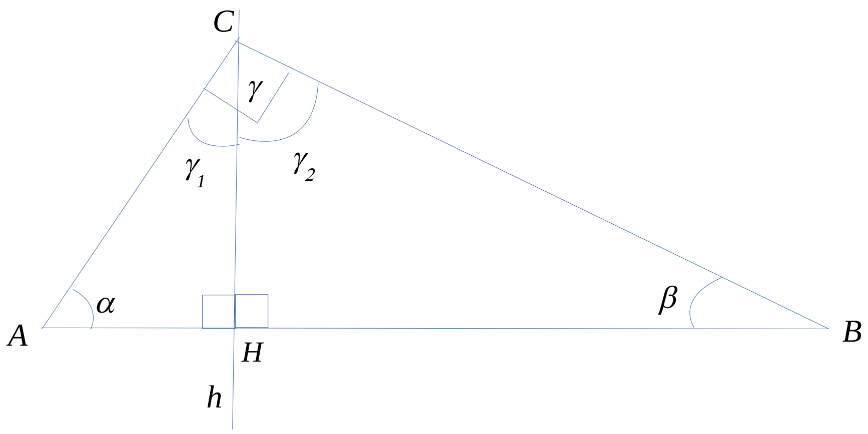
# Ma1 Ch8 : Travail de groupe de fin de chapitre

## Partie III : Un nouveau théorème

Exercice 1 : Théorème de la hauteur

(a) Enoncé : Si $\Delta ABC$ est un triangle rectangle en *C*, *h* la hauteur issue de *C* et $H = [AB] \cap h$ , alors on a : $\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$

(b) Représenter ci-dessous graphiquement la situation du théorème de la hauteur en utilisant les notations proposées dans l'énoncé.




(c) Remplir les [...............] ci-dessous dans la démonstration de ce théorème ; les arguments doivent provenir pour essentiellement de ceux qui sont inclus dans la fiche annexée « Outils de base de la géométrie euclidienne » :

Démonstration :

idée : nommer $\gamma_1 = \widehat{HCA}$ et $\gamma_2 = \widehat{BCH}$ puis comparer $\Delta AHC$ et $\Delta CHB$

- $\widehat{CHB} = 90$ et $\widehat{AHC} = 90$ , car [déf de la hauteur]
- $\gamma = 90°$ , car [hypothèse]

  et $\gamma_1 + \gamma_2 = 90$ , car [définition de $\gamma_1$ et $\gamma_2$ ]

  donc $\gamma_1 + \gamma_2 = 90$ , car [substitution]

  $\Leftrightarrow \gamma_2 = 90 - \gamma_1$ , car [ $-\gamma_1$ ]

  et aussi $\gamma_1 = 90 - \gamma_2$ , car [ $-\gamma_2$ ]
- par ailleurs, on a : $\alpha + \gamma_1 + 90 = 180$ , car [ Thm $\sum \alpha \Delta = 180$ ]

  $\Leftrightarrow \alpha = 90° - \gamma_1$ , car [ $-90 - \gamma_1$ ]

  $\Leftrightarrow \alpha = 90 - [90 - \gamma_2]$ , car [substitution]

  $\Leftrightarrow \alpha = 90 - 90 + \gamma_2$ , car [distributivité]

  $\Leftrightarrow \alpha = \gamma_2$

- par ailleurs, on a : $\beta+\gamma_2+90=180$ , car [ Thm $\sum \alpha\Delta=180$ ]

  $\Leftrightarrow \beta=90°-\gamma_2$ , car [ $-90-\gamma_2$ ]

  $\Leftrightarrow \beta=90-[90-\gamma_1]$ , car [substitution]

  $\Leftrightarrow \beta=\gamma_1$

- on a donc : $\alpha=\gamma_2$ , $\beta=\gamma_1$ et $\widehat{AHC}=\widehat{CHB}=90$

  donc $\Delta AHC \sim \Delta CHB$ , car [déf $\Delta\sim$ ]

- $\overline{AH}$ correspond à $\overline{CH}$ , car [opposés au même angle $\beta=\gamma_1$ dans les deux triangles]

  $\overline{CH}$ correspond à $\overline{BH}$ , car [opposés au même angle $\alpha=\gamma_2$ dans les deux triangles]

  $\overline{AC}$ correspond à $\overline{BC}$ , car [opposés au même angle $\widehat{CHB}=\widehat{AHC}$ dans les deux triangles]

- donc $\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ , car [thm Thalès]

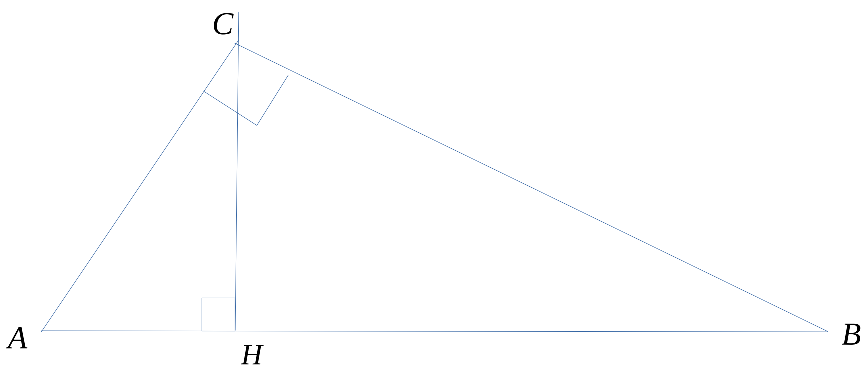
  d'où on retient $\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{BH}}$

  et donc $\overline{AH}\cdot\overline{BH}=\overline{CH}^2$ , car [ $\cdot\overline{AH}$ et $\cdot\overline{CH}$ ]

  *cqfd*

(d) Donner un exemple de votre choix dans lequel ce théorème est utile.

Calculer l'aire de ce triangle dans lequel $\overline{AH}=5\,dm$ et $\overline{HB}=20\,dm$




Réponse :

le thm de la hauteur donne $h^2=5\cdot 20=100$ , donc $h=100\,dm$ , puis

$Aire=\frac{(20+5)\cdot 100}{2}=1250\,dm^2$