Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 1 :

Notions fondamentales	plan, points, (sous)-ensembles de points, appartenance, union, intersection
	droite, demi-droite, segment, surface
Définitions	angle, Déf «α plein», Déf «α plat», Déf «α plat»
	Déf «α compl», Déf «α suppl», Déf «α opp», Déf «α corr», Déf «α alt-int»
	distance entre deux points, longueur, aire, mesure d'un angle
	droites sécantes, parallèles (Déf «dr. par.»), perpendiculaires (Déf «dr. perp.»)
5 axiomes initiaux	*Ax1- Ax2- Ax3- Ax4- Ax5 : …*
Axiome	Ax «α corr»
Théorèmes	Thm «α opp» «Thm α alt-int»

Etape 2 :

Définitions	triangle, côtés opposés / Déf «Δ rectangle» / Déf «Δ isocèle» / Déf «Δ équilatéral»
	polygone, côtés, sommets / quadrilatère (carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze)

Théorèmes non démontrés	Thm «Aires»	Thm «côtés parallélogr.»
	Thm «Δ isocèle»	Thm «Δ équilatéral»

Théorèmes	Thm «ΣαΔ=180»

…

Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 3 :

Définitions	Déf «Δ semblables» / Déf «côtés corr»

Théorèmes	Thm «Thales»
Théorèmes	Thm «contr-Tha»

Théorème non démontré	Thm «récip-Tha»
Théorème non démontré	Thm «contrap-récip-Tha»

...

Etape 4 :

Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

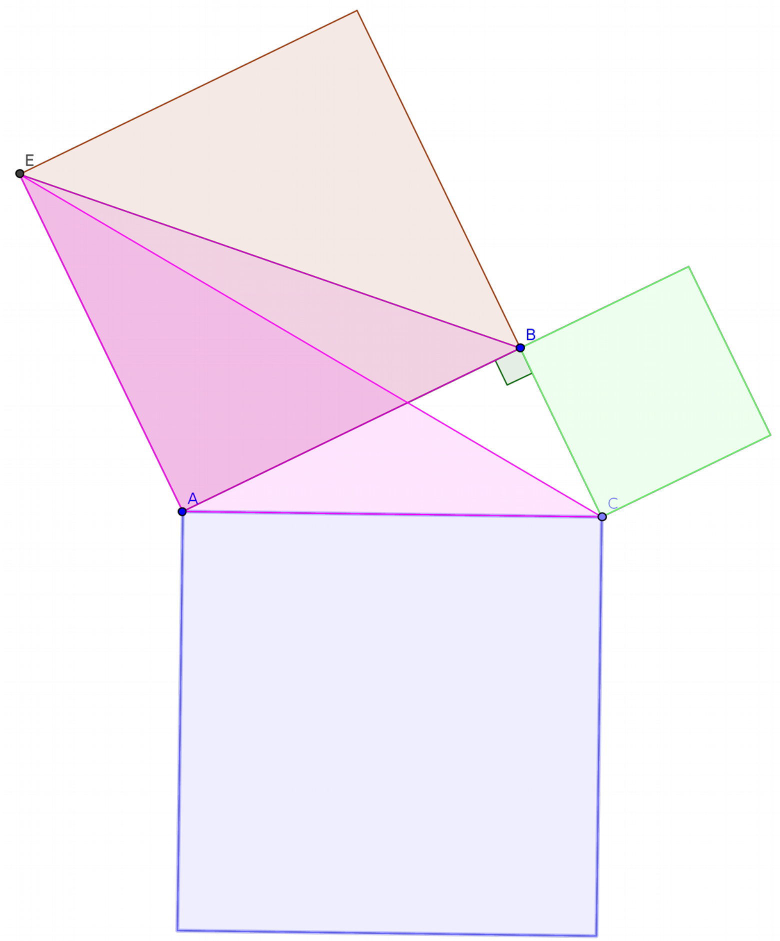
<u>(Une première) démonstration :</u>

- on construit trois carrés sur les trois côtés du ΔABC

  et on considère

  les ΔBEA et ΔCEA ; leur base est $[EA]$ et leur hauteur est $[AB]$

  on a donc : Aire(ΔBEA)=Aire(ΔCEA) [par « Thm Aires »]



Outils de base de la géométrie euclidienne

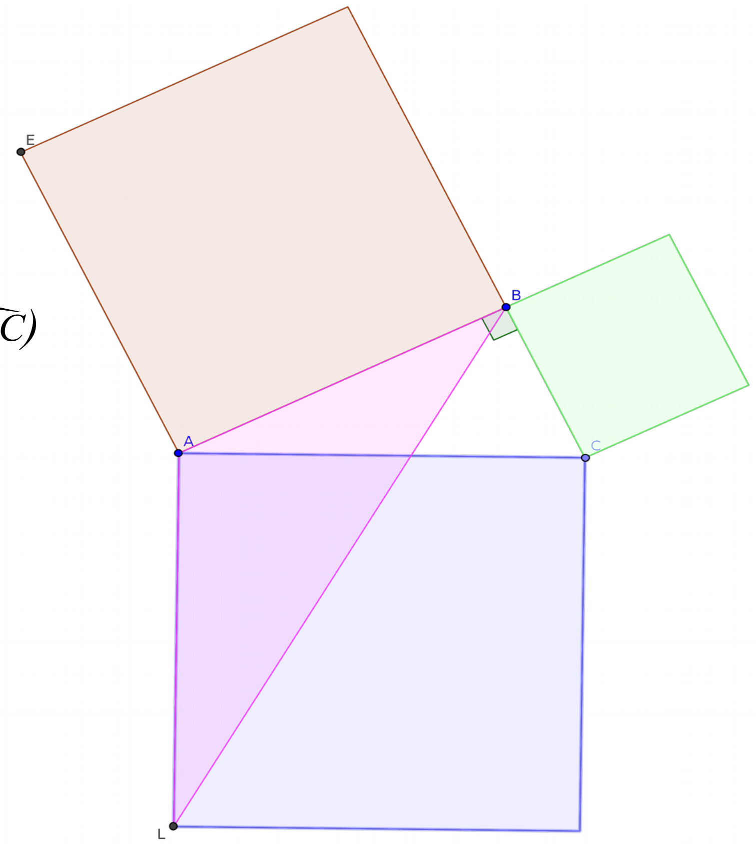
Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration :

- on fait pivoter ΔCEA pour qu'il se superpose avec ΔBAL

  remarque : on peut justifier que ces deux triangles sont isométriques (superposables), car ce sont deux triangles isocèles avec un angle au sommet de mesure 90+α (où $\alpha=\widehat{BAC}$*)*



-

Outils de base de la géométrie euclidienne

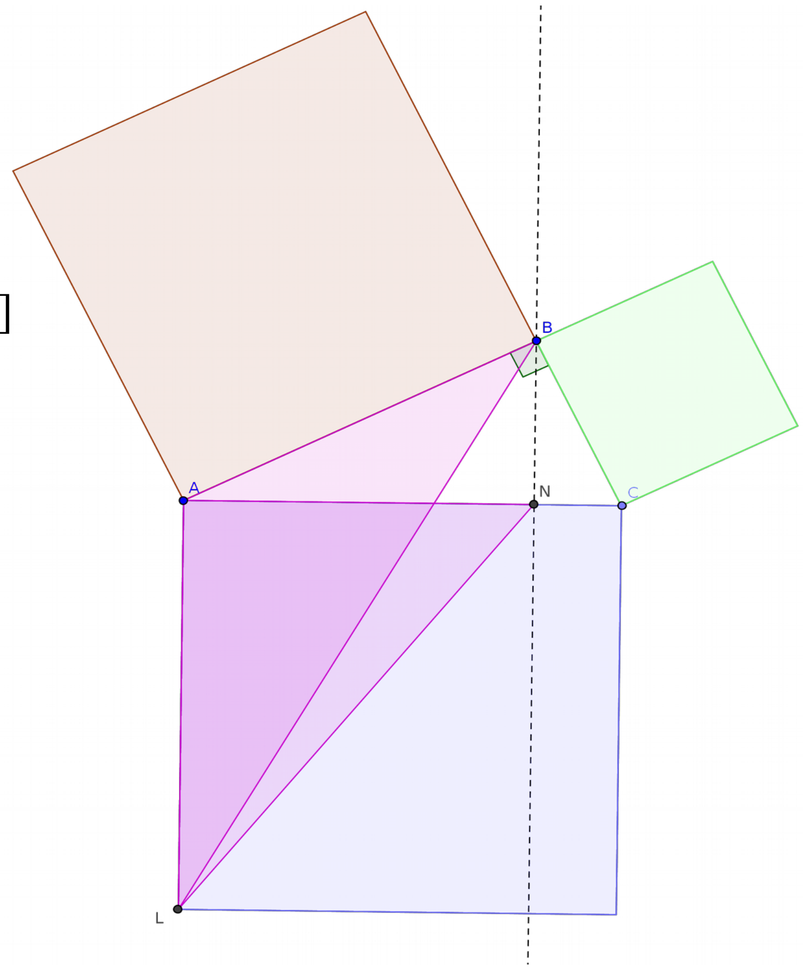
Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration :

- on trace la perpendiculaire à $[AC]$ par B
- ΔBAL et ΔNAL ont même base $[AL]$ et même hauteur est $[AN]$

  et donc : Aire(ΔBAL)=Aire(ΔNAL) [par « Thm Aires »]



•

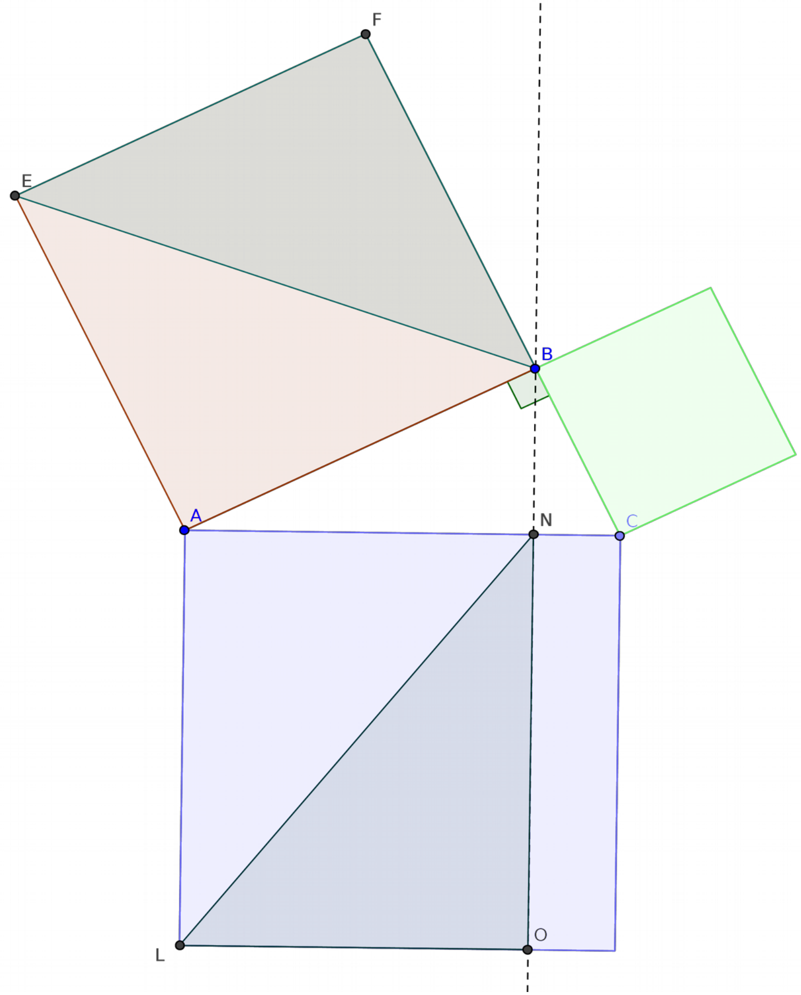
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration :

- De même : Aire(ΔBFE)=Aire(ΔNLO)



-

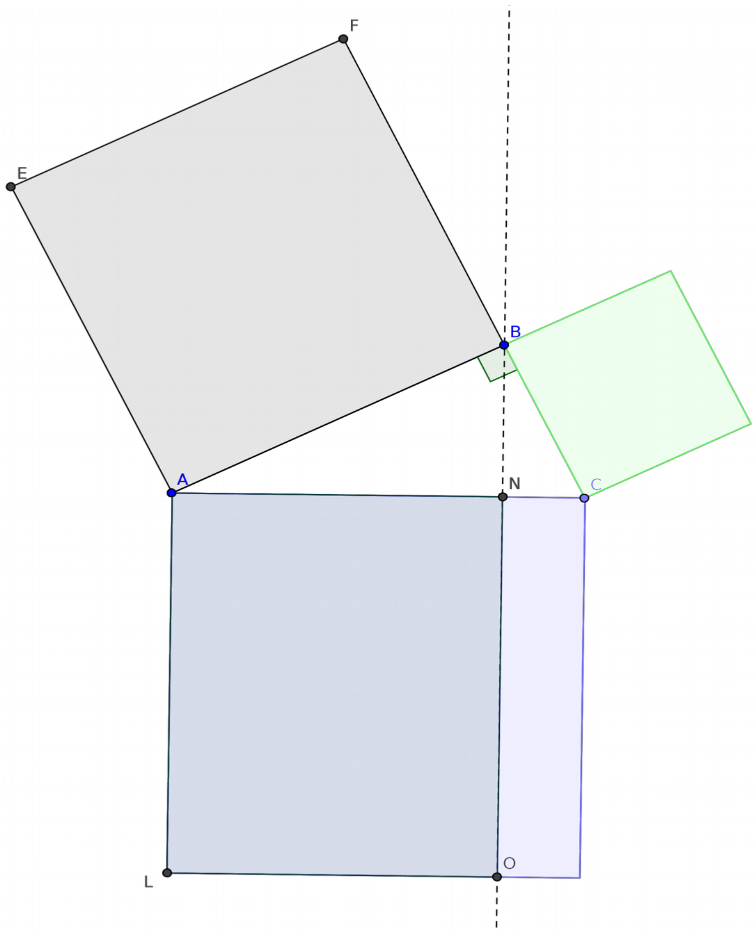
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration :

- Et : Aire($BFEA$)=Aire($NALO$)



-

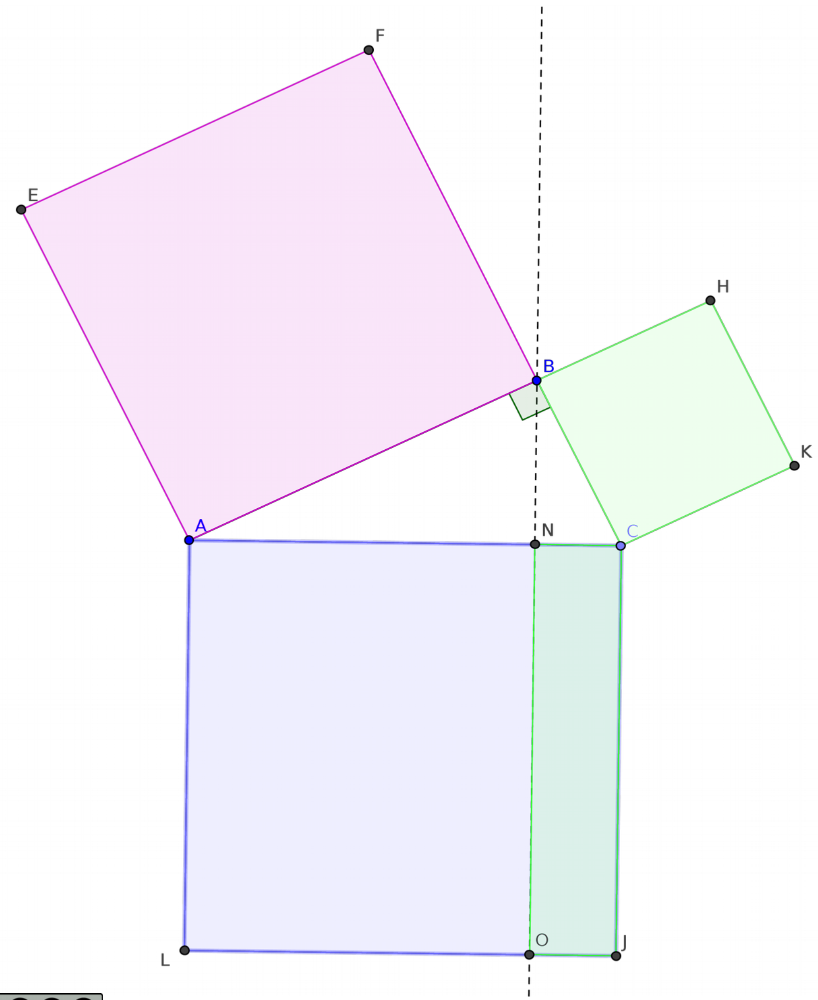
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration :

- De même: Aire($HBCK$)=Aire($CNOJ$)

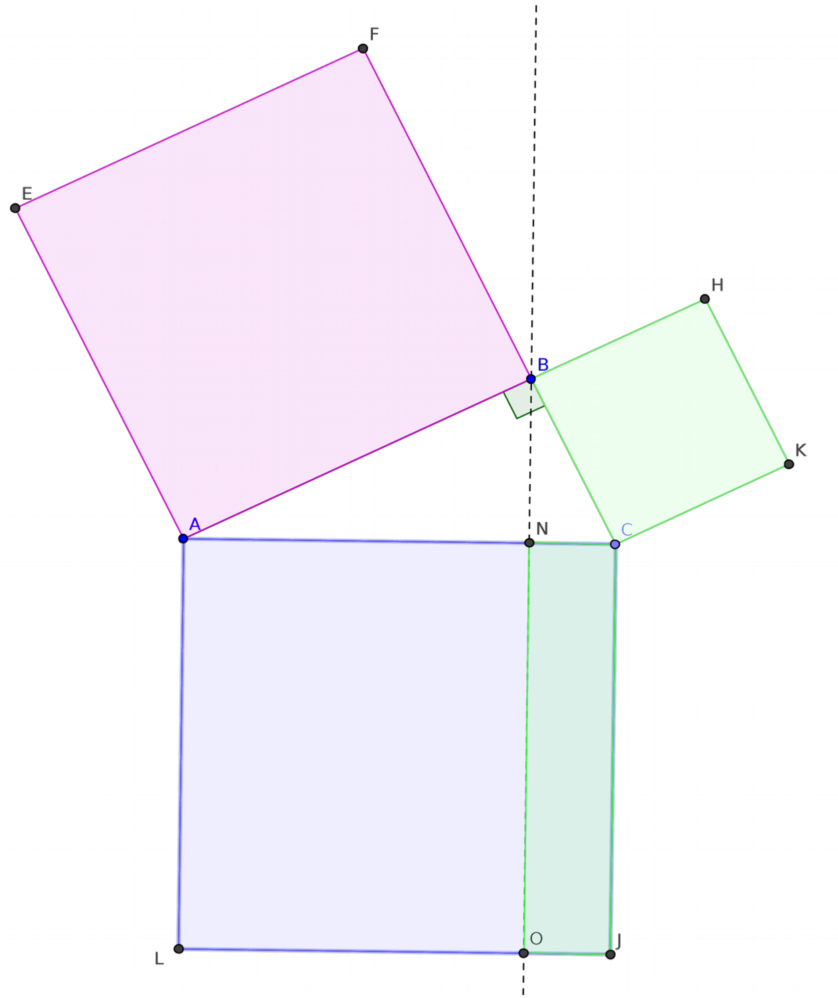


-

Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$



Démonstration :

- En additionnant les résultats précédents :

  $$\text{Aire}(BFEA) + \text{Aire}(HBCK) = \text{Aire}(NALO) + \text{Aire}(CNOJ)$$
  $$= \text{Aire}(CALJ)$$

  c'est-à-dire : $a^2+b^2 = c^2$

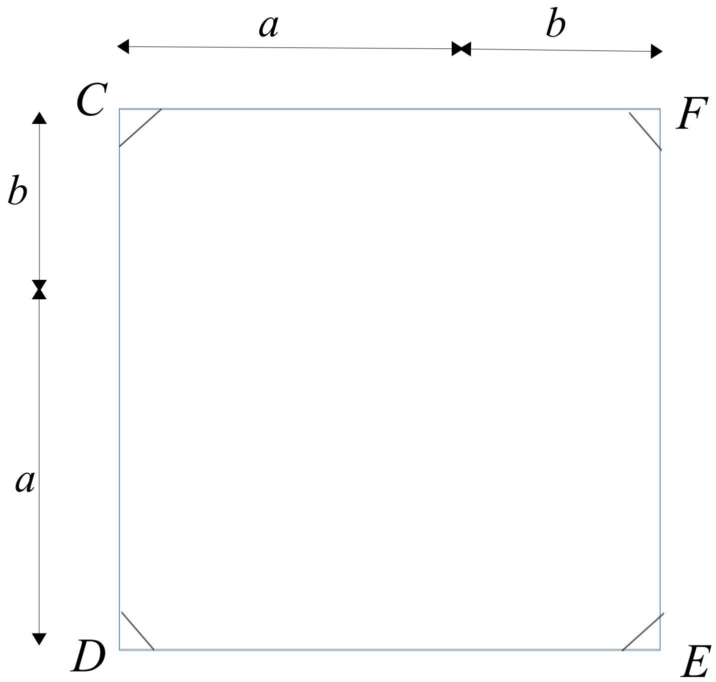
Outils de base de la géométrie euclidienne

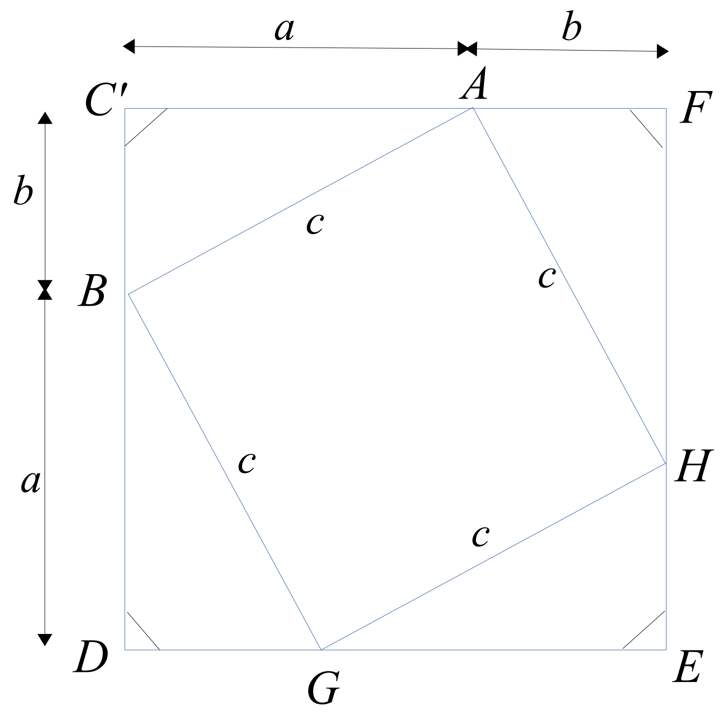
Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

(Une deuxième) démonstration :

- on construit un carré $CDEF$ de côté $a+b$





- on considère le quadrilatère $ABGH$ ce côté c inscrit dans $CDEF'$ [idée !]
- attention : à ce stade, on sait qu'il s'agit d'un losange [Déf «losange»], mais pas d'un carré ! c'est ce qu'il faut démontrer ...

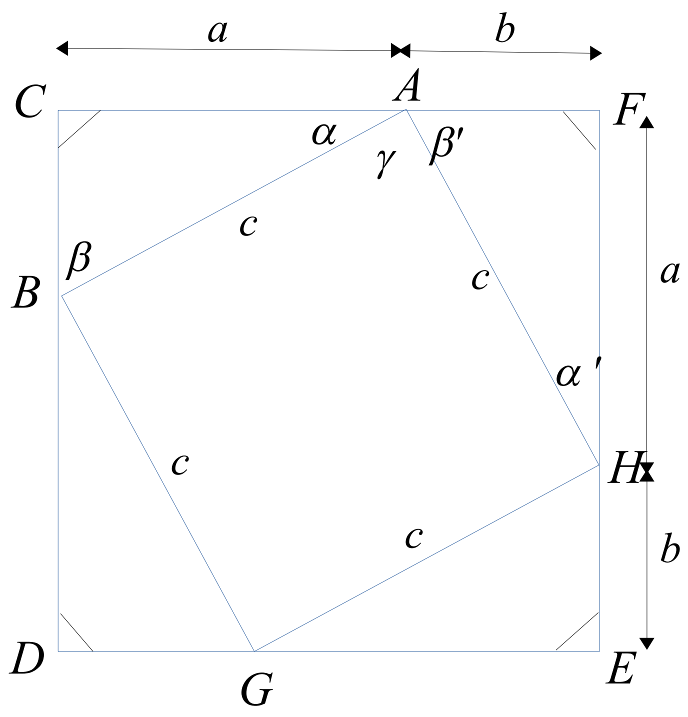
Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en *C*, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration (suite) :

- on note $\alpha = {<}BAC,\ \alpha' = {<}AHF,\ \beta = {<}CBA,$
  $\beta' = {<}FAH,\ \gamma = {<}HAB$
- dans les triangles ΔACB et ΔAHF : $\dfrac{\overline{HF}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c}{c} = 1$
  le rapport des côtés est donc constant !
  donc $\Delta ACB \sim \Delta AHF$ [par Thm «récip Thalès»]
  donc $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$ [par Déf «Δ semblables»]
- par ailleurs, $\alpha + \beta + 90 = 180$ [par Thm «ΣαΔ=180»]
  d'où : $\alpha + \beta = 90$ [- 90]
- ainsi $\alpha + \beta' = 90$ [substitution $\beta = \beta'$]
- enfin : $\alpha + \beta' + \gamma = 180$ [par Déf «angle plat»]
  $90 + \gamma = 180$ [substitution $\alpha + \beta' = 90$]
  $\gamma = 90$ [-90]
- un raisonnement identique montre que les 4 angles de *ABGH* valent 90°



Outils de base de la géométrie euclidienne

Théorème de Pythagore

Si ΔABC est rectangle en C, alors on a : $a^2+b^2 = c^2$

Démonstration (suite) :

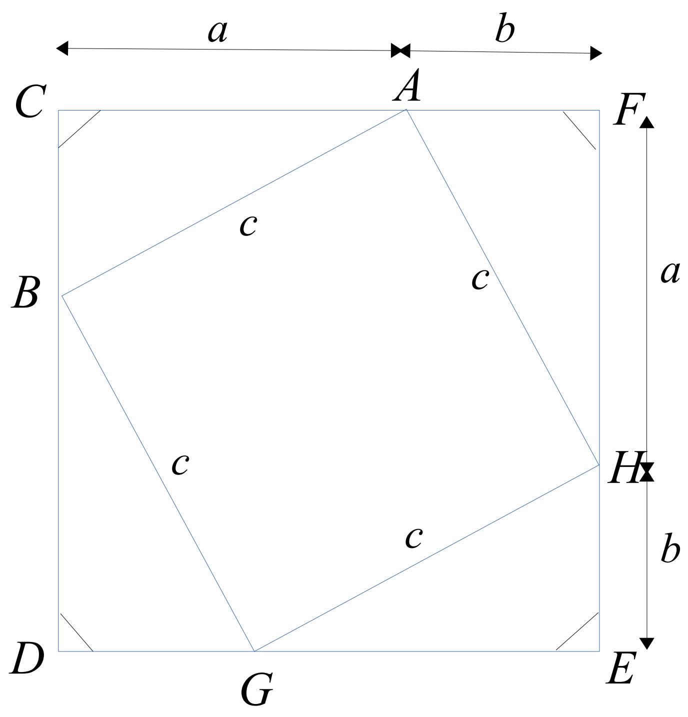
- les 4 côtés de $ABGH$ sont de longueur égale à c [par hypothèse] donc $ABGH$ est un carré [par Déf «carré»]
- On a : Aire($CDEF$) = Aire($ABGH$) + 4 Aire(ΔABC)

  c'est-à-dire : $(a+b)^2 = c^2 + 4ab/2$ [par Thm «Aires»]

  $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4ab/2$ [par id. rem. 1]

  $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ [simplification]

  $\Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$ [- $2ab$]



Outils de base de la géométrie euclidienne

Etape 3 :

Définitions	Déf «Δ semblables» / Déf «côtés corr»

Théorèmes	Thm «Thales»
Théorèmes	Thm «contrap-Tha»

Théorème non démontré	Thm «récipr-Tha»
Théorème non démontré	Thm «contrap-récipr-Tha»

...

Etape 4 :

Théorèmes	Thm «Pythagore»
Théorèmes	Thm «contrap-Pyth»

Théorème non démontré	Thm «récipr-Pyth»
Théorème non démontré	Thm «contrap-récipr-Pyth»

...