ira au théâtre au moins 8 fois dans l'année, mais ne sais pas exactement combien de fois. A partir du graphique, que peut-on lui conseiller ? (comparer les tarifs quand le nombre de séances est supérieur ou égal à 8, considérer tous les cas).

e. Démontrer par le calcul les réponses trouvées à l'aide du graphique au point **d**.

71 Résoudre les systèmes suivants :.

a. $\begin{cases} -2x+3y = 2 \\ x-2y = 8 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 5x-6y = 4 \\ 3x+7y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+5y = 16 \\ 3x-7y = 24 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} 3x+4y = 3 \\ x-2y = -4 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 7x+12y = 3 \\ -5x+8y = 31 \end{cases}$ **f.** $\begin{cases} x+y = 16 \\ 13x-11y = 16 \end{cases}$

72 Soient deux nombres. Si on ajoute au premier les $\frac{3}{4}$ du second, on obtient 14. Mais si on retranche au triple du second les $\frac{3}{10}$ du premier, on obtient la fraction $\frac{69}{2}$. Quels sont ces deux nombres ?

73 Alexia dit à Christel : « Dans 5 ans, j'aurai 5 fois le quart de ton âge actuel. » Et Christel de lui répondre : « Tiens, tu n'as que 5 ans de plus que moi ! » Calculer l'âge des deux amies.

74 Mehdi et Martial ont acheté des stylos plume et des cartouches à la papeterie. Mehdi paie 15 CHF pour deux stylos et cinq lots de cartouches. Martial paie 10,20 CHF pour un stylo et quatre lots de cartouches.

a. Quel est le prix d'un stylo ? Et celui d'un lot de cartouches ?

b. Une semaine plus tard, la papeterie solde : − 10 % sur les stylos et − 15 % sur les lots de cartouches. Quels prix Mehdi et Martial auraient-ils payés s'ils avaient patienté ?

75 Parmi les 1 500 élèves que compte un collège, 455 d'entre eux vont visiter le château de Versailles. Ce groupe de 455 élèves représente 28 % des filles et 32 % des garçons du collège. Combien y a-t-il de filles et de garçons dans ce collège ?

76 Leïla dispose de deux tablettes de chocolat. L'une contient 60 % de cacao et l'autre 92% de cacao. Quelle masse de chaque tablette doit-elle mélanger pour obtenir un mélange de 400 g dont la teneur en cacao est de 72 % ?

77 Déterminer dans chaque cas les coordonnées des points d'intersection des deux droites.

a. $d_1 : 3x+5y=16$ et $d_2 : x-y=-4$

b. $d_1 : x+7y=32$ et $d_2 : x+2y=5$

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

51

a. $S=\{\frac{3}{2}\}$ **e.** $S=\{\frac{5}{6}\}$ **i.** $S=\{\frac{167}{53}\}$

b. S={-1} **f.** S={-2} **j.** $S=\{-\frac{17}{35}\}$

c. $S=\{\frac{4}{17}\}$ **g.** $S=\{\frac{4}{3}\}$

d. $S=\{-\frac{5}{8}\}$ **h.** $S=\{-\frac{9}{7}\}$

52

a. $S=\{\frac{17}{6}\}$ **c.** $S=\{\frac{10}{3}\}$ **e.** $S=\{\frac{9}{13}\}$

b. S={-10} **d.** S={1}

53

a. $S=\{-\frac{72}{5}\}$ **c.** S={-2}

b. $S=\{\frac{2}{3}\}$ **d.** $S=\{\frac{41}{3}\}$

54

a. $S=\{-\frac{19}{3}\}$ **c.** S={-18} **e.** S={3}

b. S={188} **d.** $S=\{\frac{1}{30}\}$ **f.** S={3}

55 Le nombre de départ est 7.

56 Il y a 18 filles.

57 La distance de Genève à Naples est 1134 km.

58 Initialement, elle avait 26,25CHF.

59 Environ 4,67cl (14/3) de solution à 30% et 2,33cl (7/3) d'eau.

60

a. $m=-\frac{3}{10}$

b. $m=--2$

c. $m=-\frac{b}{a}$

d. $m=-\frac{b}{a}$

61 Si P, Q, R sont alignés, alors $m_{P,Q}=m_{Q,R}$.

$m_{P,Q}=-\frac{1}{2}$; $m_{Q,R}=-\frac{11}{20}$; $m_{P,Q}\neq m_{Q,R}$ donc P, Q, R ne sont pas alignés.

62 $y=-0.25x-1.75$

63 $d_1 : y=3x+2$ $d_3 : x=0$

$d_2 : y=-\frac{3}{2}$ $d_4 : y=-x$

64

a. $y=-3x$

b. $x=3$

c. $y=2$

d. $y=2x-2$

e. $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+4-\frac{\sqrt{3}}{3}$

65 $y=\frac{5}{2}x-9$

66 $g(x)=\frac{1}{2}x$

67 A, B et C : oui / D et E : non

68

a. pente AB = 3 ; A et B appartiennent à la courbe de f, car $6=3\cdot 2$ et $-18=3\cdot(-6)$. f est linéaire

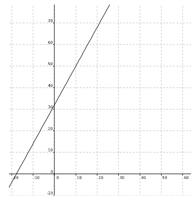
b. pente AB = 1 ; A et B n'appartiennent pas à la courbe de f ; f est affine

c. pente AB = 3/2 ; A et B n'appartiennent pas à la courbe de f ; f est affine

69

a. TF(-60)=-76; TF(-35)=-31; TF(-20)=-4; TF(0)=32; TF(20)=68; TF(350)=95; TF(60)=140

b.



c. 104 °F

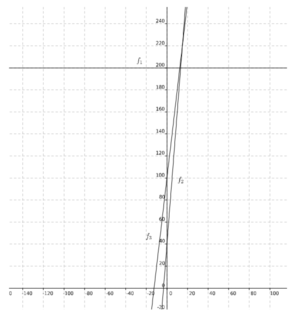
d. environ 37,7°C

e. -40°C=-40°F

70

a. $f_1(x)=200$; $f_2(x)=12x+40$; $f_3(x)=8x+100$

b.



c. 15 séances

d. Si seulement 8 fois, le tarif 2, si beaucoup plus, le tarif 1

e. $f_1(8)=200$; $f_2(8)=136$; $f_3(8)=164$

71

a. $S=\{(4;-2)\}$

b. $S=\left\{\left(\frac{76}{53};\frac{28}{53}\right)\right\}$

c. $S=\{(8;0)\}$

d. $S=\left\{\left(-1;\frac{3}{2}\right)\right\}$

e. $S=\{(1;2)\}$

f. $S=\{(4;-9)\}$

72 -5 et $\frac{76}{3}$

73 Alexia a 45 ans et Christel a 40 ans.

74 3 CHF.- et 1.80 CHF / 13.05 CHF et 8.82 CHF

75 625 filles et 875 garçons

76 250 gr à 60 % et 150 gr à 92 %.

77

a. $P=(-0,5;3,5)$ **b.** $P=(-5,8;5,4)$

« En mathématique, on ne comprend pas les choses,on s'y habitue ! »
John Von Neumann, mathématicien et physicien américano-hongrois (1903-1957)

A savoir en fin de chapitre

Équations à une inconnue

- ✔ notions d'équation, de solution, d'ensemble des solutions, d'identité ;
- ✔ notion d'équations équivalentes, principes d'équivalence ;
- ✔ équation du 1er degré ; résoudre des équations de degré 1 ;
- ✔ résoudre un problème en le modélisant par une équation ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 12

Équations plusieurs inconnues

- ✔ notions d'équation à plusieurs inconnues, de solution (couple, triplet, ...) ;
- ✔ représentation graphique d'une équation à deux inconnues ;

Voir la théorie 3 à 4 et les exercices 13 à 16

Pente, droites, représentations graphiques

- ✔ pente d'une droite ;
- ✔ droites horizontales, obliques et verticales et leurs équations respectives ;
- ✔ relation entre la pente de deux droites parallèles, perpendiculaires ;

Voir la théorie 5 à 7 et les exercices 17 à 26

Degré 0

- ✔ manipuler les fonctions de degré 0 (fonction constante), les représenter graphiquement ;
- ✔ déterminer une fonction de degré 0 dont on donne une courbe représentative ;
- ✔ équation d'une fonction du degré 0 ;

Voir la théorie 8 à 9 et les exercices 27 à 29

Degré 1

- ✔ manipuler les fonctions du degré 1 ; ordonnée à l'origine : fonction affine, linéaire, fonction identité ;
- ✔ représenter graphiquement une fonction du premier degré ;
- ✔ déterminer une fonction de degré 1 dont on donne une courbe représentative ;
- ✔ déterminer une fonction de degré 1 dont une courbe représentative :

✔ contient deux points donnés ;

✔ contient un point donné et est parallèle à une droite connue ;

✔ contient un point donné et est perpendiculaire à une autre droite connue ;

Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 30 à 37

Interprétation graphique d'une équation

✔ interpréter graphiquement une équation ;

Voir la théorie 12 et les exercices 38 à 39

Systèmes 2x2

✔ systèmes d'équations ; forme d'une solution : couple, triplet, ... ; savoir vérifier si un couple (un triplet) proposé est solution d'un système donné ;

✔ systèmes particuliers : sans solutions ou avec une infinité de solutions ;

✔ résoudre algébriquement (par substitution, par comparaison et par addition) un système de deux équations linéaires à deux inconnues ;

✔ interpréter graphiquement un système de deux équations linéaires à deux inconnues et le résoudre graphiquement ;

✔ mettre en équation un problème à plusieurs inconnues à l'aide d'un système d'équations et le résoudre ;

Intersections

✔ poser et résoudre un système d'équations pour déterminer les points d'intersection de deux droites ;

Voir la théorie 13 à 19 et les exercices 40 à 48

Systèmes 3x3

✔ * résoudre algébriquement un système de trois équations linéaires à trois inconnues.

Voir la théorie 20 et les exercices 49 à 50

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch05