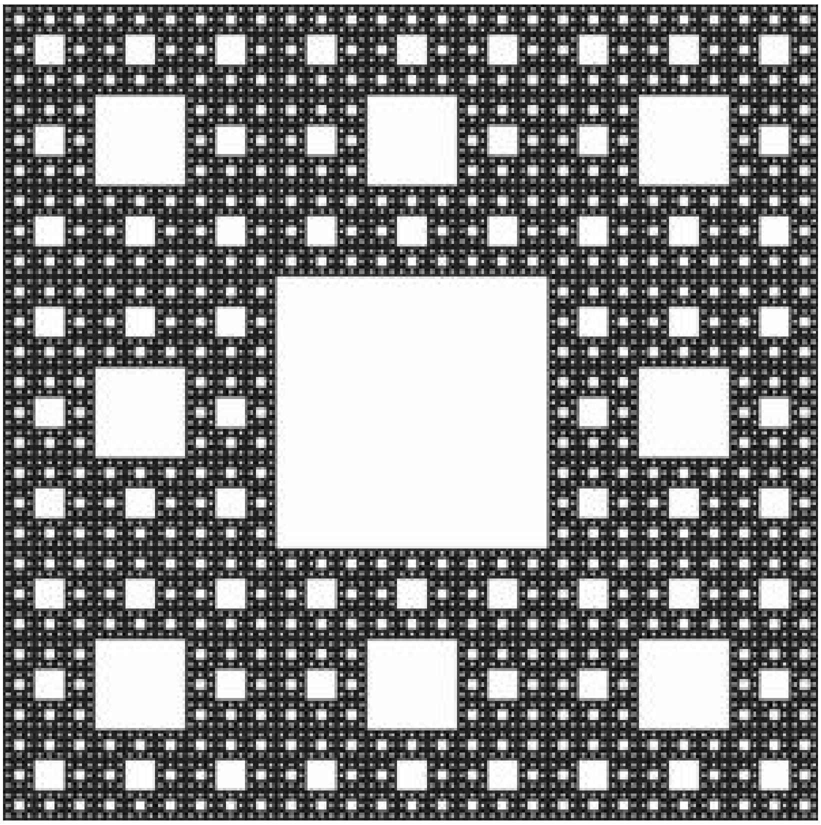
Chapitre 02 - Ensembles



Le carré de Sierpinski

Problème

C'est dans une contrée reculée que se passe cette histoire. Le roi Dromadus premier, ruiné et déchu, possède comme unique fortune un fils, un chameau et 3000 dattes. Dans un ultime effort pour sauver son royaume, il confie à son fils l'expédition suivante : amener le chameau et les dattes à l'autre bout du royaume, c'est à dire à une distance de 1000km de l'endroit où nous nous trouvons. (C'est là que se trouve le seul acheteur intéressé).
Comme si cela ne suffisait pas, le chameau de Dromadus premier n'est pas vraiment bien portant et il ne peut porter plus de 1000 dattes sur le dos. Pire encore, il mange une datte par kilomètre parcouru. Comment faire alors pour amener le plus de dattes possible à destination ?

1 [Activité] Notations ensemblistes

Écrire avec des notations ensemblistes :

a. L'ensemble comprenant les nombres 2, 5, 11, -2 et 1.

b. L'ensemble comprenant les nombres entiers compris entre 22 et 2222.

c. L'ensemble des entiers relatifs négatifs.

d. L'ensemble des nombres rationnels strictement positifs

2 [Activité] Symboles

Compléter par un symbole adéquat :

a. $\mathbb{N}$ ...... $\mathbb{Z}$

b. -33 ...... $\mathbb{N}$

c. {33} ...... $\mathbb{N}$

d. {3;4;5} ∪ {5} = ...

e. {3;4;5} ∩ {5} = ...

f. {3;4;5} \{5} = ...

g. {3;4;5;6;7}......{6;7;8;9} = {6;7}

h. $\mathbb{N}$ ...... $\mathbb{Z}$ = $\mathbb{Z}$

i. {3;4;5;6;7}......{5;6;7;8;9} = {3;4}

3 [Activité] Notations ensemblistes - suite

1. Transcrire les phrases suivantes à l'aide des notations ensemblistes :

a. « L'ensemble des nombres rationnels est inclus dans l'ensemble des nombres réels »

b. « Moins trois quarts n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs »

2. Quelles sont les significations des différentes notations suivantes : 0 ; {0} ; $\emptyset$; $\{\emptyset\}$?

4 [Activité] Union, intersection et différence

1. Soient A et B les deux ensembles suivants : A = {-5;3;4;6;8;9} et B = {2;3;4;8;10}.

Déterminer $A\cup B$, $A\cap B$, $B\setminus A$ et $A\setminus B$.

2. Trouver les ensembles C et D sachant que :

a. $C\cup D=\{1;2;3;4;5\}$, $C\cap D=\{2;3;4\}$, $1\notin D\setminus C$ et $5\notin C\setminus D$.

b. $C\cup D=\{2;3;4;5\}$ et $C\cap D=\{2;4\}$. Donner toutes les possibilités.

Voir la théorie 1 et les exercices 1 à 3

5 [Activité] Diagrammes de Venn

1. Pour chaque item, recopier le **diagramme de Venn** ci-dessous et hachurer ce qui correspond aux opérations indiquées :

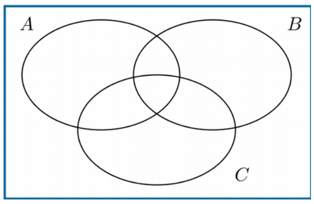
a. $(A \cap B) \cup C$

b. $A \cap (B \cup C)$

c. $(A \cap B) \setminus C$

d. $(B \cup C) \setminus (A \cap B)$

e. $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$



2. Représenter les différents ensembles de nombres par un diagramme de Venn, et y placer les nombres suivants :

$-\frac{2}{5}; \sqrt{255}; (-1)^{999}; 2^{-6}; 3,\overline{4}; \sqrt{256}; \frac{5}{0}; 0,\overline{9}$

Voir la théorie 2 et l'exercice 4

6 [Activité] Intervalles réels

1. Écrire avec des notations ensemblistes :

a. L'ensemble comprenant les nombres réels strictement compris entre 2 et 7.

b. L'ensemble des nombres réels plus grands ou égaux à -2 et strictement inférieurs à 6.

c. Transcrire la phrase suivante à l'aide des notations ensemblistes : « L'ensemble des réels inférieurs ou égaux à $\frac{\pi}{2}$ »

2. On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 8\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x\}$

a. Représenter A et B sur une même droite réelle.

b. Ecrire A et B sous forme d'**intervalles**.

c. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$; donner les réponses sous forme $\{x \in \mathbb{R} \mid \ldots\}$ et sous forme d'intervalles.

3. Soient A et B les deux ensembles suivants : A =]-5;3] et B = [0;5[.

a. Représenter A et B sur une même droite réelle.

b. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$; donner les réponses sous forme $\{x \in \mathbb{R} \mid \ldots\}$ et sous forme d'intervalles.

Voir la théorie 3 et les exercices 5 à 10

1 [A savoir] Ensembles

Définitions et notations

Soient A et B deux ensembles :

☐ On note $x \in A$ pour indiquer que x est un élément de A et on dit que x **appartient à** A.

☐ On note $x \notin A$ pour indiquer que x n'est pas un élément de A et on dit que x **n'appartient pas à** A.

☐ $\varnothing$ ou $\{\}$ représente l'**ensemble vide** (ne pas confondre avec $\{\varnothing\}$!).

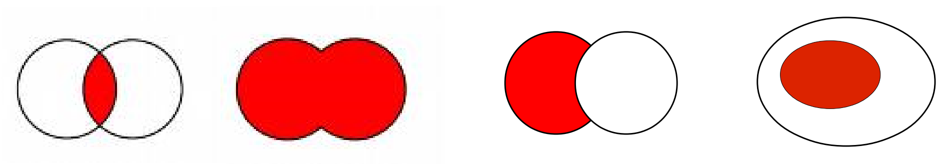
☐ On note $A \subseteq B$ pour indiquer que tous les éléments de A appartiennent aussi à B ; il se lit « **A est inclus dans B** ».Quand il existe au moins un élément de B qui n'appartient pas à A, on écrira plutôt « **A est strictement inclus dans B** » et on note $A \subset B$. On peut aussi utiliser $A \nsubseteq B$ quand « **A n'est pas inclus dans B** »

☐ $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B ; il se lit « **A intersection B** » ou « **A inter B** ».

☐ $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou non exclusif, c'est à dire que $A \cup B$ contient aussi les éléments qui sont dans A et dans B) ; il se lit « **A union B** ».

☐ $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais pas à B ; il se lit « **A diff B** » ou « **A sans B** ».

Illustration



intersection *union* *différence* *inclusion*

Soit A un ensemble de nombres :

☐ $A^* = A \setminus \{0\}$ est l'ensemble de tous les éléments de A sauf zéro.

☐ A_+ est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont positifs ou nul.

☐ A_- est l'ensemble de tous les éléments de A qui sont négatifs ou nul.

Ensembles particuliers de nombres

☐ $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$ est **l'ensemble des entiers naturels**.

☐ $\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;3;...\}$ est **l'ensemble des entiers relatifs**.

☐ $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\}$ est **l'ensemble des nombres rationnels**, qui se lit comme « l'ensemble des fractions $\frac{p}{q}$ telles que $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ ». **La barre verticale $\mid$ se lit donc « tel que ».**

On a aussi : $\mathbb{Q} = \{x \mid \text{le développement décimal de } x \text{ est soit fini, soit infini périodique}\}$

☐ $\mathbb{R}$ est **l'ensemble des nombres réels**.

On a aussi : $\mathbb{R} = \{x \mid \text{le développement décimal de } x \text{ est quelconque}\}$

Exemples : $\mathbb{N}^* = \{1;2;3;...\}$; $\mathbb{Z}_- = \{...;-3;-2;-1;0\}$; $\mathbb{Z}^*_- = \{...;-3;-2;-1\}$

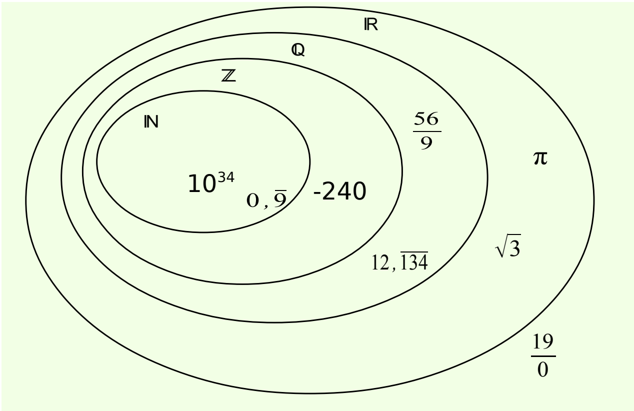
Voir les exercices 1 à 3

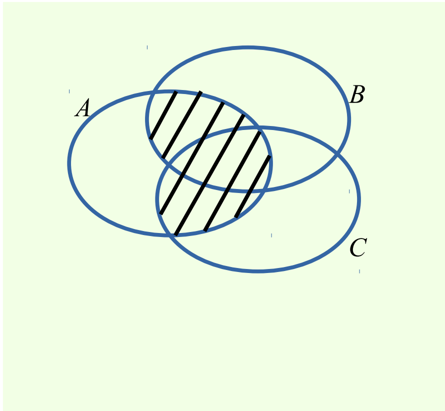
2 [A savoir] Diagrammes de Venn

Un **diagramme de Venn** est une représentation d'un ou plusieurs ensembles par des lignes simples fermées dans lesquelles on représente les éléments en fonction de leurs appartenances. Chaque élément ne peut occuper qu'une seule position, celle qui correspond à sa caractérisation la plus précise.

Exemples

- Placer les nombres suivants dans un diagramme de Venn : $10^{34}; -240; 12,\overline{134}; \sqrt{3}; \frac{56}{9}; 0,\overline{9}; \frac{19}{0}; \pi$
- Hachurer $(A \cap B) \cup (B \cap C)$:





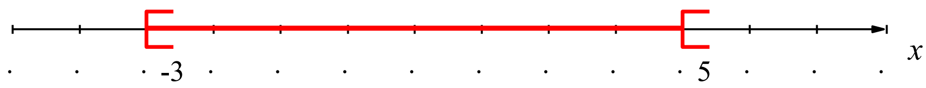
Voir l'exercice 4

3 [A savoir] Intervalles réels

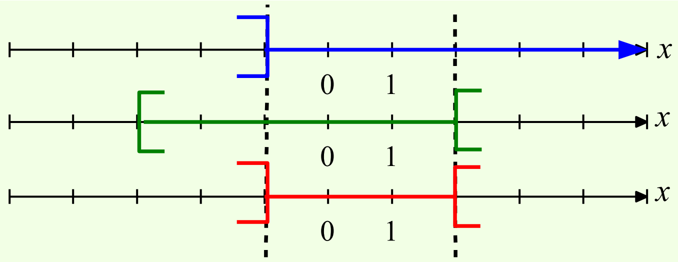
L' **intervalle** [a;b] représente les nombres $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. De même :
- $[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, $]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ et $]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$, $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, etc ...

4 [A savoir] Représenter graphiquement un intervalle réel

Un intervalle se représente graphiquement ainsi ; par exemple pour [-3;5[:



Exemple : Déterminer graphiquement quel intervalle correspond à $]-1;+\infty[\cap [-3;2[$



On représente les deux intervalles.

On utilise la définition de l'opération « intersection » pour visualiser les nombres qui se trouvent dans les deux ensembles.

On note la solution sous forme d'intervalle $]-1;+\infty[\cap [-3;2[=]-1;2[$

Voir les exercices 5 à 10

Exercices d'entraînement

Notations ensemblistes

1 Compléter par un symbole ou la notation adéquat :

a. $\mathbb{Q}$ ...... $\mathbb{N}$

b. $\mathbb{Z} \setminus \{0\} =$ ......

c. -33,33 ...... $\mathbb{N}$

d. $\mathbb{Z}$ ...... $\mathbb{Q}$

e. -33 ...... $\mathbb{Z}$

f. {3;4;5;6;7} ...... {6;7;8;9}={3;4;5;6;7;8;9}

2 Écrire avec les notations ensemblistes :

a. L'ensemble comprenant uniquement les nombres -21;17 et 24.

b. L'ensemble comprenant tous les nombres entiers de -12 à 13.

c. «L'ensemble des nombres naturels est inclus dans l'ensemble des nombres relatifs».

d. «Trois huitièmes n'appartient pas à l'ensemble des nombres entiers relatifs».

3 Soient A={-3;-2;16;18;19} et B={-4;13;14;18;100} deux ensembles :
Déterminer:

a. $A \cup B$ **c.** $B \setminus A$

b. $A \cap B$ **d.** $A \setminus B$

Voir la théorie 1

Diagrammes de Venn

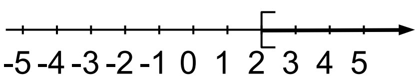
4 Représenter les différents ensembles de nombres par un diagramme de Venn, et y placer les nombres suivants :

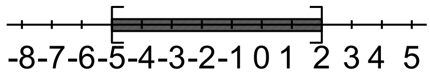
$$-420;\frac{57}{8};2^{333};10^{-6};-29{,}23\overline{64};\sqrt{22};\frac{0}{0};5{,}\overline{9}$$

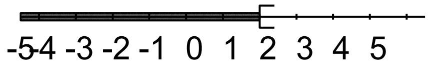
Voir la théorie 2

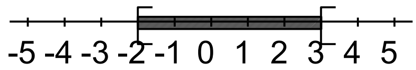
Intervalles

5 Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

a. 

b. 

c. 

d. 

6 Dans ce parc de loisirs, certaines attractions sont réservées à des enfants d'une taille bien précise :

1	2	3	4
Réservée aux enfants de moins de 1,40 m.	Réservée aux enfants d'au moins 1,40 m.	Interdite aux enfants de 1,40 m et moins.	Interdite aux enfants de plus de 1,40 m.

Soit t la taille d'un enfant en mètres. Écrire pour chaque attraction une inégalité traduisant le fait que l'enfant est autorisé à y participer.

7 Soient A et B les deux ensembles suivants : A=]-15;12] et B= [-2;15[

a. Représenter A et B sur une même droite réelle.

b. Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$ et $A \setminus B$.

8 Compléter par un symbole ou la notation adéquat :

a. 1,8 ...... $\mathbb{N}$

b. $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ = ...

c. {-12} ...... $\mathbb{N}$

d. $\mathbb{Z}$ .... $[2;8[$ ={2;3;4;5;6;7}

e. $[1;5[\cup]-3;2[$ = ...

f. $[1;5[\cap]-3;2[$ = ...

g. $[1;5[\setminus]-3;2[$ = ...

h. $]-3;2[\setminus[1;5[$ = ...

9 Écrire avec les notations ensemblistes :

a. L'ensemble comprenant les nombres réels strictement compris entre -4 et 45

b. L'ensemble comprenant les nombres réels plus grands ou égaux à 5 et strictement inférieurs à 46

c. «L'ensemble des réels strictement supérieurs à $\sqrt{2}$.»

d. « L'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à 8».

10 On considère les ensembles suivants :

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant 2 \}$ $E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \}$

$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 5 \}$ $F = \{ x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \}$

$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \}$ $G = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \}$

$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3 \}$ $H = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \}$

a. Les écrire sous forme d'intervalle.

b. Les représenter graphiquement.

c. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $D \cap E$, $E \cap G$, $B \cup E$, $F \cup G$, $A \setminus C$, $D \setminus C$ et $G \setminus H$.

Voir la théorie 3

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

11 Représenter dans un diagramme de Venn les nombres suivants :

$$\left\{4\sqrt{2}; -240; \frac{56}{9}; \pi; 10^{345}; 2^{-3}; 12,\overline{134}; \frac{19}{0}; \sqrt{36}; 2,\overline{9}\right\}$$

12

a. Compléter par le symbole adéquat :

i $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Q}$

ii $\sqrt{-8}$ .... $\mathbb{R}$

iii $3,\overline{9}$ .... $\mathbb{Q}$

iv $3,\overline{9}$ 4

v $\frac{0}{12}$ .... $\mathbb{R}$

vi $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Z}_- = \mathbb{N}$

b. Compléter le tableau suivant:

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$	
B		$[-1; 3]$
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x\}$	
D		$]-4; 1[$

c. Pour ces mêmes ensembles A, B, C et D, déterminer avec la notation adéquate:

i $A \cup B$

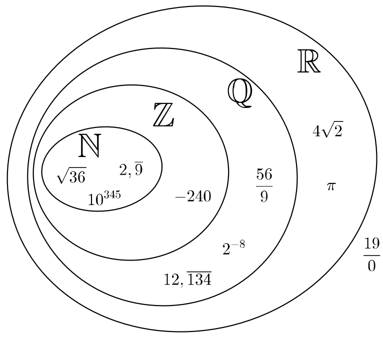
ii $C \cap D$

iii $A \setminus B$

iv $B \cap D$

REPONSES DES EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

11



12

a.

i $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ii $\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$

iii $3,\overline{9} \in \mathbb{Q}$

iv $3,\overline{9} = 4$

v $\frac{0}{12} \in \mathbb{R}$

vi $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_- = \mathbb{N}$

b.

i $[-3; 2[$

ii $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

iii $]1; +\infty[$

iv $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$

c.

i $A \cup B = [-3; 3]$

ii $C \cap D = \emptyset$

iii $A \setminus B = [-3; -1[$

iv $B \cap D = [-1; 1[$

*« L’égalité n’est rien d’autre qu’un concept nécessaire aux mathématiques.
Citez-moi une seule chose, sur cette terre, qui soit égale à une autre »*

*William P. Thurston, mathématicien américain
Médaille Fields 1982 (1946-2012)*

A savoir en fin de chapitre

Notations ensemblistes

- ✔ notion d'ensemble, d'élément d'un ensemble, d'inclusion entre ensembles, d'ensemble vide ;
- ✔ opérations entre ensembles : union, intersection et différence ; effectuer et représenter les opérations entre ensembles : union, intersection, différence ;
- ✔ ensembles de nombres : entiers naturels, entiers relatifs, rationnels, réels et leurs sous ensembles : entiers naturels strictement positifs, entiers relatifs négatifs,... ;
- ✔ traduire du français vers des notations ensemblistes et réciproquement ;

Voir la théorie 1 et les exercices 1 à 3

Diagrammes de Venn

- ✔ représenter des nombres dans des diagrammes de Venn ;

Voir la théorie 2 et l'exercice 4

Intervalles réels

- ✔ droite réelle et intervalles réels (ouverts, fermés) ;
- ✔ représenter des intervalles réels sur la droite réelle.

Voir la théorie 3 et 4 et les exercices 5 à 10

Quelques compléments en ligne

http://www.sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch02