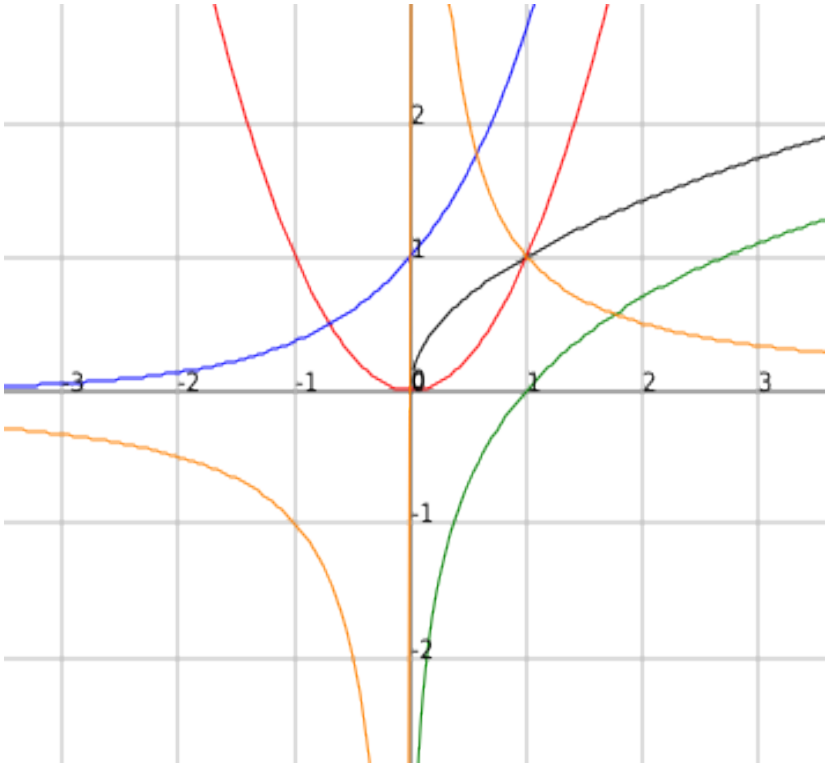


Représentation graphique de fonctions

Problème

Colin et Estelle jouent avec les nombres de l'ensemble {2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}.
Colin commence en écrivant un premier nombre choisi dans cet ensemble. C'est ensuite au tour d'Estelle, qui choisit un autre nombre de l'ensemble, le multiplie par le nombre déjà écrit, et inscrit le produit. Chacun, ensuite, à tour de rôle, choisit dans l'ensemble un nombre non encore choisi, le multiplie par le dernier nombre écrit, puis inscrit le produit. Le premier joueur qui doit écrire un nombre plus grand que 1000 a perdu.
Colin peut-il jouer pour être sûr de gagner, quel que soit la stratégie de son adversaire?

Copyleft - Edition 2023-25

Prérequis et activités de découverte

1 [Souvenirs] Repère, points, milieu, distance, pente

1. Comment repère-t-on des points dans le plan ? Qu'entend-t-on par **repère orthonormé** ?

2. Quelles sont les **coordonnées** des points **milieu** des segments $[AB]$ suivants ?

a. $A(-4;2)$, $B(4;8)$ **b.** $A(61;-149)$, $B(1228;-73)$ **c.** $A(-\frac{15}{3};\frac{9}{7})$, $B(\frac{31}{7};\frac{1}{3})$

3. Soit A(–3,4;1). Déterminer les coordonnées du point B tel que M(4;8) soit le milieu de $[AB]$.

4. Quelle est la **distance** entre les points suivants :

a. $E(13;0)$ et $F(29;0)$

b. $G(-16;5)$ et $H(-\frac{3}{4};5)$

c. $K(-2;4)$ et $L(5;-8)$

d. $N(-1{,}345;8{,}2)$ et $M(2{,}234;3{,}54)$

5. Déterminer le périmètre des polygones dont les sommets sont :

a. $A(0;5)$, $B(7;3)$, $C(0;1)$, $D(-7;3)$ **b.** $A(6;6)$, $B(9;2)$, $C(2;4)$

6. Rappeler la définition de la **pente** entre deux points.

7. Déterminer la pente des segments dont les extrémités sont :

a. $A(-2;3)$, $B(4;5)$ **b.** $A(4;-6)$, $B(-8;4)$ **c.** $A(-4;0)$, $B(3;-5)$

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 14

2 [Activité] Où est l'eau ?

Voici les hauteurs d'eau, en mètres, relevées par le marégraphe de Saint-Malo un jour d'août 2012:

t[h]	0	1	2	3	4	5	6	7	8
h[m]	2,452	3,651	5,943	8,481	10,486	11,271	10,82	9,496	7,655
t[h]	9	10	11	12	13	14	15	16	17
h[m]	5,721	3,994	2,744	2,233	2,997	5	7,775	10,264	11,707
t[h]	18	19	20	21	22	23	24		
h[m]	11,687	10,492	8,575	6,388	4,339	2,783	1,815		

Les observations du marégraphe de Saint-Malo sont la propriété du SHOM, de la CCI pays de Saint-Malo, de la DDTM Ille-et-Vilaine et sont mises à disposition sur le site des Réseaux de référence des observations marégraphiques (refmar.shom.fr)

a. À quelle heure la marée est-elle haute ? Basse ?

b. Quand la mer a-t-elle dépassé une hauteur de 10 m ?

c. Quand la mer a-t-elle une hauteur inférieure à 4 m ?

3 [Aller plus loin] Somme de chiffres

On considère un processus qui, à tout nombre entier naturel, associe la somme de ses chiffres.

a. Qu'obtient-on en partant du nombre 13717 ?

b. Proposer un nombre dont le résultat de ce processus est égal à 22.

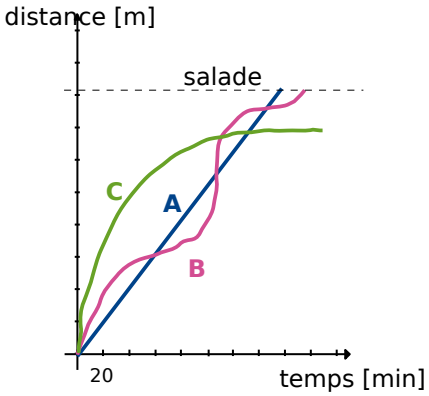
c. Quel est le plus petit nombre dont le résultat de ce processus est égal à 22.

d. Combien de nombres de l'intervalle]0;10 000] permettent d'obtenir 3 ? Expliquer.

e. Est-ce que tout entier naturel peut être le résultat de ce processus ?

4 [Activité] Quelle vitesse ?

Trois escargots A, B et C rampent ventre à terre pour atteindre une salade située à 8 m du point de départ. Leurs trajets respectifs sont représentés ci-contre.



a. Après 20 minutes, on ouvre les paris.
Sur quel escargot pariez-vous ?

b. Quel escargot mangera en premier la salade ?

c. Quelle variable dépend de l'autre : le temps ou la distance parcourue ?

d. Vrai ou faux ? Justifier.

i L'escargot A est toujours devant B et C.

ii L'escargot B zigzague pour atteindre la salade.

iii Les escargots doivent monter pour atteindre la salade.

iv C n'atteindra jamais la salade.

v A avance à vitesse constante.

5 [Activité] Relations

Un enfant débouche subitement dans la rue devant une voiture. Le conducteur pourra-t-il s'arrêter à temps ? Cela dépend bien sûr de sa vitesse, car la distance de freinage est fonction de la vitesse. Le tableau ci-dessous donne des distances de freinage à différentes vitesses, pour une route sèche et horizontale :

Vitesse [km/h]	0	20	40	60	80	100	120
Distance de freinage [m]	0	9	24	45	72	105	144

a. Dans cette situation, quelle est la variable indépendante et quelle est la variable dépendante ?

b. Représenter graphiquement cette fonction (par convention, on place la variable

indépendante sur l'axe horizontal et la variable dépendante sur l'axe vertical).

c. Peut-on relier les points ? Pourquoi ?

d. Estimer la distance de freinage d'une voiture roulant à 30km/h, 50km/h, 140km/h, 200km/h.

6 [Aller plus loin] Physique

La plupart des relations entre grandeurs physiques définissent des fonctions :

a. MRU (Mouvement Rectiligne Uniforme) : $x = v\,t$, où la vitesse v est constante.

La fonction $x : t \mapsto vt = x(t)$ donne la position x en fonction du temps t.

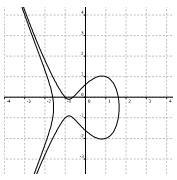
b. La fonction $E : m \mapsto \frac{1}{2}mv^2 = E(m)$ donne l'énergie cinétique E en fonction de la masse m pour une vitesse v donnée [Formule physique : $E = \frac{1}{2}mv^2$]

Donner d'autres exemples.

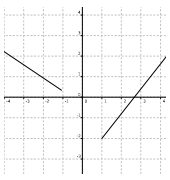
7 [Activité] Fonction ou non ?

Les représentations graphiques ci-dessous sont-elles celles de fonctions réelles ? Justifier.

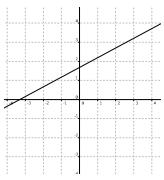
a.



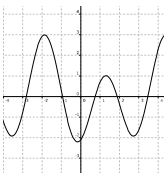
c.



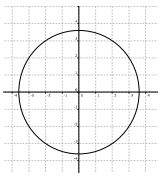
e.



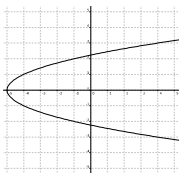
b.



d.



f.



8 [Activité] Représenter graphiquement une fonction

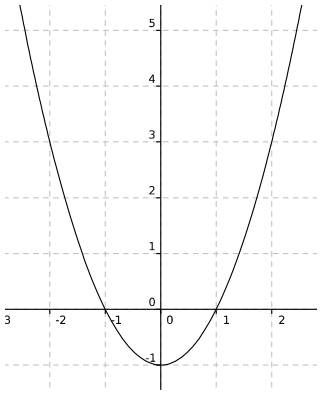
Considérons les fonctions f, g et h définies par $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Représenter graphiquement ces fonctions, c'est-à-dire tracer une **courbe représentative**.

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 15 à 25

9 [Activité] Images et préimages, ordonnée à l'origine, zéros

Considérons la fonction $f: x \mapsto x^2-1$ dont on donne une représentation graphique.



Si l'on choisit $x=2$ dans l'ensemble de départ, alors f fait correspondre à 2 le nombre 2^2-1, soit 3. On dit que 3 est **l'image** de 2 par f et on note $f(2)=3$. Réciproquement, on dit que 2 est **une préimage** de 3 par f. Les images appartiennent à l'ensemble d'arrivée, les préimages à celui de départ.

a. Déterminer graphiquement et par un calcul l'image de 1,5.

b. Déterminer l'**ordonnée à l'origine** de f.

c. Existe-t-il d'autre(s) préimage(s) de 3 ? Comment noter ce résultat ?

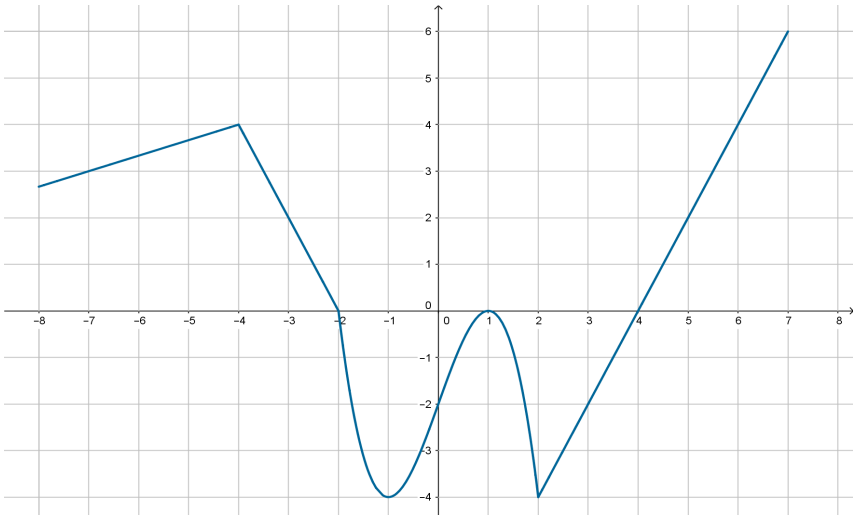
d. Pourquoi parle-t-on de l'image et d'une préimage, et non de l'image et de la préimage, ou encore d'une image et d'une préimage ?

e. Déterminer les préimages de – 1 et de – 2.

f. Déterminer l'**ensemble des zéros** de f.

10 [Activité] Lire

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction f définie sur [-8;7] :



a. Lire sur le graphique :

i $f(-4)$

ii $f(0)$

iii $f(5/2)$

iv $f(4)$

v $f^{-1}(5)$

vi $f^{-1}(3)$

vii $f^{-1}(0)$

viii $f^{-1}(-4)$

ix $f^{-1}(-5)$

b. Déterminer l'ordonnée à l'origine et l'ensemble des zéros de f puis donner son **tableau de signes**.

c. Déterminer l'ensemble des valeurs pour lesquelles f est :

i strictement positive

ii strictement négative

iii positive

iv négative.

11 [Activité] Vrai ou faux ?

Soit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{x}$. Justifier ou infirmer les propositions suivantes.

a. $f(2)=\frac{1}{2}$

b. $f^{-1}(1)=\{1\}$

c. $f^{-1}(\frac{1}{2})=\{2\}$

d. $f(0)=0$

e. l'image de 0,2 est 5

f. 0 n'a pas de préimage

g. f n'a pas de zéro

h. le point $(3;\frac{1}{3})$ appartient à la courbe représentative de f

i. le point $(-11;\frac{2}{20})$ appartient à la courbe représentative de f

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 26 à 35

12 [Activité] Domaine de définition

1. Considérons les fonctions f, g et h définies par $f(x)=x^3-1$, $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Déterminer leur **domaine de définition**.

2. Déterminer le domaine de définition des fonctions réelles définies par :

a. $f(x)=\frac{3x}{-5x-10}$

b. $f(x)=\sqrt{5-x}$

Voir la théorie 9 et l'exercice 36

13 [Activité] Quelques fonctions élémentaires

Représenter graphiquement les fonctions réelles définies par $f(x)=1$, $i(x)=x$, $g(x)=x^2$ $h(x)=x^3$, $j(x)=x^4$, $k(x)=\sqrt{x}$, $l(x)=\frac{1}{x}$ et $m(x)=|x|$, où $|x|$ est la **valeur absolue** de x.

Voir la théorie 10 et les exercices 37 à 40

14 [Aller plus loin] Modéliser

1. Pour les enfants de 6 à 10 ans, la taille y (en cm) est souvent fonction de l'âge t (en années). La taille moyenne d'un enfant de 6 ans est de 121,9 cm et celle d'un enfant de 7 ans de 128,3 cm. On admet que cette relation est affine. Exprimer y en fonction de t, interpréter graphiquement et prévoir la taille d'un enfant de 10 ans.

2. On veut construire une gouttière avec une feuille de métal rectangulaire de 12 mètres de long et de 30 cm de large, en pliant symétriquement les deux longs côtés, et en les relevant perpendiculairement à la feuille. On note x la hauteur d'un repli (perpendiculairement à la feuille).

a. Exprimer la contenance C de la gouttière en fonction de x.

b. Estimer graphiquement la valeur de x qui permet d'obtenir une gouttière qui ait une contenance maximale et la contenance qu'aurait alors cette gouttière.

3. Le directeur d'une salle de théâtre de Lancy a remarqué qu'à 8 CHF la place, il peut compter sur 500 spectateurs, et que chaque baisse de 0,50 CHF lui amène 100 spectateurs de plus. Poser n la baisse du prix du billet et considérer la fonction $f(n)$ qui donne la recette totale.

a. Choisir quelques valeurs de n, calculer leurs images par f, puis trouver une formule générale pour $f(n)$.

b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles f existe.

c. Estimer graphiquement combien doit-on faire payer la place pour obtenir une recette maximale ? Quelle est alors cette recette ?

4. On veut construire un aquarium vitré qui a la forme d'un parallélépipède rectangle, ouvert sur le dessus, dont la hauteur soit de 1,5 mètres et le volume de 6m^3. On note x la longueur et y la largeur de la base.

a. Exprimer y en fonction de x.

b. Exprimer la surface de vitre totale S en fonction de x.

c. Quelle est la valeur de x qui minimise la surface totale ? Quelle est alors cette surface ?

5. Supposons qu'on ait observé expérimentalement que le nombre de bactéries dans une culture double chaque jour. On a au départ 700 bactéries et on note $N(t)$ le nombre de bactéries après t jours.

a. Combien y aura-t-il de bactéries après un jour ? Deux jours ? Deux semaines ?

b. Après combien de jours y en aura-t-il plus de 100 millions ?

a. Ce modèle a-t-il un sens pour de grandes périodes (un an, dix ans...) ?

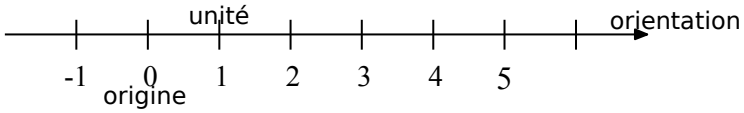
Voir la théorie 11 et les exercices 41 à 43

1 [Souvenirs] Le repère orthonormé dans le plan

Deux mathématiciens français, René Descartes (1596-1650) et Pierre de Fermat (1601-1665) vont, avec d'autres, établir un lien entre le calcul algébrique et les objets géométriques, c'est la géométrie analytique, aussi appelée géométrie cartésienne en l'honneur de Descartes.

Définitions

Un **axe** est une droite munie d'un point appelé **origine**, d'une **orientation** et d'une **unité**.

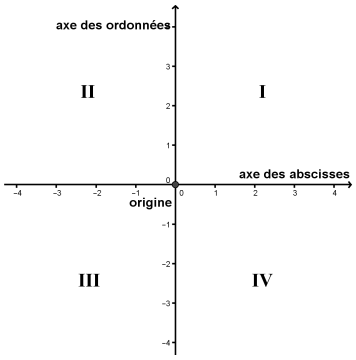


Un **repère** est composé de deux axes dont l'unique point d'intersection est l'origine des deux axes. On appelle également cette intersection **origine** du repère.

- Si les deux axes ont la même unité, on parle de **repère normé**.
- Si les deux axes sont perpendiculaires, on parle de **repère orthogonal**.
- Si les deux axes ont la même unité et sont perpendiculaires, on parle de **repère orthonormé**. Dans ce cas, on le représente avec un axe horizontal, appelé **axe des abscisses** (ou axe Ox), et un axe vertical, appelé **axe des ordonnées** (ou axe Oy).

Remarques :

- Par abus de langage, on parle souvent de « l'axe des x » pour parler de l'axe des abscisses et de « l'axe des y » pour celui des ordonnées.



- Le plan formé par ces deux axes (appelé plan cartésien) est divisé en quatre **quadrants** numérotés I, II, III et IV dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

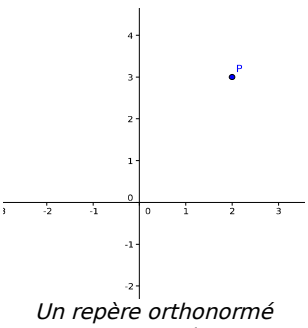
Définition

Soit P un point quelconque du plan, alors :

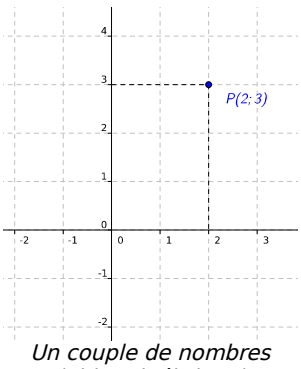
- la droite verticale passant par P coupe l'axe Ox en un point unique ; soit a la coordonnée de ce point sur l'axe Ox, a est appelé l'**abscisse de P** ;
- la droite horizontale passant par P coupe l'axe Oy en un point unique ; soit b la coordonnée de ce point sur l'axe Oy, b est appelé l'**ordonnée de P**.

Ainsi, à tout point P du plan peut être associé un couple unique de nombres $(a;b)$. On dit que a et b sont les **coordonnées** du point P et on parle du point $(a;b)$ ou du point $P(a;b)$. Inversement, tout couple $(a;b)$ détermine un unique point P de coordonnées a et b.

Illustration :



Un repère orthonormé avec un point P (objet géométrique)



Un couple de nombres (objet algébrique)

Définition

Soit P un point quelconque du plan et d une droite quelconque du plan :

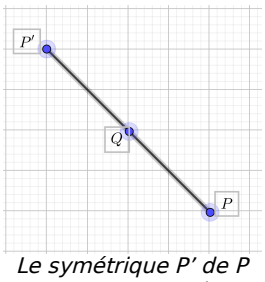
☐ le **projeté** P' de P sur d est le point situé à l'intersection de d avec la droite d' perpendiculaire à d passant par P [si $P \in d$, alors $P'=P$]

☐ la **distance** de P à d est la distance entre P et le projeté P' de P sur d [si $P \in d$, alors cette distance est nulle]

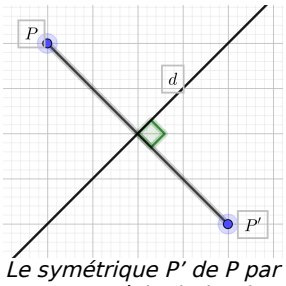
☐ le **symétrique** de P **par rapport à une droite** d (pour $P \notin d$) est le point P' situé à la même distance de d que P et qui est différent de P [si $P \in d$, alors $P'=P$]

☐ le **symétrique** de P **par rapport à un point** Q (pour $P \neq Q$) est le point P' situé à la même distance de Q que P et qui est différent de P [si $P=Q$, alors $P'=P$]

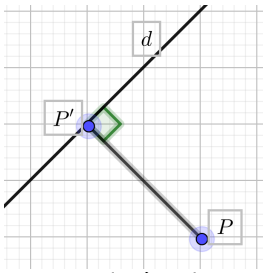
Illustration :



Le symétrique P' de P par rapport au point Q



Le symétrique P' de P par rapport à la droite d



Le projeté P' de P

2 [Souvenirs] Deux points, trois compétences

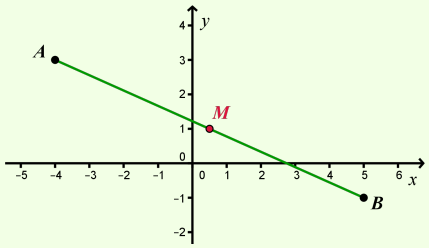
Théorème « Milieu entre deux points »

Soient $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ deux points du plan.

Alors le point milieu M entre les deux points P_1 et P_2 est $M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Exemple : déterminer les coordonnées du point milieu entre $A(-4;3)$ et $B(5;-1)$

$$M\left(\frac{-4+5}{2};\frac{3+(-1)}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1\right)$$



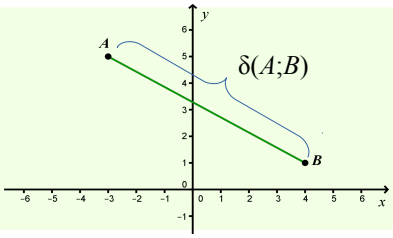
Théorème « Distance entre deux points »

Soient $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ deux points du plan.

Alors la distance δ entre P_1 et P_2 est : $\delta(P_1;P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Exemple : déterminer la distance entre $A(-3;5)$ et $B(4;1)$

$$\delta(A,B)=\sqrt{(4-(-3))^2+(1-5)^2}=\sqrt{65}\approx 8.06$$



Pente entre deux points du plan

Soient $P_1(x_1;y_1)$ et $P_2(x_2;y_2)$ deux points du plan non alignés verticalement.
La **pente *m*** entre P_1 et P_2 est définie par :

$$m = \frac{\text{distance verticale entre les 2 points}}{\text{distance horizontale entre les 2 points}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Exemple : calculer la pente entre les points $P_1(1;-5)$ et $P_2(4;2)$

$m = \frac{(-5)-2}{1-4} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$; on peut également calculer ainsi : $m = \frac{2-(-5)}{4-1} = \frac{7}{3}$

Voir les exercices 1 à 14

3 [A savoir] Fonctions

Dans de nombreux problèmes, on s'intéresse aux **relations** entre des quantités qui varient. Les situations qui vont nous intéresser sont celles pour lesquelles l'une des grandeurs variables - la **variable dépendante** - dépend de l'autre - la **variable indépendante**. Nous dirons alors que cette grandeur est **fonction de** l'autre.

Exemple : la longueur d'un glacier est fonction du temps, même si d'autres paramètres entrent en ligne de compte (la température par exemple). La longueur du glacier est la **variable dépendante**, et le temps la **variable indépendante** : le temps continue de passer même si la longueur du glacier de change pas.

Autres exemples : la taille d'un enfant est fonction de son âge, la distance parcourue par un train est fonction de la durée de ce parcours, l'aire d'un carré est fonction de la longueur de son côté, le bénéfice réalisé par le cinéma est fonction du prix du billet, etc...

Définition

Une **fonction *f*** d'un ensemble de départ D vers un ensemble d'arrivée E est une relation qui attribue à chaque élément de D au plus un élément de E. On note $f : D \rightarrow E$.

Autrement dit, on est en présence d'une fonction quand on a :

- ☐ une variable indépendante qui prend ses valeurs dans un ensemble de départ ;
- ☐ une variable dépendante qui prend ses valeurs dans un ensemble d'arrivée ;
- ☐ une règle de correspondance qui indique comment la variable dépendante varie en fonction de la variable indépendante, donnée par un tableau de valeurs, une phrase, une représentation graphique, une expression algébrique,... ;
- ☐ une condition : à tout élément de l'ensemble de départ correspond au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Remarque : le plus souvent, une fonction est définie par une expression algébrique.

Dans le cadre de ce cours, nous allons considérer uniquement des **fonctions réelles**, c'est-à-dire, les fonctions pour lesquelles D et E sont des sous-ensembles de nombres réels.

Notations

Pour exprimer qu'il existe une relation entre la variable indépendante x et la variable dépendante y, on écrit : $y = f(x)$ ou $f : x \mapsto y$ ou $f : x \mapsto f(x)$.
On utilise souvent les lettres f, g, h pour désigner les fonctions, x pour la variable indépendante et y pour la variable dépendante.

Remarque : la notation précédente est une notation simplifiée dans le cas de fonctions réelles, quand on sait que les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{R}$. Si ces ensembles ne sont pas $\mathbb{R}$, on utilise une notation plus complète : $f : D \to E$
$x \mapsto f(x)$

4 [A savoir] Différentes représentations d'une fonction

Expression algébrique

Soit f une fonction, D son ensemble de départ et $x \in D$. L'**expression algébrique** $f(x)$ d'une fonction permet de calculer directement la valeur $f(x)$ en fonction de la variable x.
On note souvent $y = f(x)$.

Exemple : soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{2}(x-6)^{-3}$

Description textuelle

Exemple : une fonction f est déterminée par le programme de calcul suivant : choisir un nombre, lui ôter 6 et prendre le carré du résultat.

On note f la fonction qui à un nombre x, lui associe le résultat du programme de calcul.

Après avoir choisi un nombre x, le programme lui ôte 6, on obtient donc $x - 6$.

Le programme élève ensuite ce nombre au carré soit : $(x-6)^2$

La fonction liée à ce programme est définie par l'expression algébrique $f(x) = (x-6)^2$.

Tableau de valeurs

Soit f une fonction, D son ensemble de départ et $x \in D$.
Un **tableau de valeurs** d'une fonction f donne, sur la première ligne (ou colonne), différentes valeurs de la variable x et, en vis-à-vis sur la deuxième ligne (ou colonne), la valeur $f(x)$ qui lui est associée.

Remarques : un tableau de valeurs n'est pas unique. Il dépend du choix des valeurs de x sur la première ligne (ou colonne). Si on connaît l'expression algébrique $f(x)$, on choisit les valeurs qu'on souhaite calculer pour produire le tableau. Si on est dans une situation où des données sont mesurées ou fournies, on peut les représenter dans un tableau qui servira de base pour essayer de trouver l'expression algébrique $f(x)$ qui modélisera le mieux cette situation, mais c'est difficile ! Le plus souvent, on devra se contenter d'une approximation ...

Exemple : dresser un tableau de 10 valeurs de la fonction g définie par $g(x) = (2x-3)^2$ à partir de $x = -5$ avec un pas de 1 (le pas de 1 signifie qu'il y a une différence de 1 entre les valeurs de x de la première ligne)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	169	121	81	49	25	9	1	1	9	25

Remarque: La calculatrice est très utile pour établir un tableau de valeurs (touche « table », « 2:Edit function » puis suivre les indications).

Courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction, D son ensemble de départ et $x \in D$.
La **courbe représentative** (ou **graphe**) de la fonction f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ où x parcourt D (et pour lesquels $f(x)$ existe).

Remarque : la notation correcte pour une courbe représentative est C_f ou Γ_f , mais le plus souvent, dans notre contexte, on notera plus simplement f pour nommer cette courbe.

Représenter graphiquement une fonction f , c'est tracer une courbe représentative de f dans un repère.

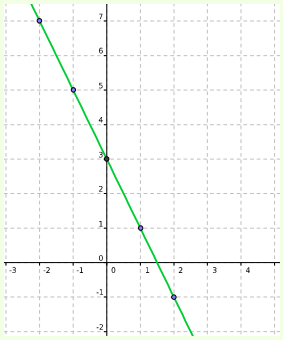
Remarque : à ce stade, pour représenter graphiquement une fonction, nous nous aidons du calcul de valeurs choisies dans l'ensemble de départ ; nous plaçons ensuite les **couples** obtenus dans un repère et nous relions les points obtenus ...

Exemple : représenter graphiquement les fonctions f et g définies par $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = -\dfrac{2}{x-3}$.

Pour f :

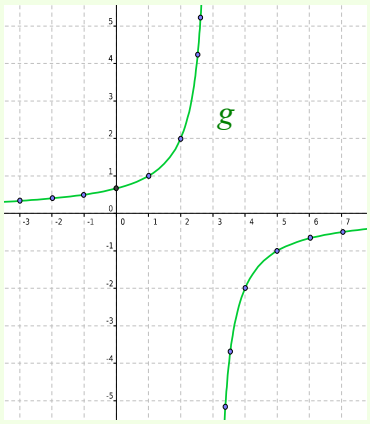
$$f(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$f(1) = -2 \cdot 1 + 3 = 1$$
$$f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1$$
$$f(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$$
$$f(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 7$$
etc...

puis on place les couples obtenus dans un repère et on relie les points obtenus :



Pour g :

$$g(0) = -\frac{2}{0-3} = \frac{2}{3}$$
$$g(1) = -\frac{2}{1-3} = 1$$
$$g(2) = -\frac{2}{2-3} = 2$$
$$g(3) = -\frac{2}{2-3} = -\frac{2}{0} \text{ n'existe pas}$$
$$g(-1) = -\frac{2}{(-1)-3} = \frac{1}{2}$$
etc ...



Remarque : dans les chapitres suivants, nous (ré)apprendrons à représenter graphiquement certaines fonctions de façon bien plus efficace et rapide !

Voir les exercices 15 à 25

5 [A savoir] Image, préimage

Définition

Soit f une fonction, a un élément de l'ensemble de départ et b un élément de l'ensemble d'arrivée tels que $f(a)=b$, alors :

- b est **l'image** de a par f ;
- a est **une préimage** de b par f.

Remarque: l'image, quand elle existe, est toujours unique (par la définition d'une fonction), alors qu'un élément b de l'ensemble d'arrivée peut avoir aucune, une ou plusieurs préimages. On parle de l'**ensemble des préimages** de b.

Notation

L'expression « a est **l'unique préimage** de b par f » se note $f^{-1}(b)=\{a\}$.
L'expression « c et d sont **les deux préimages** de b par f » se note $f^{-1}(b)=\{c\,;d\}$.

Remarque : une image est un nombre alors la(les) préimage(s) forment un ensemble, d'où la notation spécifique avec les accolades {...}. Lorsque la préimage est unique, on autorise parfois l'écriture $f^{-1}(b)=a$.

Exemple : considérons la fonction $f: x \mapsto x^4-1$.

Si on choisit $x=2$ dans l'ensemble de départ, alors f fait correspondre à 2 le nombre 2^4-1 , soit 15. On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note $f(2)=15$.

On dit que 2 est une préimage de 15 par f.

Mais il existe une autre préimage de 15 par f, soit $x=-2$, car $f(-2)=(-2)^4-1=15$

Pour s'assurer qu'il n'existe pas d'autres préimages, il faut résoudre une équation, ce qui sera étudié dans les chapitres suivants.

Les deux préimages de 15 par f sont -2 et 2 ; on note $f^{-1}(15)=\{-2\,;2\}$

6 [A savoir] Déterminer image et préimage(s)

Quand la fonction est définie par un tableau de valeurs

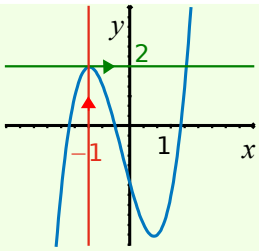
Exemple : on donne un tableau de valeurs d'une fonction h (sans connaître son expression algébrique). Donner l'image de 8 par la fonction h puis trouver une préimage de -125 par h.

x	−5,25	−3	−1,75	0	2	5,5	8
$h(x)$	−358	−125	3	7	12,5	−125	20

- Pour trouver l'image de 8, on cherche 8 sur la première ligne du tableau et on lit son image sur la deuxième ligne ; l'image de 8 est 20 et on écrit $h(8) = 20$.
- Pour déterminer une préimage de −125, on cherche −125 sur la deuxième ligne du tableau et on lit une (ou des) préimage(s) sur la première ligne : $\{-3\,;5{,}5\} \subseteq h^{-1}(-125)$.

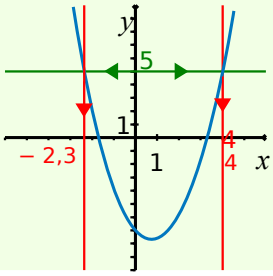
Quand la fonction est définie par une représentation graphique

Exemple 1 : soit une représentation graphique d'une fonction f ; déterminer l'image de -1.



On trace (ici en rouge) la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $(-1\ ;\ 0)$, puis (ici en vert) la droite parallèle à l'axe des abscisses et qui passe par le point d'intersection de la courbe et de la droite précédente.
Elle coupe l'axe des ordonnées approximativement au point $(0\ ;\ 2)$.
On en déduit que $f(-1) \approx 2$.

Exemple 2 : soit une représentation graphique d'une fonction g ; déterminer $g^{-1}(5)$.



On trace (ici en vert) la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $(0\ ;\ 5)$, puis (ici en rouge) la (ou les) droite(s) parallèle(s) à l'axe des ordonnées passant par le(s) point(s) d'intersection de la courbe et de la droite précédente.

Ces parallèles (deux, ici) coupent l'axe des abscisses approximativement aux points $(4\ ;\ 0)$ et $(-2{,}3\ ;\ 0)$. Donc 5 a deux préimages par la fonction g qui sont, environ, 4 et $-2{,}3$.

On écrit $g^{-1}(5)=\{-2{,}3\,;4\}$

Quand la fonction est définie par une expression algébrique

Exemple : soit la fonction f définie par $f(x) = 3x^2-7x-12$. Quelle est l'image de -5 ?

Calcul de l'image de -5 par f avec $f(x) = 3x^2-7x-12$:

$f(-5) = 3\cdot(-5)^2 - 7\cdot(-5) - 12$ ⟵ On remplace x par -5.

$f(-5) = 75+35 - 12$ ⟵ On calcule.

$f(-5) = 98$

Donc l'image de -5 par la fonction f est 98. On écrit aussi $f(-5) = 98$.

Remarque : déterminer algébriquement des préimages revient à résoudre une équation. Nous reviendrons en détail sur les équations et leur résolution dans le chapitre suivant.

7 [A savoir] Zéros, ordonnée à l'origine, tableau de signe

Ordonnée à l'origine et ensemble des zéros

- L'**ordonnée à l'origine** de f, parfois notée o.o., est l'image de 0 par f, soit $f(0)$
- L'**ensemble des zéros** de f, noté Z_f, est l'ensemble des préimages de 0 par f.

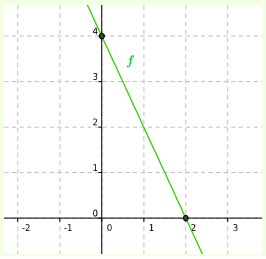
Interprétation graphique de l'ordonnée à l'origine et de l'ensemble des zéros

- L'ordonnée à l'origine est – si elle existe - la seconde coordonnée du point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe Oy (l'axe des ordonnées!) :
- L'ensemble des zéros donne la(les) première(s) coordonnée(s) du(des) point(s) d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe Ox.

Exemple : déterminer l'ordonnée à l'origine et l'ensemble des zéros de la fonction f définie par $f(x)=4-2x$.

$f(0)=4-2\cdot 0=4$ et donc l'ordonnée à l'origine de f est 4.

On cherche le(s) x tels que $f(x)=4-2x=0$, soit $x=2$
et on a : $Z_f=\{2\}$



Remarque : déterminer algébriquement l'ensemble des zéros d'une fonction revient à résoudre une équation. Nous reviendrons en détail sur les équations et leur résolution dans le chapitre suivant.

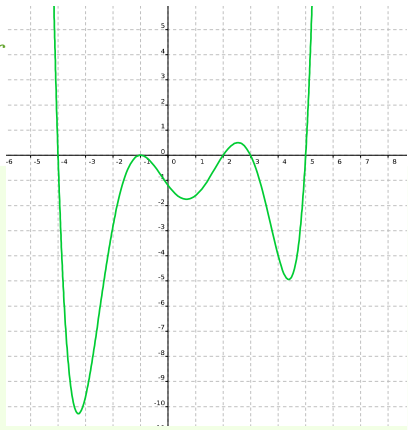
Tableau de signes

Le **tableau de signes** d'une fonction f permet d'identifier les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est négative, nulle ou positive.

Déterminer un tableau de signes à partir d'une représentation graphique

Pour déterminer un tableau de signes à partir de la représentation graphique, on commence par déterminer les valeurs x pour lesquelles $f(x)$ vaut 0 (c'est-à-dire Z_f) ; on les insère dans la première ligne du tableau, puis on indique dans la deuxième ligne que $f(x)$ vaut 0 pour ces valeurs ; on lit ensuite entre ces valeurs si $f(x)$ est négative, nulle ou positive.

Exemple : donner l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros et le tableau de signes de la fonction f définie par la courbe représentative ci-dessous, puis déterminer l'ensemble des valeurs pour lesquelles f est négative ou nulle, puis positive ou nulle :



ordonnée à l'origine : $f(0)\simeq -1.2$
ensemble des zéros : $Z_f=\{-4;-1;2;3;5\}$

On voit que $f(x)$ vaut 0 pour x = -4 ; -1 ; 2 ; 3 et 5, ce qu'on indique dans le tableau :

x		-4		-1		2		3		5	
$f(x)$		0		0		0		0		0	

On complète le tableau en lisant le signe de $f(x)$ entre les valeurs nulles :

x		-4		-1		2		3		5	
$f(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-	0	+

f est négative ou nulle si et seulement si $x\in[-4;2]\cup[3;5]$

f est positive ou nulle si et seulement si $x\in]-\infty;-4]\cup\{-1\}\cup[2;3]\cup[5;+\infty[$

Voir les exercices 26 à 36

8 [A savoir] Domaine de définition

Définition

Soit f une fonction, D son ensemble de départ et $x \in D$.
Le **domaine de définition** de f est le sous ensemble de l'ensemble de départ D constitué de tous les éléments pour lesquels f admet exactement une image. On le note D_f .

Déterminer le domaine de définition d'une fonction f

Déterminer le domaine de définition d'une fonction f c'est déterminer l'ensemble de tous les éléments x de l'ensemble de départ pour lesquels $f(x)$ existe. A ce stade, il s'agit de vérifier si il y a des risques de division par 0 ou de racine carrée de nombres négatifs.

Exemple : déterminer les domaines de définition des fonctions f, g, h et j définies par $f(x)=x+3$, $g(x)=\sqrt{x+1}$, $h(x)=\dfrac{-2}{x-3}$ et $j(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Comme $f(x)$ existe pour tout x réel, alors $D_f=\mathbb{R}$.

Il y a une racine carrée dans $g(x)$ → problème si $x+1<0$, c'est-à-dire si $x<-1$;
donc $D_g=\mathbb{R}\setminus]-\infty;-1[=[-1;+\infty[$.

Il y a une division dans $h(x)$ → problème si $x-3=0$, c-à-d si $x=3$; donc $D_h=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

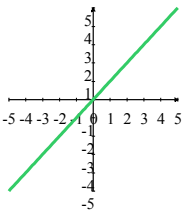
Il y a à la fois une racine carrée et une division dans $j(x)$ → problème si $x<0$ pour la racine et problème si $\sqrt{x}=0$ pour la division, c'est-à-dire si $x=0$; donc $D_j=]0;+\infty[$.

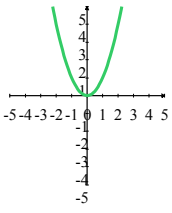
Voir l'exercice 37

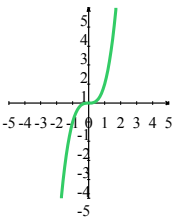
9 [A savoir] Fonctions élémentaires

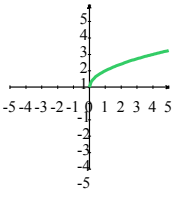
Définitions

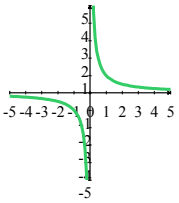
La **fonction identité** est la fonction f définie par $f(x)=x$, la **fonction « carré »** est la fonction f définie par $f(x)=x^2$, la **fonction « cube »** est la fonction f définie par $f(x)=x^3$, la **fonction « racine carrée »** est la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$, la **fonction « inverse »** est la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.


fonction identité


fonction "carré"


fonction "cube"


fonction "racine carrée"


fonction "inverse"

Voir les exercices 38 à 40

10 [Aller plus loin] Modéliser

Définition

Modéliser, c'est partir d'une situation donnée et utiliser des outils mathématiques pour l'étudier et apporter des solutions exactes ou approchées. Soit f une fonction. Le **domaine des valeurs intéressantes pour le problème** est le sous-ensemble de l'ensemble de départ de f constitué de tous les éléments pour lesquels le problème a un sens.

Exemple 1 : un pétrolier a un accident en pleine mer qui provoque une fuite dans sa coque. Le pétrole se répand sous la forme d'une nappe circulaire à la surface de la mer. On suppose que le rayon (en km) de cette nappe est modélisé par la fonction r définie par $r(t)=0{,}21t$, où t est le temps (en h). On cherche à déterminer l'aire de la nappe 6 heures après l'accident.

Le domaine des valeurs intéressantes pour le problème est $[0;+\infty[$.

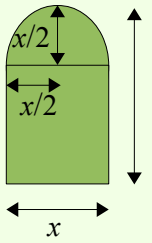
La nappe est circulaire, son aire est donnée par : $A=\pi r^2$; vue comme une fonction du rayon : $A(r)=\pi r^2$, et comme fonction du temps : $A(t)=\pi(0.21t)^2$

après 6 heures, soit $t=6$: $A(6)=\pi(0.21\cdot 6)^2=\pi(1.26)^2=\pi\cdot 1.5876\simeq 4.99\,km^2$

Exemple 2 : un architecte doit insérer une fenêtre de forme particulière dans ses plans. Cette fenêtre doit avoir la forme d'un carré surmonté d'un demi-cercle et être la plus grande possible. Des contraintes techniques lui imposent une hauteur maximale totale de 2 mètres et une largeur maximale de 1,5 mètre. Par ailleurs, son budget ne lui permet pas d'envisager une surface vitrée supérieure à 2 mètres carrés. Comment l'aider à résoudre son problème ?

Posons x la longueur du côté du carré ;

on en déduit que le rayon du cercle est égal à $\frac{x}{2}$



$x+\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}$

L'aire totale est : $A(x)=x^2+\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}=x^2+\pi\frac{x^2}{8}=x^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)$

La valeur maximale pour x est 1.5 ;

la valeur maximale pour la hauteur totale $\frac{3x}{2}$ est 2, soit $\frac{3x}{2}=2$, c'est-à-dire $x=\frac{4}{3}$;

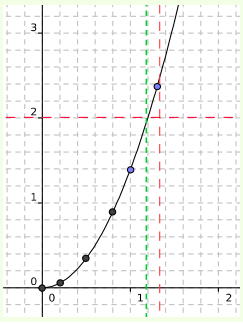
le domaine des valeurs intéressantes pour ce problème est donc : $x\in]0;\frac{4}{3}]$

Calculons quelques images pour représenter la fonction A :

$A(0)=0, A(0.2)=(0.2)^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\simeq 0{,}06$, $A(0.5)=(0.5)^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\simeq 0{,}35$

$A(0.8)=(0.8)^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\simeq 0{,}89, A(1)=1^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\simeq 1{,}39$, $A\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)\simeq 2{,}47$

et interprétons graphiquement : on ne peut pas considérer de valeurs de x supérieures à $\frac{4}{3}$ ni de valeurs de $A(x)$ supérieures à 2 (les droites rouges) ; la plus grande valeur possible pour x correspond donc à la préimage de 2 ; une lecture graphique nous donne $x\simeq 1{,}2$ (la droite verte). Le calcul confirme :



$x^2\left(1+\frac{\pi}{8}\right)=2\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{1+\frac{\pi}{8}}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{1+\frac{\pi}{8}}}=\pm 1{,}2$ x est une longueur, d'où $x=+1{,}2$; la base de la fenêtre doit donc mesurer environ 1,2 m.

Voir les exercices 41 à 43

Exercices d'entraînement

Repérer des points, mesurer des distances, points milieux

1 Trouver les coordonnées des projetés sur l'axe des abscisses et des ordonnées des points $A(2;-3)$, $B(-5;1)$ et $C(-3;-4)$

2 Trouver les coordonnées des points symétriques aux points $A(2;-3)$, $B(-5;1)$ et $C(-3;-4)$ par rapport aux axes Ox puis Oy.

3 Trouver les coordonnées du point symétrique au point : $A(2;-3)$, par rapport à l'origine du repère.

4 Déterminer dans quel(s) quadrant(s) du plan se trouve le point $P(a;b)$, si :

a. $a=2$ **c.** $ab>0$ **e.** $a-b>0$

b. $b<0$ **d.** $a-b=0$ **f.** $b=-4$

5 Représenter dans un repère du plan tous les points dont :

a. les deux coordonnées sont des entiers strictement compris entre -3 et 2.

b. les deux coordonnées sont des réels compris entre -3 et 2.

c. la première coordonnée est -3.

d. la première coordonnée est inférieure ou égale à 2.

e. le produit des coordonnées est nul.

f. le produit des coordonnées est supérieur ou égal à 0.

g. la somme des coordonnées est nulle

h. la somme des coordonnées est inférieure ou égale à 0.

6 Déterminer le milieu du segment $[AB]$ avec $A(3;8)$ et $B(-2;-1)$.

7 $A(-3;8)$ étant donné, calculer les coordonnées du point B tel que $M(5;-10)$ soit le milieu du segment $[AB]$.

8 Soit le triangle défini par les points $A(0;0)$, $B(2;3)$ et $C(-1;5)$. Calculer les coordonnées des points milieux de ses côtés.

9 Calculer la distance entre $A(3;8)$ et $B(-2;-1)$.

10 Déterminer le périmètre du polygone dont les sommets sont $A(3;4)$, $B(-2;-4)$, $C(-8;-3)$, $D(-5;3)$

11 Soient $A(8;8)$, $B(-4;8)$ et $C(8;-2)$ Calculer l'aire du triangle ΔABC.

12 Sur un même repère, tracer les droites passant par le point $P(-2;3)$ et de pente :

a. $m=1$ **c.** $m=-3$ **e.** $m=0$

b. $m=\frac{1}{2}$ **d.** $m=-\frac{3}{5}$ **f.** $m=\frac{7}{3}$

13 Les points suivants sont-ils alignés ?

a. $P(-8;2), Q(5;-5)$ et $R(-15;6)$

b. $P(2;4), Q(-3;2)$ et $R(-13;-2)$

c. $P(\pi;\sqrt{5}), Q(\pi-4;3+\sqrt{5})$ *et* $R(8-\pi;-2+\sqrt{5})$

14 Déterminer les étymologies de « abscisse », « ordonnée » et « repère ».

Voir la théorie 1 à 3

Fonctions

15 Déterminer l'étymologie de «fonction».

16 Sachant que la somme de deux nombres vaut 9, exprimer l'un des nombres en fonction de l'autre.

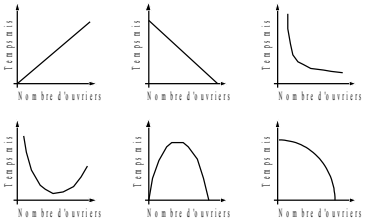
17 Sachant que le produit de deux nombres vaut a, exprimer l'un des nombres en fonction de l'autre.

18 Pour un carré de côté x, exprimer son périmètre et son aire en fonction de la longueur de son côté.

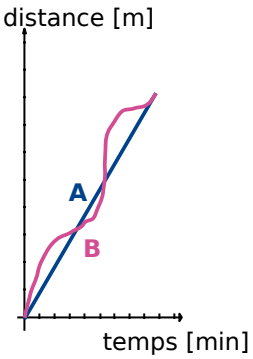
19 Pour un cube de côté x, exprimer son aire latérale et son volume en fonction de la longueur de son côté. Si on divise la longueur du côté par 3, que deviennent son aire latérale et son volume ?

20 Pour une longueur L donnée, exprimer, en fonction d'un des côtés, l'aire d'un rectangle ayant L pour périmètre.

21 Un groupe d'ouvriers doit effectuer des plantations. Parmi les graphiques ci-dessous, quel est celui ou ceux qui modélisent le mieux la relation entre le nombre d'ouvriers et le temps nécessaire pour accomplir la tâche ? Justifier.



22 Deux coureurs A et B partent en même temps du village pour se rendre à la ville par la même route. Leur course est caractérisée par le graphique ci-dessous :



Vrai ou faux ?

a. La route monte du village à la ville.

b. A arrive en premier à la ville.

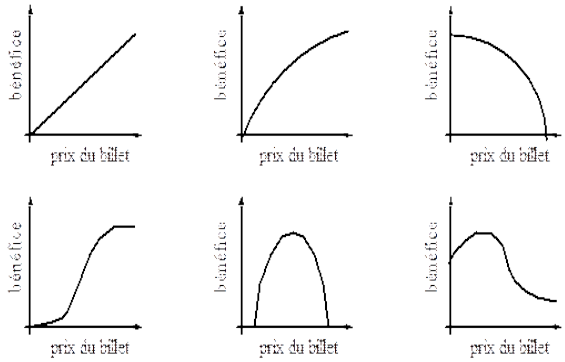
c. A est toujours devant B.

d. B court plus vite que A.

e. B zigzague d'un côté à l'autre de la route.

f. A court à vitesse constante.

23 Le directeur du cinéma aimerait savoir quel impact aura un changement du prix du billet sur son bénéfice. Quel est le graphique le plus vraisemblable ? Pourquoi ?



24 Le tableau suivant présente deux façons d'écrire ou d'exprimer des fonctions ; le compléter :

Algorithme	Fonction définie par une équation
« doubler, puis ajouter 5 »	
	$f(u)=3(u+4)$
« prendre le carré , puis ajouter un »	
	$f(t)=(t+1)^3$
« prendre le triple, puis ajouter 10, puis multiplier par – 3 »	
	$f(t)=t^3+1$

25 Explorer la calculatrice pour y trouver des touches qui représentent des fonctions.

Voir la théorie 4 à 5

Images, préimages, o.o., zéros, tableaux de signes

26 Traduire chaque égalité par une phrase contenant le mot « image »:

a. $f(3)=4$

b. $g(0)=-2$

c. $h(x)=3x^2-4$

d. $p(x)=-x$

27 Traduire chaque phrase par une égalité puis par une correspondance de la forme $x \longmapsto \ldots$.

a. x a pour image $4x-5$ par la fonction f.

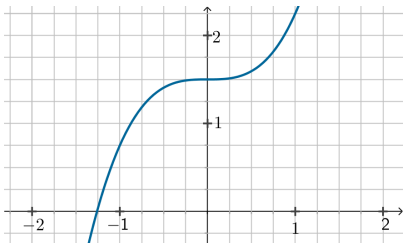
b. L'image de z par la fonction g est $z(z+1)$.

c. Par la fonction h, $-3x$ est l'image de x.

d. Par la fonction r, t a pour image $2t-5t^2$.

e. La fonction k associe, à tout nombre x, le nombre $3(x-2)$.

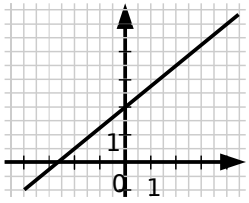
28 Voici une représentation graphique d'une fonction h :



Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-1.25		-1	
$h(x)$		1.5		1.25

29 Voici une représentation graphique d'une fonction f :



a. Que vaut $f(1)$?

b. Déterminer :

i. L'ordonnée à l'origine

ii. l'image de -2 par f

iii. l'image de 2 par f

iv. $f(-1)$

e. Déterminer l'o.o. et Z_f graphiquement.

f. Donner le tableau de signes de f.

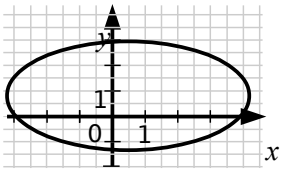
Exercices d'entraînement

30 Dans chaque cas, expliquer pourquoi on ne peut pas trouver une fonction qui, à x, associe y :

a.

x	-2	1	0	2	-1	1
y	-4	3	-3	5	-3	4

b.



31 Le tableau suivant est un tableau de valeurs correspondant à une fonction f.

x	-12	-2	3,5	4	5
$f(x)$	-2	-1.5	-1	3,5	-2

a. Quelle est l'image de 5 par la fonction f ?

b. Quel nombre a pour image -1 par la fonction f ?

c. Dans chaque cas, indiquer, d'après le tableau, la (ou les) préimage(s) du nombre donné par la fonction f.

i 3,5 ii -2 iii 2

32 Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x}$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-3	-1		
$f(x)$			-0,1	8

b. Quel nombre n'a pas d'image par f ?

33 Dans chaque cas, déterminer si possible l'image de -2, 0 et 8 par la fonction réelle f définie par :

a. $f(x)=-3x+24$

b. $f(x)=x^2-4$

c. $f(x)=\sqrt{x-3}$

d. $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$

34 On considère la fonction f définie par $f(x)=3x-1$. Parmi les 5 points suivants, quels sont ceux qui appartiennent à la représentation graphique de f ? $A(0;-1)$, $B(-11;-34)$, $C(-1;-4)$, $D(10;25)$, $E(-3;-11)$.

35 Voici une représentation graphique d'une fonction f :

Déterminer l'o.o., $\mathcal{Z}_f$ et le tableau de signes de la fonction suivante puis déterminer les valeurs de x pour lesquelles :

a. $f(x)$ est nulle

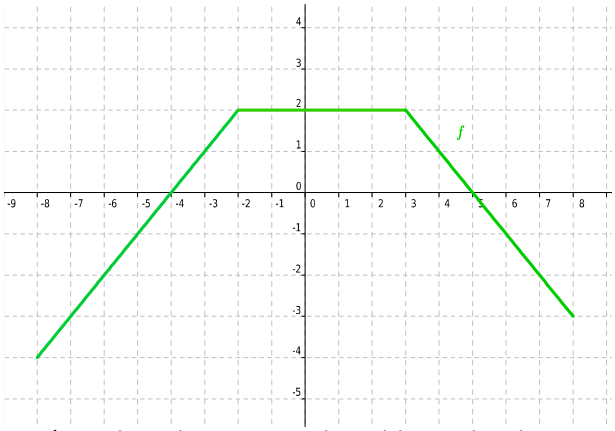
b. $f(x)$ est strictement négative

c. $f(x)$ est négative

d. $f(x)$ est strictement positive

e. $f(x)$ est positive

36 Voici une représentation graphique d'une fonction f :



Déterminer l'o.o., $\mathcal{Z}_f$, le tableau de signes, l'image de 4 et les préimages de -1, 3 et 2.

Voir la théorie 6 à 8

Domaine de définition

37 Déterminer le domaine de définition des fonctions réelles f définies par :

a. $f(x)=\sqrt{-x}$

b. $f(x)=\sqrt{x+1}$

c. $f(x)=\frac{2}{x}$

d. $f(x)=\sqrt{5-x}$

e. $f(x)=\frac{2}{-5x+6}$

f. $f(x)=\frac{-2}{x^2}$

g. $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{4-x}$

Voir la théorie 9

Fonctions élémentaires

38 Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=-\frac{1}{x}$

39 Représenter graphiquement la fonction f définie par $f(x)=-|-x|$

40 Dans chaque cas, représenter graphiquement la fonction f définie par :

a. $f(x)=|2x|$

b. $f(x)=-\sqrt{x}$

c. $f(x)=-3x^2$

d. $f(x)=\frac{x^3}{10}$

e. $f(x)=x^{-2}$

f. $f(x)=x^5$

Voir la théorie 10

Modéliser

41 Pour aller au cinéma, Sylvie a acheté une carte d'abonnement à 30 CHF. A chaque séance, elle paie alors 12 CHF (au lieu de 19). Elle assiste à n séances.

a. Exprimer sa dépense totale avec abonnement D en fonction de n et sa dépense totale sans abonnement D' en fonction de n.

b. Interpréter graphiquement.

c. Estimer graphiquement le nombre de séances à partir duquel il devient avantageux de prendre un abonnement.

42 Un virus se répand dans une région de 100'000 habitants. Après t jours, le nombre de personnes infectées est donné par $N(t)=\frac{50000t}{t+5}$.

a. Déterminer le nombre de personnes infectées après 2 jours, 5 jours, 10 jours.

b. Interpréter graphiquement.

c. Discuter la pertinence de ce modèle.

43 Une firme fabrique des pièces mécaniques. Le coût de production (en francs) de x pièces est donné par $C(x)=1000+\frac{x}{2}$. Le revenu mensuel (en francs) obtenu suite à la vente de x pièces est lui donné par $R(x)=0.01\,x(x+200)$.

a. Quel est domaine de définition des fonctions C et R ?

b. Quel est le domaine des valeurs intéressantes pour ce problème pour les fonctions C et R ?

c. Représenter graphiquement les fonctions C et R et interpréter.

d. Déterminer une fonction P donnant le profit mensuel en fonction de x.

e. Quel est le domaine de définition et le domaine des valeurs intéressantes pour ce problème pour P ?

f. Quel est le profit mensuel si la firme vend 0 pièces en un mois ? 200 pièces ? 300 pièces ?

g. Interpréter graphiquement.

h. Déterminer graphiquement combien la firme doit vendre de pièces pour réaliser un profit nul, puis vérifier par un calcul.

i. Représenter graphiquement la fonction P et interpréter.

j. Commenter ce modèle.

Voir la théorie 11

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

44 Traduire chaque phrase par une égalité:

a. Par la fonction g, $-5{,}3$ est l'image de 6.

b. 2,5 a pour image 4,2 par la fonction f.

c. L'image de 3 par la fonction h est 7.

d. Par la fonction p, -4 a pour image $-6{,}5$.

e. L'image de 5 par la fonction m est nulle.

45 Traduire chaque notation par une phrase contenant le mot « image » et par une égalité.

a. $f: 7 \longmapsto -17$

b. $g: -5 \longmapsto 3{,}2$

c. $h: x \longmapsto -4x^2$

d. $v: x \longmapsto -3$

Exercices d'entraînement

46 Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction g :

x	−0,5	−0,1	0	0,7	0,9	1,1	1,3
$g(x)$	5	2	1	−0,1	−4	5	3,4

Recopier et compléter les égalités suivantes :

a. $g(-0{,}1) = \ldots$

b. $g(\ldots) = 1$

c. $g(0{,}9) = \ldots$

d. $g(\ldots) = -4$

e. $g(0{,}7) = \ldots$

f. $g(\ldots) = 5$

47 Déterminer le domaine de définition des fonctions f définies par :

a. $f(x)=3x+2$

b. $f(x)=\sqrt{x}$

c. $f(x)=\sqrt{x+5}$

d. $f(x)=\dfrac{5}{x+3}$

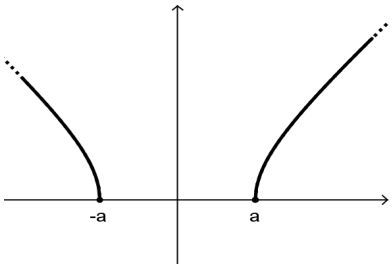
e. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$

f. $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

g. $f(x)=\sqrt{x^2}$

h. $f(x)=(\sqrt{x})^2$

48 Laquelle des quatre fonctions ci-dessous ce graphique représente-t-il ? Justifier la réponse sans utiliser la calculatrice.



$f(x)=\sqrt{x^2-a^2}$ $\qquad$ $g(x)=\dfrac{1}{a^2-x^2}$

$h(x)=(x-a)(x+a)$ $\qquad$ $j(x)=\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}$

49 On considère le programme de calcul :

i Choisir un nombre ;

ii Ajouter 6 à ce nombre ;

iii Multiplier le résultat par le nombre de départ ;

iv Ajouter 9 au résultat.

a. Quel nombre obtient-on si l'on choisit 2 comme nombre de départ ? Donner le résultat sous la forme du carré d'un nombre.

b. Même question avec 5.

c. On note x le nombre choisi au départ et on appelle f la fonction qui, au nombre x, associe le résultat du programme précédent. Quelles sont les images de 2 et de 5 par la fonction f ?

d. Exprimer, en fonction de x, l'image de x par la fonction f. Donner le résultat sous la forme du carré d'un nombre.

e. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	2	5	0	−4	−8	2,5
$f(x)$						

f. Donner une préimage de 1 par f.

g. Représenter graphiquement la fonction f pour x entre – 14 et 8.

h. En utilisant le graphique, quels nombres peut-on choisir au départ pour obtenir 81 comme résultat ?

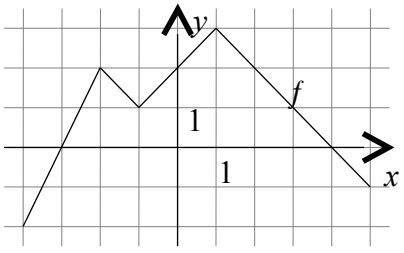
50 Soit f la fonction définie par $f(x)=3x-5$.

a. Le point $P(3;y)$ appartient à la représentation graphique de f. Calculer y.

b. Le point $K(x;-1)$ appartient à la représentation graphique de f. Calculer x.

c. Représenter graphiquement f et indiquer les points P et K.

51 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie pour $x\in[-4;5]$:



À l'aide de cette représentation graphique :

a. Déterminer $f(-2)$;

b. Déterminer l'ensemble des zéros de f ;

c. Déterminer l'ordonnée à l'origine de f ;

d. Déterminer les valeurs de x telles que $f(x) = 1$;

e. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = -x$;

f. Déterminer un nombre qui a quatre préimages par f.

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

42

a. $g(6) = -5{,}3$

b. $f(2{,}5) = 4{,}2$

c. $h(3) = 7$

d. $p(-4) = -6{,}5$

e. $m(5) = 0$

43

a. 7 a pour image -17 par la fonction f. $f(7) = -17$.

b. -5 a pour image 3,2 par la fonction g. $g(-5) = 3{,}2$.

c. Par la fonction h, x a pour image $-4x^2$. $h(x) = -4x^2$.

d. -3 est l'image de x par la fonction v. $v(x) = -3$.

44

a. $g(-0{,}1) = 2$

b. $g(0) = 1$

c. $g(0{,}9) = -4$

d. $g(0{,}9) = -4$

e. $g(0{,}7) = -0{,}1$

f. $g(1{,}1) = 5$ ou $g(-0{,}5) = 5$

45

a. $D_f = \mathbb{R}$

b. $D_f = \mathbb{R}_+$

c. $D_f = [-5 ; \infty[$

d. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

e. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

g. $D_f = \mathbb{R}$

h. $D_f = \mathbb{R}_+$

46 La fonction f car $D_f = \mathbb{R} \setminus]-a ; a[$. (Les autres fonctions ont des domaines de définition qui ne correspondent pas à celui de la fonction représentée.)

47

a. $25 = 5^2$

b. $64 = 8^2$

c. 2 a pour image 25 par la fonction f et 5 a pour image 64 par cette même fonction.

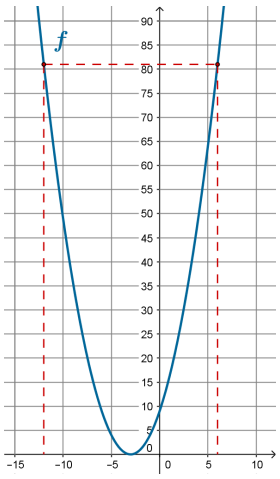
d. $f(x) = (x + 3)^2$

a.

x	2	5	0	-4	-8	2,5
$f(x)$	25	64	9	1	25	30,25

e. Les préimages de 1 par f sont -4 et -2. On note $f^{-1}(1) = \{-4 ; -2\}$.

f.



b. Par lecture graphique, on peut estimer que 81 a pour préimages -12 et 6.

48

a. $y = 4$

b. $x = 4/3$

49

a. $f(-2)=2$

b. $Z_f=\{-3;4\}$

c. $f(0)=2$

d. $f^{-1}(1)=\{-2{,}5 ; -1 ; 3\}$

e. $S=[-2 ; -1]$

f. 1,5

Bilan

« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques »

Blaise Pascal, mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français (1623-1662)

A savoir en fin de chapitre

Repères, points, milieu, distance, pente

✔ représenter des points dans un repère, lire les coordonnées de points dans un repère ;

✔ déterminer les coordonnées du point milieu entre deux points ; calculer la distance entre deux points ; calculer la pente entre deux points ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 14

Fonctions

✔ fonction, fonction réelle, différentes façons de considérer une fonction (expression algébrique, tableau de valeurs, représentation graphique) ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 15 à 25

Images, préimages, courbe représentative, o.o., zéros, tableau de signes

✔ différence entre f, $f(x)$ et courbe représentative (graphe) ;

✔ étant donnée l'expression algébrique d'une fonction f, calculer des images, déterminer l'ordonnée à l'origine, tracer une courbe représentative ;

✔ étant donnée la représentation graphique d'une fonction, lire des images et préimages, déterminer o.o. et ensemble des zéros, construire un tableau de signe et l'utiliser pour répondre à l'aide d'intervalles à des questions concernant le signe de la fonction ;

Voir la théorie 6 à 8 et les exercices 26 à 36

Domaine de définition

✔ déterminer le domaine de définition d'une fonction simple f ;

Voir la théorie 9 et l'exercice 37

Fonctions élémentaires

✔ fonctions élémentaires (constante, identité, carré, racine carrée, inverse, cube, valeur absolue, ...) : représentations graphiques ;

Voir la théorie 10 et les exercices 38 à 40

Modéliser

✔ savoir modéliser des situations « simples » à l'aide de fonctions ;

Voir la théorie 11 et les exercices 41 à 43

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch04