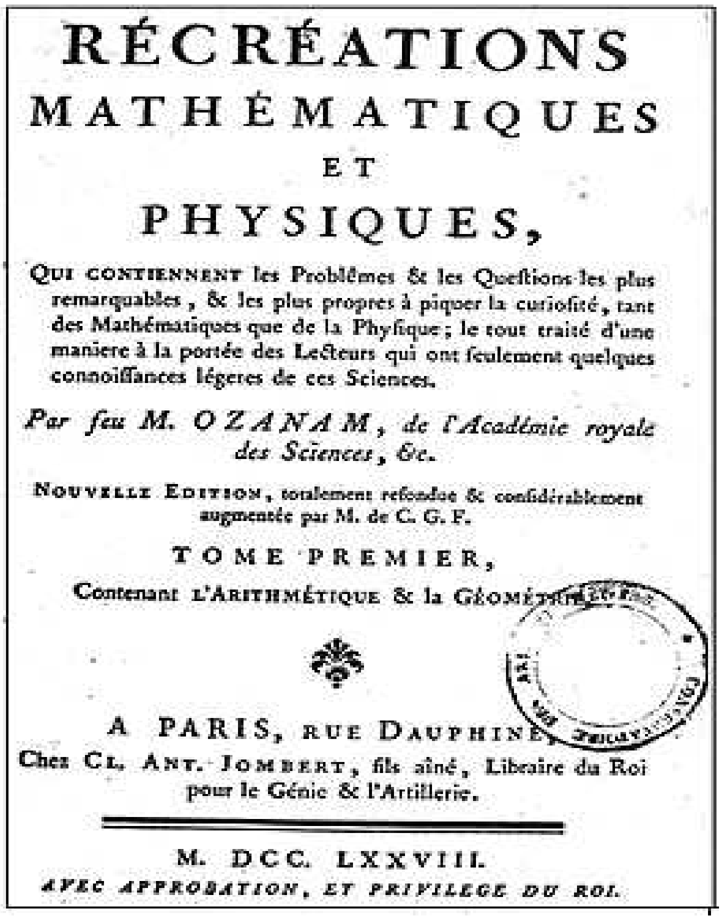
Chapitre 03 - Argumenter



RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES
ET
PHYSIQUES,

QUI CONTIENNENT les Problêmes & les Queſtions les plus remarquables, & les plus propres à piquer la curioſité, tant des Mathématiques que de la Phyſique; le tout traité d'une maniere à la portée des Lecteurs qui ont ſeulement quelques connoiſſances légeres de ces Sciences.

Par feu M. OZANAM, de l'Académie royale des Sciences, &c.

NOUVELLE EDITION, totalement refondue & conſidérablement augmentée par M. de C. G. F.

TOME PREMIER,

Contenant L'ARITHMÉTIQUE & la GÉOMÉTRIE.

A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CL. ANT. JOMBERT, fils aîné, Libraire du Roi pour le Génie & l'Artillerie.

M. DCC. LXXVIII.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILEGE DU ROI.

Ouvrage de Jacques Ozanam, publication posthume en 1778

Problème

Choisir un nombre *A* à trois chiffres. Construire le nombre *B* qui intervertit dans *A* le chiffre des centaines avec celui des unités. Soustraire le plus petit nombre du plus grand entre *A* et *B*; on obtient un nombre *C*. Construire le nombre *D* qui intervertit dans *C* le chiffre des centaines avec celui des unités. Additionner *C* et *D*.
Effectuer cette suite d'instructions avec plusieurs nombres.
Enoncer une conjecture quant au résultat, puis la démontrer.

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Traduire d'une expression littérale

Bien avant les émissions télévisées de vulgarisation scientifique, d'authentiques savants ont eu la volonté de rapprocher de leur science, en douceur, un public non spécialisé. Dans le domaine des mathématiques, on voit apparaître au XVII siècle déjà des ouvrages en français qui proposent des problèmes et des énigmes «pour instruire aussi bien que pour divertir». Leur succès est immédiat. De très nombreux amateurs éclairés font leurs délices de problèmes arithmétiques ou géométriques nécessitant quelques raisonnements astucieux : cela devient un divertissement à la mode ! Parmi les auteurs recherchés, on trouve Jacques Ozanam (1640-1717), mathématicien dont la réputation lui valut d'être membre de l'Académie Royale des Sciences. Dans ses « Récréations Mathématiques et Physiques » (1694), Ozanam propose, par exemple, des méthodes «pour deviner un nombre que quelqu'un aura pensé» ou pour en découvrir d'autres possédant des propriétés particulières. En voici quelques exemples classiques :

a. «Si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, et qu'on ajoute le même nombre au triple de la somme, on aura une seconde somme qui se termine par 3»

b. «Si on ôte l'unité du triple d'un nombre quelconque, et qu'on ajoute le même nombre au triple du reste, on aura une somme qui se termine par 7»

c. «Pour trouver deux nombres dont les carrés fassent ensemble un nombre carré,multipliez deux nombres quelconques ; le double de leur produit sera l'un des deux nombres qu'on cherche, et la différence de leurs carrés sera l'autre nombre ».

Au début de son ouvrage, l'auteur nous a prévenus : « Comme je ne prétends pas proposer des problèmes difficiles, je ne prétends pas aussi en donner les démonstrations pour ne pas embarrasser le Lecteur que je veux divertir ». Il se contente donc de justifier chacune de ses nombreuses propositions par un ou deux exemples numériques...

Reprendre les problèmes de Jacques Ozanam et, contrairement à lui, utiliser des lettres pour poser ses problèmes et les interpréter.

2 [Activité] Traduire en expression littérale

a. Un nombre qui se termine par 1

b. Un multiple de 33

c. Un nombre impair

d. Un nombre, somme de trois nombres pairs consécutifs

3 [Activité] Traduire en expression littérale

1. On s'intéresse aux trois principales **identités remarquables carrées** :

a. Les énoncer à l'aide du calcul littéral.

b. Les énoncer en langue française.

2. Compléter :

a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ est la .... de deux ....

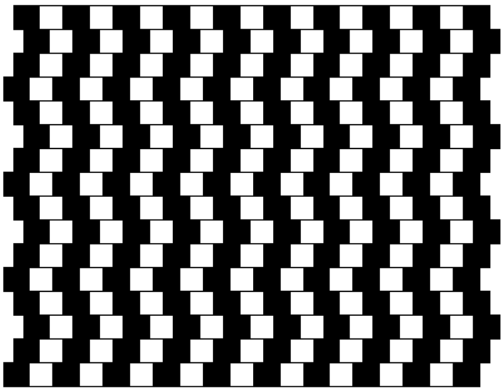
b. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ ....

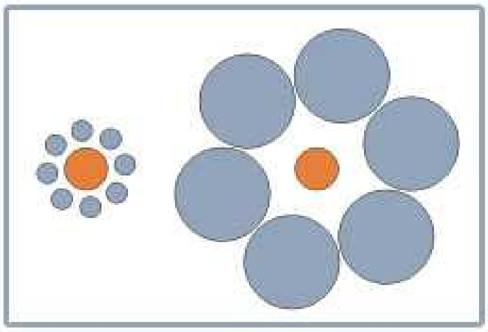
c. .... est l'inverse d'une somme

d. $x^3 \cdot y^3$ ....

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 10

4 [Activité] Il faut se méfier de ce que l'on voit





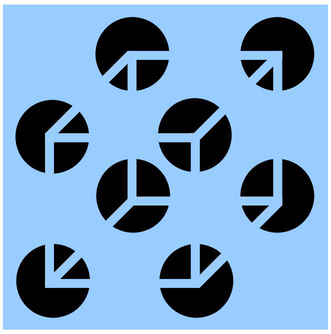
Illusion de Titchener

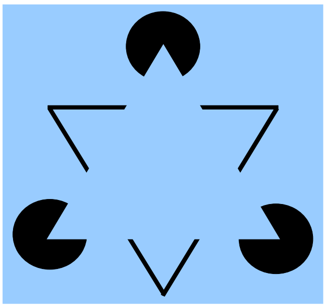
1. Comment semblent positionnées les lignes de la première image les unes par rapport aux autres ?

2. Que dire de la taille des deux disques oranges de la deuxième image ?

5 [Activité] Il faut se méfier de ce qui n'existe pas

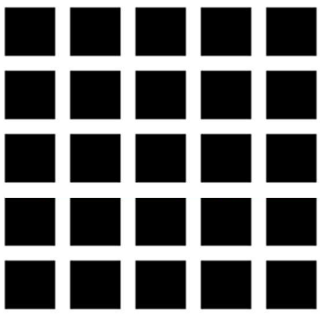
1. Que voit-on ?

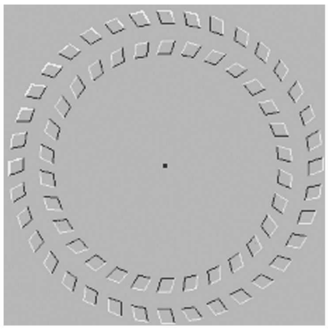




Illusion de Kanizsa

2. On considère les deux figures ci-dessous :





Baingio Pinna

a. Qu'aperçoit-on à l'intersection des lignes de la figure de gauche ? Est-ce réel ?

b. Bien fixer le point au centre de la figure de droite tout en s'approchant et en s'éloignant de la page. Un effet surprenant se produira...

6 [Activité] Il faut se méfier des évidences

1. Résoudre les problèmes suivants :

a. Une bouteille d'huile d'olive coûte 6.-. L'huile d'olive coûte 5.- de plus que la bouteille. Combien coûte la bouteille vide ?

b. Le prix d'un meuble est diminué de 50 % puis augmenté de 50 %. Quel est alors son prix?

2. Que peut-on observer à propos du *triangle de Penrose* ci-contre ?

3. * Faire une recherche sur les œuvres du dessinateur M.C. Escher et en particulier sur les lithographies intitulées « *Belvédère* », « *Montée et descente* », « *Mouvement perpétuel* ». Ces dessins paraissent normaux au premier coup d'œil mais en y regardant de plus près, que constate-t-on ?

7 [Activité] Prévoir l'avenir...

Choisir un nombre, ajouter 25 à ce nombre, multiplier le résultat par 2, retrancher le double du nombre choisi au départ, diviser le résultat par 50.

a. Effectuer cette suite d'instructions avec plusieurs nombres.

b. Énoncer une conjecture quant au résultat, puis la démontrer.

8 [Activité] Prendre position

Voici une conjecture : « Quelque soit le nombre entier naturel n que je choisisse, l'expression n^2+n+41 est un nombre premier »

a. Écrire cette conjecture sous forme d'**implication**.

b. Est-elle vraie ? Justifier.

9 [Activité] (In)validation d'une conjecture

Soit n un nombre entier naturel. On considère les conjectures suivantes :

a. Un n pair peut s'écrire sous la forme $4k$ ($k \in \mathbb{N}$)

b. $4n$ est un nombre pair.

c. $2n$ + 3 est un multiple de 3.

d. $1000n$ + 56 est un multiple de 8.

Les écrire sous forme d'implications puis déterminer si elles sont vraies ou fausses en justifiant.

Voir la théorie 3 à 5 et les exercices 11 à 18

10 [Activité] Logique

On considère quatre cartes recto-verso, chacune comportant une lettre d'un côté et un chiffre de l'autre. On voit ceci : $\boxed{A}$ $\boxed{R}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$

Alexandre affirme: « S'il y a une voyelle d'un côté d'une carte, alors il y a un chiffre pair de l'autre ».
Quelles cartes faut-il retourner au minimum pour pouvoir vérifier si cette affirmation est vraie ?

11 [Activité] Des astronautes

Voici deux affirmations qu'on accepte comme vraies :

i une réunion des astronautes du monde entier a lieu à Paris ;
ii les astronautes américains portent tous une chemise rouge.

Lire et répondre aux questions qui suivent en justifiant :

a. A l'aéroport, quelqu'un porte une chemise rouge. Est-ce un astronaute américain ?

b. A côté de lui, quelqu'un a une chemise blanche. Est-il astronaute américain ?

c. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe. Porte-t-il une chemise rouge ?

d. Dans le hall, un astronaute américain a un manteau. Porte-t-il une chemise rouge ?

12 [Activité] Réciproque, contraposée

On considère les conjectures suivantes où n désigne un nombre entier naturel :

a. Conjecture : Si n est un multiple de 9, alors n est un multiple de 3.

b. Conjecture : Si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 9.

c. Conjecture : Le carré d'un nombre pair est toujours un nombre pair.

d. Conjecture : Si n est pair, alors n^2 est pair

e. Conjecture : Si n^2 est pair, alors n est pair

f. Conjecture : n^2 est pair $\Leftrightarrow$ n est pair

Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

13 [Activité] Pas dans n'importe quel sens

1 A partir des deux expressions (ou phrases) données, construire des implications qui soient vraies en utilisant les symboles ⇒, ⇐ ou ⇔ :

a. « $x = 3$ et $y = 2$ » et « $x + y = 5$ »

b. « $x^2 = 4$ » et « $x = 2$ »

c. « $x > 0$ et $y < 0$ » et « $x\,y < 0$ »

d. « $x^2 + y^2 = 0$ » et « $x = 0$ et $y = 0$ »

e. « $xy = 1$ » et « $x = 1$ et $y = 1$ »

f. « d_1 et d_2 sont deux droites perpendiculaires » et « d_1 et d_2 sont deux droites sécantes »

2 On considère les conjectures suivantes.

a. Ecrire la réciproque et la contraposée :

i Si je prends mon bain, alors je suis trempé(e).

ii ($n \in \mathbb{N}$) Si n est divisible par 7, alors n se termine par 7.

iii ($n \in \mathbb{N}$) Si n est pair, alors $(n+1)$ est un nombre impair.

iv Si $x + y = 0$, alors ($x = 0$ et $y = 0$).

b. Déterminer si les conjectures, réciproques et contraposées énoncées ci-dessus sont vraies ou fausses.

Voir la théorie 6 et les exercices 19 à 27

1 [A savoir] Des nombres en lettres

Définitions

☐ Une **variable** (numérique) est une lettre ou un symbole qui représente n'importe quel nombre. En général, on précise de quel type de nombre il s'agit – par exemple les entiers naturels; si ce n'est pas le cas, c'est le **contexte** qui l'indique implicitement. Le plus souvent, il s'agit des nombres réels.

☐ Une **constante** (numérique) est une lettre ou un symbole qui représente un nombre fixé.

☐ Une **expression** (algébrique) est le résultat obtenu en faisant subir à au moins une variable et éventuellement à des constantes et/ou nombres des additions, multiplications, soustractions et divisions, en les élevant à des puissances ou en extrayant des racines.

Exemples

☐ π est une constante, appelée « pi », toujours égale à 3,14159265... ; elle est définie comme le rapport constant entre le périmètre et le diamètre d'un cercle.

☐ $2xy+5y$, $\sqrt{2x^7}$ et $\dfrac{25y+\sqrt{5}x}{x-18}$ sont des expressions.

☐ $2xy+5y=2$ n'est pas une expression, à cause du symbole « = ».

Remarques

☐ Une lettre peut aussi bien représenter un nombre positif qu'un nombre négatif.

☐ Les occurrences différentes de la même lettre représentent toujours le même nombre ou la même expression.

2 [A savoir] Outils de base

Définitions

☐ Un entier relatif n est **pair** si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

☐ Un entier relatif n est **impair** si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 2k + 1$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

☐ Soient n et m deux entiers relatifs. m est un **multiple** de n [ou n est un **diviseur** de m] si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $m=k\cdot n$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

☐ Deux entiers sont **consécutifs** si et seulement si ils sont de la forme k et $k+1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Théorème

☐ Un entier positif n **se termine par le chiffre *i***, avec $i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ si et seulement si il est de la forme $n=10\cdot k+i$, avec $k \in \mathbb{N}$ [et non $k \in \mathbb{Z}$!]

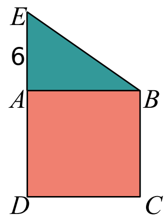
☐ Un entier positif n **se termine par les deux chiffres *ij*** (dans cet ordre), avec $i, j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ si et seulement si il est de la forme $n=100\cdot k+10\cdot i+j$, avec $k \in \mathbb{N}$.

Traduire en expression littérale

Exemple : déterminer un nombre n qui se termine par 7, un nombre m multiple de 61 et un nombre k somme de deux nombres impairs consécutifs

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors on a $n=10 \cdot k+7$ se termine par un 7, $m=61 \cdot k$ est un multiple de 61 et $(2 \cdot k+1)+(2 \cdot k+3)$ est somme de deux nombres impairs consécutifs.

Traduire une situation en expression algébrique



Exemple : sur le schéma, $ABCD$ est un carré et $\Delta\, ABE$ est un triangle rectangle en A tel que $\overline{AE}=6$ cm. Tous les points sont distincts. Exprimer l'aire du carré $ABCD$ ainsi que celle du triangle $\Delta\, ABE$ par rapport à la longueur du côté du carré $ABCD$.

Étape n°1 : choisir l'inconnue

Soit x la mesure en cm du côté du carré $ABCD$.
Comme les points sont distincts, alors $x>0$.
Donc $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=x$.

On repère la grandeur inconnue parmi celles exprimées dans l'énoncé.
On la note x.

Étape n°2 : utiliser l'inconnue pour exprimer les grandeurs demandées

$$\mathrm{A}_{ABCD}=\overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$\mathrm{A}_{ABCD}=x \cdot x=x^2$$

$$\mathrm{A}_{ABE}=\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE}}{2}$$

$$\mathrm{A}_{ABE}=\frac{x \cdot 6}{2}=3\,x$$

On exprime les informations données dans l'énoncé en fonction de x.

Voir les exercices 1 à 10

3 [A savoir] Définitions, axiomes, conjectures

Définitions

En mathématiques, une **définition** est un énoncé qui introduit un nouveau mot ou symbole décrit à l'aide d'autres mots ou symboles dont le sens a déjà été précisé. Une définition ne démontre rien, elle donne une dénomination à des objets mathématiques nouveaux.

Exemple : définition d'un nombre pair.

« Un entier relatif n est pair s'il peut s'écrire sous la forme $n= 2k$ où k est un entier relatif. » On définit le nouveau mot « pair » en admettant que « entier relatif » et des écritures algébriques comme « $n=2k$ » ont déjà été définies préalablement.

Du grec "axioma : j'estime, je crois vrai", l'**axiome** est une vérité admise sans démonstration et sur laquelle se fondent les théories mathématiques.

Exemple

En géométrie, le fait que par un point donné passe une unique parallèle à une droite donnée est un axiome. On l'accepte comme vrai sans démonstration.

Le **principe du tiers exclu** exprime qu'une proposition est soit vraie, soit fausse.

Remarque: c'est à Aristote (-384/-322) qu'on doit les fondements de notre raisonnement hypothético-déductif (voir par exemple http://serge.mehl.free.fr/chrono/Aristote.html)

Une **conjecture** est une supposition fondée sur des apparences, non (encore) démontrée, et qui est soumise à la perspicacité des mathématiciens. En principe, lorsqu'on énonce une conjecture, on pense qu'elle est vraie, mais on peut se tromper ! En mathématiques, une conjecture est **soit vraie, soit fausse**, selon le **principe du tiers-exclu**.
Lorsqu'elle est vraie, cela signifie qu'elle est toujours vraie, sans exception. Sinon elle est fausse.

Exemple

« Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers» est une célèbre conjecture, dite conjecture de Goldbach (mathématicien russe, 1690-1764) énoncée dans une lettre à Euler le 7 juin 1742 et qui n'est toujours pas démontrée à ce jour.

4 [A savoir] Implication

Définitions

Une **implication** est un énoncé mathématique de la forme **Si … , alors …**. Elle est composée d'une ou plusieurs **hypothèses**, c'est à dire les conditions nécessaires pour que le résultat énoncé se réalise, et d'une ou plusieurs **conclusions**, le résultat lui-même.
On note plus simplement une implication sous la forme: [...hyp...] ⇒ [...concl...]

Exemple : la conjecture de Goldbach.

« **Si** n est un nombre pair différent de 2, **alors** n s'écrit comme somme de deux nombres premiers». On peut aussi écrire : « n est un nombre pair et $n\neq 2$ ⇒ n s'écrit comme somme de deux nombres premiers»
« n est un nombre pair, $n\neq 2$ » est l'hypothèse et « n s'écrit comme somme de deux nombres premiers» la conclusion.

Remarque : autant que possible, on écrit une conjecture sous forme d'une implication.

Remarque : il faut bien faire la différence dans l'utilisation du terme « hypothèse » en mathématique, où il s'agit d'élément(s) qu'on accepte afin d'en déduire une ou des conclusions, et « hypothèse » en sciences expérimentales, où il s'agit de la vérifier expérimentalement !

5 [A savoir] (In)validation d'une conjecture

Définitions

Un **contre-exemple** est un exemple qui contredit une conjecture et qui permet donc de démontrer qu'elle est fausse, puisque alors pas toujours vraie !
<u>Attention</u>: des exemples qui vérifient une conjecture, même nombreux, ne suffisent pas à démontrer que la conjecture est vraie (sauf si la conjecture décrit un nombre de cas fini qu'il est possible de tous vérifier).

Exemple

$n=41$ est un contre-exemple à la conjecture qui affirme que n^2+n+41 est premier pour tout n entier naturel. En effet, $41^2+41+41=41(41+1+1)$ n'est pas premier.

Une **démonstration** est un raisonnement établissant la véracité d'une conjecture à partir des axiomes posés, des définitions connues et des résultats déjà démontrés.

Exemple : démontrer la conjecture « Si n est un nombre impair, alors n^2 est impair »

Démonstration :

	n est un nombre impair	← C'est l'hypothèse
donc	$n=2k+1$ où k est un entier relatif	← Par définition connue de « nombre impair »
donc	$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$	← On utilise des résultats d'algèbre déjà démontrés
puis	posons $k'=2k^2+2k$, d'où $n^2=2k'+1$	← On renomme une expression
or	k' est un entier relatif	← Car k l'est, et somme et produit d'entiers relatifs sont des entiers relatifs
donc	n^2 est impair	← Par définition connue de « nombre impair »

Un **théorème** est une conjecture qui a pu être démontrée à l'intérieur d'un système mathématique. Un théorème découle des axiomes qu'on a posé auparavant, ainsi que des définitions connues et d'éventuels autres théorèmes préalablement démontrés. Un théorème est composé d'une ou plusieurs **hypothèses**, et d'une ou plusieurs **conclusions**. Il arrive souvent que certaines hypothèses ne soient pas exprimées spécifiquement dans l'énoncé du théorème, mais qu'elles soient implicites compte-tenu du contexte ; on parle alors d'**hypothèses implicites**.

Exemple : le théorème de Fermat

« Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3, alors il n'existe aucun a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ » est un célèbre théorème énoncé dans la première moitié du XVIIe siècle et démontré seulement en 1994 par Andrew Wiles.

« Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 3 » est l'hypothèse ;

« alors il n'existe aucun a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ » est la conclusion.

Si on avait énoncé le théorème ainsi: « Si $n\geq 3$, alors il n'existe aucune a, b et c entiers relatifs tels que $a^n+b^n=c^n$ », le fait que n doive être entier naturel aurait été considéré comme une hypothèse implicite.

Théorèmes

- ☐ Soit n un entier relatif. On a : n est pair $\Leftrightarrow$ n^2 est pair.
- ☐ Soit n un entier relatif. On a : n est impair $\Leftrightarrow$ n^2 est impair.

Voir les exercices 11 à 18

6 [A savoir] Réciproque, contraposée

Définitions

La **réciproque** d'une implication s'obtient en permutant hypothèse(s) et conclusion(s).
Il n'y a pas de lien entre la véracité d'un énoncé et de sa réciproque : les deux peuvent être vrais ensemble, faux ensemble, ou l'un être vrai et l'autre faux. Si un énoncé et sa réciproque sont tous les deux vrais, on parle d'**équivalence**, ce qu'on note [...] ⇔ [...].

Exemple : écrire la réciproque de « Si n est un nombre pair, alors n^2 est pair »

La réciproque de « Si n est un nombre pair, alors n^2 est pair » est « Si n^2 est un nombre pair, alors n est pair ». Dans ce cas, on peut montrer que les deux sont vraies.

On peut donc écrire : « n est pair ⇔ n^2 est pair »

Exemple : écrire la réciproque de « Si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 »

L'implication « Si n est un multiple de 6, alors n est un multiple de 3 » est vraie. Sa réciproque « Si n est un multiple de 3, alors n est un multiple de 6 » est fausse.

La **contraposée** d'une implication s'obtient en permutant hypothèse(s) et conclusion(s) et en prenant leurs négations.
Il y a un lien entre la véracité d'un énoncé et de sa contraposée : les deux sont soit vrais ensemble, soit faux ensemble. On peut alors choisir de démontrer la contraposée d'une conjecture plutôt que la conjecture elle-même.

Exemple : écrire la contraposée de « Si n^2 est pair , alors n est pair »

La contraposée de « Si n^2 est un nombre pair, alors n est pair » est « Si n n'est pas un nombre pair, alors n^2 n'est pas pair ».

Dans ce cas particulier, il est plus facile de démontrer cette contraposée pour obtenir la véracité de la conjecture de départ que de démontrer directement cette conjecture.

Voir les exercices 19 à 27

Exercices d'entraînement

Traduire

1 Compléter :

a. $\left(\frac{1}{a}\right)^3$ ....

b. .... est le quotient de deux racines

c. $a^2 - b^2$ ....

d. .... est la somme de deux produits

2 Traduire en expressions algébriques les données suivantes. La variable x représente un nombre entier.

a. trois multiples de 17 consécutifs

b. le carré de la somme du produit de 2 par x et de 3

c. la différence des carrés de la différence du double de x et de 5 et de la somme de x et de 3

d. le quadruple de la somme du centuple de l'unité et d'un nombre pair

e. le carré d'un nombre pair

3

a. Trouver les nombres entiers de trois chiffres multiples de 5 dont la somme des chiffres est 21.

b. Trouver tous les nombres pour lesquels le quotient et le reste sont égaux dans la division euclidienne par 5.

4 La grande base d'un trapèze est le double de sa petite base. Sa hauteur a la même mesure que sa petite base. Déterminer l'expression algébrique réduite de son aire.

5 L'aire d'un rectangle est de $4a^2 + 8a$. Trouver sa longueur, si la largeur mesure $2a$.

6 Un rectangle a une largeur de x cm et un longueur de $(x + 6)$ cm. On lui enlève un carré de 3 cm de côté. Quelle est l'expression algébrique réduite qui représente l'aire de la figure restante ?

7 Rechercher les étymologies des mots « algèbre », « variable », et « constante ».

8 Pour chacune des expressions algébriques ci-dessous, donner l'expression en français qui correspond :

a. $8+(2+x)$

b. $8-(2+x)$

c. $8-(2-x)$

d. $8(2+x)$

e. $8(2-x)$

f. $8(2x)$

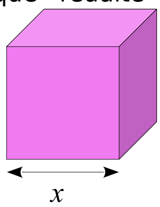
g. $8-2x$

h. $8x-2x$

i. $8(-2x)$

j. $8x(-2x)$

9 On considère le cube ci-contre. Exprimer à l'aide d'une expression algébrique réduite contenant la variable x :



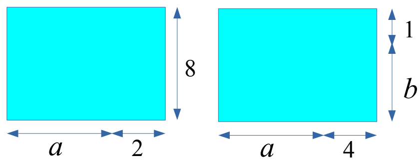
a. son volume,

b. l'aire totale de ses faces,

c. la longueur totale de ses arêtes,

d. la longueur d'une diagonale d'une face.

10 On considère les figures suivantes :



a. Exprimer l'aire des figures suivantes à l'aide d'une expression algébrique réduite contenant a et/ou b. Exprimer chacune de ces aires de deux manières différentes, l'une étant un produit, l'autre étant une somme.

b. Dans chacune de ces situations, quelles sont les valeurs possibles pour la variable a ?

c. b peut-elle être plus grande que a ?

Voir la théorie 1 à 2

Implication, conjectures

11 On considère les programmes de calcul suivants:

Programme A :	Programme B :
Choisir un nombre ;	Choisir un nombre ;
Effectuer le produit de la différence du double du nombre et de 8 par la somme du nombre et de 3 ;	Calculer son carré ;
Enoncer le résultat.	Lui soustraire la somme du nombre de départ et de 12 ;
	Multiplier le résultat par 2 ;
	Enoncer le résultat.

a. Tester ces deux programmes avec comme nombres de départ 4 ; − 1 et 0.

b. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

c. Démontrer cette conjecture.

12 Soit n un nombre entier naturel. On considère les conjectures suivantes. Les écrire sous la forme « Si ..., alors ... ». Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. $n + 3$ est un nombre pair.

b. $5n + 2$ est un multiple de 3.

c. $3n + 3$ se termine par 3.

d. $3n + 3$ est un multiple de 3.

e. $n + 4$ est un nombre pair.

f. $n^2 – 4$ n'est pas un nombre premier (pour $n>4$).

13 On considère les conjectures suivantes. Les écrire sous la forme « Si ..., alors ... ». Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

b. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.

c. La somme d'un nombre pair et d'un nombre premier impair est un nombre premier

d. Un nombre qui est multiple de 9 et de 12 est un multiple de 108.

e. La différence des carrés de deux nombres entiers situés de part et d'autre d'un multiple de 3 est divisible par 12.

14 Conjecture : Si x est un entier, alors $x^{11}-1=(x-1)(x^{10}+x^9+\ldots+x^3+x^2+x+1)$

a. Cette conjecture est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

b. En déduire que $101^{11}-1$ est divisible par 100.

15 Conjecture : La différence des carrés de deux nombres pairs consécutifs est un multiple de 4.

Cette conjecture est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

16 Que penser des valeurs de $n^3 – n$ pour n un entier relatif ? Sont-elles toujours multiple d'un nombre entier connu ?
Énoncer une conjecture qui soit vraie et la démontrer.

17 Un entier relatif étant choisi, démontrer la conjecture suivante :« Le produit de l'entier qui le précède par l'entier qui le suit, augmenté de 1 est le carré de cet entier. ».

18 Calculer, observer, conjecturer, prouver !

a. 1^2-0^2 ; 2^2-1^2 ; 3^2-2^2 ; 4^2-3^2 ; ...

b. 3^2-1 ; 5^2-1 ; 7^2-1 ; 9^2-1 ; ...

c. $2^2+3^2+6^2$; $3^2+4^2+12^2$; $4^2+5^2+20^2$; ...

Voir la théorie 3 à 5

Réciproque-contraposée

19 On considère les implications suivantes :

(I) Tous les corbeaux sont noirs.

(II) S'il pleut, mon jardin est mouillé.

(III) Tous les Suisses aiment le chocolat.

a. Identifier les hypothèses et conclusions de chacune de ces implications.

b. Écrire sous la forme « Si ..., alors ... ».

c. Donner la réciproque.

d. Donner la contraposée.

e. Si les implications sont vraies, que dire des réciproques et contraposées ?

20 On suppose l'implication suivante vraie :

Si j'aime le jazz, alors j'en écoute souvent.

a. Vous constatez que je n'écoute pas souvent du jazz. Vous dites alors que je n'aime pas le jazz.

b. Vous constatez que j'écoute souvent du jazz. Vous dites alors que j'aime le jazz.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

21 Pour x et y des réels, donner la contraposée et la réciproque des implications :

a. $x < y$ implique $x^3 < y^3$

b. $x^2 < x$ implique $x < 1$

c. $x^2 < 0$ implique $x < 0$

22 On considère la conjecture suivante: « Si n est un nombre entier naturel, alors $n^2+n+131$ est premier». Est-elle vraie ou fausse? Justifier précisément.

23

a. Peut-on trouver trois entiers impairs consécutifs dont la somme vaut 66 ? Justifier.

b. Peut-on trouver cinq nombres impairs consécutifs dont la somme est égale à 405 ? Justifier.

24 Considérons la conjecture : « Un multiple de 10 est également multiple de 30 ».

a. L'écrire sous la forme d'une implication.

b. Est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

c. Enoncer sa réciproque .

d. Cette réciproque est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

e. Enoncer la contraposée de la conjecture.

f. Cette contraposée est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

25 Considérons la conjecture : « La différence des carrés de deux entiers quelconques consécutifs est impaire ».

a. Parmi les choix ci-dessous, quelle est l'implication correspondant à la conjecture ?

i. Si n et m sont consécutifs, alors n^2 et m^2 sont impairs.

ii. Si n - m est impair, alors n^2 et m^2 sont consécutifs.

iii. Si n et m sont consécutifs, alors m^2 - n^2 est impair.

iv. Si n et m sont consécutifs, alors $(m^2 – n)^2$est impair.

v. Si $(m^2 – n)^2$ est impair, alors n et m sont consécutifs.

b. Démontrer que la conjecture est vraie.

26 On énonce la conjecture suivante : « Si p est un nombre premier, alors $3p$ est impair. »

a. Cette conjecture est-elle vraie ou fausse ?

b. Énoncer la réciproque de cette conjecture.

c. La réciproque (énoncée au point b.) est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

27 On considère la conjecture suivante : « Le produit d'un multiple de 8 et d'un nombre entier terminant par 5 est un multiple de 10 ».

a. Tester cette conjecture avec un exemple.

b. Démontrer cette conjecture.

Voir la théorie 6

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

28 Traduire en expression littérale les données suivantes :

a. la différence de la somme et du produit de deux nombres

b. trois multiples de 4 consécutifs

c. un nombre, différence des carrés de deux nombres consécutifs

d. un nombre, somme de trois nombres impairs consécutifs

e. un nombre qui laisse un reste de 4 lorsqu'on le divise par 5.

29 Traduire les expressions suivantes en expressions mathématiques :

a. la différence de deux carrés d'entiers pairs consécutifs

b. le carré de la différence de deux entiers pairs consécutifs

30 Quelle expression algébrique réduite représente la moyenne arithmétique de deux nombres entiers naturels pairs consécutifs ?

31 Par quels nombres est divisible la somme de cinq entiers naturels consécutifs ?

32 Par quels nombres est divisible la somme de m entiers naturels consécutifs (où m est un entier naturel)?

33 On dispose d'un carré en carton de 12 cm de côté. A chaque coin, on découpe un petit carré de x cm de côté. Donner la formule algébrique réduite qui exprime le volume du parallélépipède rectangle qu'on obtient en pliant le carton ainsi découpé.

34 Exprimer par des formules l'aire et le périmètre de l'étiquette recouvrant exactement le côté d'une boîte de conserve cylindrique dont la hauteur et le diamètre de la base mesurent $2x$ cm.

35 Soit n un nombre entier naturel. Écrire les conjectures suivantes sous forme d'une implication :

a. $n^2 + 1$ est un nombre impair.

b. $2n(2n + 2)$ est un multiple de 4.

c. $n + 5$ se termine par 5.

d. $6n + 3$ est un nombre premier.

e. L'expression $(2n + 1)^2 - 1$ est un multiple de 8.

Sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

36 Indiquer pour chacune des conjectures suivantes si elle est vraie ou fausse et justifier :

a. La somme de quatre nombres naturels consécutifs est un multiple de 4.

b. La somme de deux impairs consécutifs est un multiple de 4.

c. Le carré d'un nombre pair est un multiple de 4.

d. La somme de deux nombres naturels consécutifs est impaire.

e. Le produit de deux nombres naturels consécutifs est impair.

f. Le produit de deux impairs consécutifs est impair.

g. La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 8.

h. Le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 6.

37 On suppose l'implication suivante vraie :

S'il pleut quand je sors, alors je prends mon parapluie.

a. Vous constatez je n'ai pas mon parapluie. Vous dites alors que il ne pleuvait pas quand je suis sortie.

b. Vous constatez que j'ai mon parapluie. Vous dites alors que il pleuvait quand je suis sortie.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

38 On suppose l'implication suivante vraie :

S'il fait noir, alors je ne peux pas lire un livre.

a. Vous constatez que je ne lis pas de livre. Vous dites alors qu'il fait noir.

b. Vous constatez que je lis un livre. Vous dites alors qu'il ne fait pas noir.

Dans chacun des cas, indiquer s'il s'agit de la réciproque ou de la contraposée.

39 Nombres divisibles par 7

a. 35 et 6300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.

b. En utilisant la question **a.**, démontrer que 6335 est divisible par 7.

c. Démontrer dans le cas général que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors la somme $x+y$ est divisible par 7. Énoncer cette conjecture sous forme si...alors... et identifier clairement hypothèses et conclusions.

d. En écrivant le nombre 6349147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6349147 est un multiple de 7.

e. Écrire un nombre entier de 15 chiffres qui soit divisible par 7.

f. Énoncer un critère de divisibilité par 7.

g. Démontrer le même résultat qu'en **b.** en utilisant ce critère de divisibilité par 7.

h. Démontrer ce critère de divisibilité par 7.

40 Démontrer que si un entier est multiple de 30 alors il est aussi multiple de 3 et de 5.

RÉPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

28

a. $(a+b)-a \cdot b$, a et b réels

b. $4n$; $4(n+1)$; $4(n+2)$, n entier

c. $(n+1)^2-n^2=2n+1$, n entier

d. $(2n+1)+(2n+3)+(2n+5)$, n entier

e. $5n+4$, n entier

29

a. $(2n+2)^2-(2n)^2=...=4n+4$, n entier

b. $((2n+2)-2n)^2=4$, n entier

Exercices d'entraînement

30 $\frac{2n+(2n+2)}{2}=\frac{4n+2}{2}=\frac{2(2n+1)}{2}=2n+1$

31 $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$
$=5n+10=5(n+2)$
Ce nombre est divisible par 5 [par déf de « multiple de ...»]

32
$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+(m-1))$
$=m\cdot n+(1+2+\ldots+(m-1))=m\cdot n+\frac{(m-1)\cdot m}{2}$
$=m\cdot[n+\frac{m-1}{2}]$
Remarque : on a utilisé le résultat suivant :

$$(1+2+3+\ldots+k)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

Ce nombre est donc divisible par m [par déf de « multiple de ...»] pour autant que m soit impair [car alors $\frac{m-1}{2}$ est un entier].

33 $V=4x(6-x)^2$

34 $A=4\pi x^2$ $\quad P=4x(\pi+1)$

35

a. Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux. **d.** Faux. **e.** Vrai.

36

a. Faux. **c.** Vrai. **e.** Faux. **g.** Vrai.

b. Vrai. **d.** Vrai. **f.** Vrai. **h.** Vrai.

37

a. contraposée. **b.** réciproque.

38

a. réciproque. **b.** contraposée.

39 Nombres divisibles par 7

a. $35=5\cdot7$ et $6300=900\cdot7$, donc ils sont multiples de 7 [par déf de «diviseur de ...»]

b. $6335=6300+35=900\cdot7+5\cdot7=7\cdot(5+900)$ ...

c. Si [hyp] x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7, alors [concl] leur somme $x+y$ est divisible par 7.

Démonstration :

- x et y sont divisibles par 7 [par hyp]

  donc il existe k et m entiers tels que $x=7\cdot k$ et $y=7\cdot m$ [par déf de « multiple de 7 »]

- $x+y=(7\cdot k)+(7\cdot m)=7\cdot(k+m)$

  donc $x+y$ est bien multiple de 7 [par déf de « multiple de 7 »]

d. $6349147=6300000+49000+140+7$

e. $777777777777777=7\cdot111111111111111$

f. Critère de divisibilité par 7 : « un nombre est divisible par 7 si et seulement si le résultat de la somme du nombre de dizaines (à ne pas confondre avec chiffre des dizaines) et du quintuple du chiffre des unités est divisible par 7 ».

g. Ici : $633+5\cdot5=658=7\cdot94$.

h. Démonstration :

• soit n un entier ; on l'écrit comme $n=10k+m$, où k et m sont des chiffres entre 0 et 9. k est ainsi le nombre de dizaines et m celui des unités

• supposons que la somme du nombre de dizaines et du quintuple du chiffre des unités est divisible par 7 : $k+5\cdot m=7\cdot p$, avec $p\in\mathbb{Z}$ [par déf de « mult de »], c'est-à-dire $k=7\cdot p-5\cdot m$

• on a :
$n=10k+m=10(7\cdot p-5\cdot m)+m$
$=70p-50m+m=70p-49m=7(10p-7m)$

qui est un mult de 7 [par déf de « mult de »]

Remarque : le critère est énoncé comme une équivalence ⇔ ; ici on a démontré que le sens qui nous intéresse, soit « si $k+5\cdot m$ est un multiple de 7, alors n est un multiple de 7. On pourrait montrer la réciproque également de façon sensiblement identique.

40 Démonstration :

• x mult de 30 [par hyp], donc il existe k entier tel que $x=30\cdot k$ [par déf de « mult. De 30»]

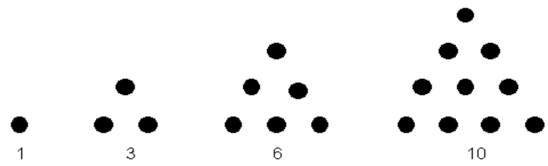
• on peut écrire : $x=3\cdot(10\cdot k)=5\cdot(6\cdot k)$

• où $10\cdot k$ et $6\cdot k$ sont des entiers,

• donc x est bien multiple de 3 et de 5 [par déf de « multiple de ...»]

1 *Nombres triangulaires*

a. Voici les quatre premiers **nombres triangulaires :**



i. Calculer le 1000e nombre triangulaire.

ii. Trouver une formule permettant de tous les calculer.

iii. Facultatif: faire une recherche pour identifier d'autres nombres « géométriques »

b. Nombre de droites

2 Déterminer le nombre maximal de régions que l'on délimite sur un plan en y traçant:

a. deux droites

b. trois droites

c. quatre droites

d. 10 droites

e. 100 droites

3 Pour calculer $6 \cdot 8$, Jérôme a vu son professeur de mathématiques opérer de la façon suivante:

> i. Pour faire 6, avec la main droite, je lève 1 doigt.
> ii. Pour faire 8, avec la main gauche, je lève 3 doigts.
> iii. J'additionne les doigts levés des deux mains : 1 + 3 = 4.
> iv. Je multiplie le nombre de doigts baissés à droite par le nombre de doigts baissés à gauche : 4 • 2 = 8.
> v. Le résultat est 48.

a. Vérifier que cette astuce fonctionne pour $7 \cdot 9$ et pour $6 \cdot 6$ (l'éventuelle retenue de la multiplication s'ajoute à la somme des doigts levés).

b. Quels sont les calculs que l'on peut réaliser ainsi?

c. Démontrer cette méthode de calcul de $a \cdot b$ avec les doigts pour a et b compris entre 5 et 9.

2 Calculer, observer, formuler une conjecture, et la prouver lorsque c'est possible:

a.
$9 \cdot 9+8=$
$99 \cdot 9+8=$
$999 \cdot 9+8=$

b.
$6^2-5^2=$
$56^2-45^2=$
$556^2-445^2=$
$5556^2-4445^2=$

3 Soit cinq entiers consécutifs a, b, c, d et e. La somme $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ est-elle toujours un multiple de 5 ? Justifier.

4 **Définition**
Un nombre entier naturel *n* est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et *n*. Tout nombre entier naturel possédant plus de deux diviseurs est **composé**. Le nombre 1 est appelé une **unité** et n'est ni composé, ni premier.

a. Énumérer l'ensemble des nombres premiers plus petit que 100.

b. Les nombres suivants sont-ils premiers : 187 ; 389 ; 841 ; 899 ?

c. Élaborer un algorithme permettant de prouver qu'un nombre donné est premier.

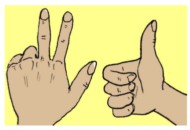
d. Questions :

i. Existe-t-il une infinité de nombres premiers ?

ii. Si oui, comment se répartissent-ils ?

iii. Existe-t-il une formule permettant de tous les énumérer ?

iv. Y a-t-il un algorithme 'rapide' qui permet de les identifier ?



v. Quelles relations existe-t-il entre les nombres composés et les nombres premiers ?

5 Faire une recherche autour du personnage d'Aristote, de la logique aristotélicienne et de son impact sur les mathématiques.

« Il y a trois sortes de mathématiciens,
ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas »

Mathématicien inconnu

A savoir en fin de chapitre

Traduire

✔ vocabulaire lié aux expressions littérales : variable, constante, expression ;

✔ définition et caractérisation algébrique des nombres pairs, impairs, multiples, se terminant par « ... », consécutifs ;

✔ traduire en expression littérale des informations données en français ;

✔ exprimer à l'aide d'une expression algébrique une situation donnée ;

✔ écrire en français une expression littérale ;

✔ les convention(s) implicite(s) ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 10

Implication, conjecture

✔ les principes de la construction mathématique : axiome – définition – conjecture – démonstration – théorème – contre-exemple ; principe du tiers exclu ;

✔ implications, hypothèses (parfois implicites), conclusions ; écrire une conjecture sous la forme d'une implication lorsque c'est possible ;

✔ identifier les hypothèses et conclusions dans l'énoncé d'une implication ;

✔ utiliser un contre-exemple pour invalider une conjecture ; démontrer qu'une conjecture est vraie ;

Voir la théorie 3 à 5 et les exercices 11 à 19

Réciproque, contraposée

✔ contraposée et réciproque d'une implication, équivalence ; énoncer réciproques et contraposées d'une implication donnée ;

✔ équivalence entre une implication et sa contraposée; indépendance entre une implication et sa réciproque.

Voir la théorie 6 et les exercices 19 à 27

Compléments

Fiches résumé – vidéos – exercices en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch03