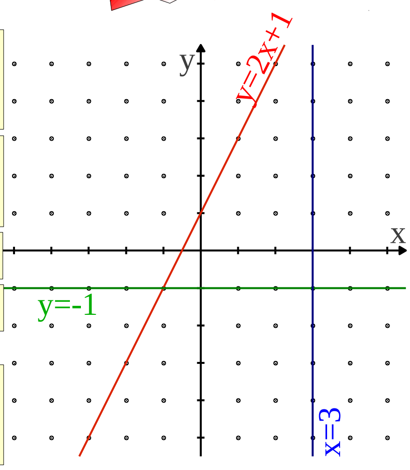
Systèmes 2x2

Objectif : Résoudre un système de deux équations (linéaires) à deux inconnues (syst.2x2) et interpréter graphiquement

Rappel : droites et équations de droites

Géométrie		Algèbre
une droite d du plan	⟷	une équation du type $ax+by+c = 0$
d est oblique	⟷	$y = px+q$ où p : pente et q : ord. à l'or.
d est verticale	⟷	$x = k$
d est horiz.	⟷	$y = m$
le point $P(x;y)$ appartient à la droite	⟷	les coordonnées $(x;y)$ de P sont solution de l'équation de

exemples



Résoudre un système 2x2

Résoudre un système 2x2, c'est **algébriquement** déterminer tous les couples (x;y) du plan qui vérifient simultanément les deux équations ; **géométriquement** c'est déterminer les éventuels points d'intersections des deux droites

Cas 1	Les deux droites sont sécantes, il y a un unique point d'intersection ; le système admet une unique solution

exemple

Résoudre le système 2x2 suivant :

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \end{array}\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

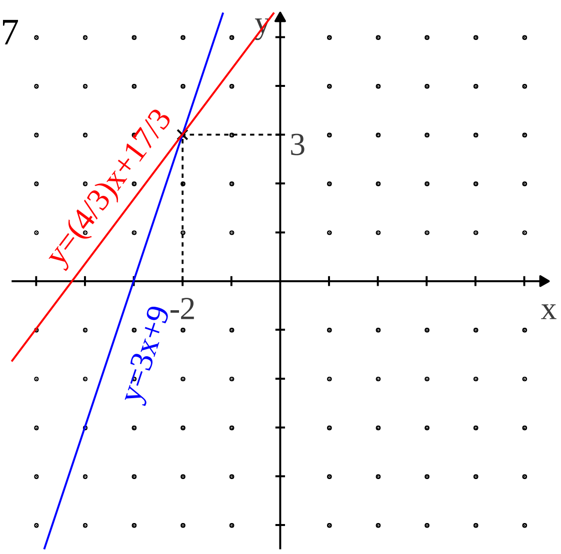
Résolution algébrique

$$\begin{array}{c} 3\cdot① \\ ② \end{array}\begin{cases} -9x + 3y = 27 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$$

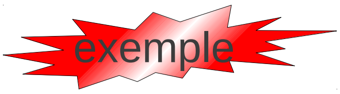
$+$

$$-5x = 10$$
$$x = -2$$
$$\text{dans } 1 : -3\cdot(-2) + y = 9$$
$$y = 3$$
$$S = \{(-2;3)\}$$

Interprétation géométrique



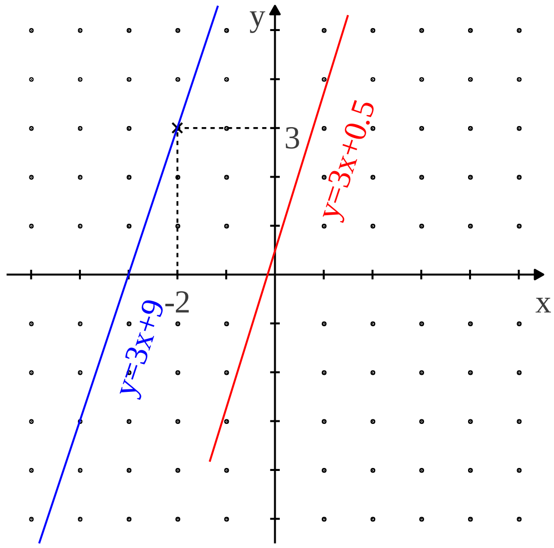
Cas 2	Les deux droites sont parallèles, il n'y a pas de point d'intersection ; le système n'a pas de solution



Résoudre le système 2x2 suivant :

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$$

Interprétation géométrique



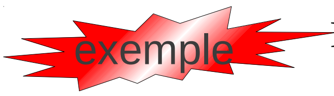
Résolution algébrique

$$\begin{matrix} 2\cdot ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} -6x + 2y = 18 \\ 6x - 2y = -1 \end{cases}$$

$+$

$$0x+0y=17$$
$$0=17$$
$$S=\emptyset$$

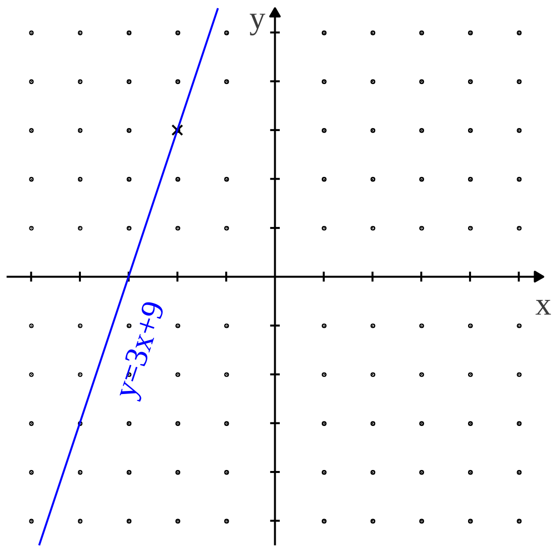
Cas 3	Les deux droites sont confondues ; l'ensemble solution et celui formé par tous les points de cette droite



Résoudre le système 2x2 suivant :

$$\begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 6x - 2y = -18 \end{cases}$$

Interprétation géométrique



Résolution algébrique

$$\begin{matrix} 2\cdot ① \\ ② \end{matrix}\begin{cases} -6x + 2y = 18 \\ 6x - 2y = -18 \end{cases}$$

$+$

$$0x+0y=0$$
$$0=0$$
$$S=\text{tous les points de d}$$
$$S=\{(x;y) \mid -3x+y=9\}$$

Méthodes de résolution

1 : Substitution	Résoudre le système 2x2 suivant : $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$
y = 9 + 3x	On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.
4x − 3(9 + 3x) = − 17	On remplace (substitue) y par 9 + 3x dans la deuxième équation.
4x − 27 − 9x = − 17 − 5x = 10 x = − 2	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.
y = 9 + 3 ⋅(− 2) y = 9 − 6 y = 3	On remplace x par − 2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.
Conclusion : $S=\{(-2;3)\}$	

2 : Comparaison	Résoudre le système 2x2 suivant : $\begin{cases} y = 3x+9 \\ y=2x+6 \end{cases}$
	On observe que *y* est exprimé en fonction de *x* dans les deux équations
3x + 9 = 2x + 6	On égalise les deux expressions en x.
3x + 9 = 2x + 6 x = -3	On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x.
y = 3 ⋅(− **3**)+9 y = 0	On remplace x par − 3 dans une des deux équations trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y.
Conclusion : $S=\{(-3;0)\}$	

3 : Addition	Résoudre le système 2x2 suivant : $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x+5y = 1 \end{cases}$
Déterminer une des inconnues	
$\begin{cases} \mathbf{5}\cdot(5x-4y)=\mathbf{5}\cdot 8 \\ \mathbf{4}\cdot(2x+5y)=\mathbf{4}\cdot 1 \end{cases}$	On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.
$\begin{cases} 25x-20y=40 \\ 8x+20y=4 \end{cases}$	On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.
33x = 44	On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y.
x = 4/3	On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x.
Déterminer l'autre inconnue	
2(4/3) + 5*y* = 1	On choisit une des deux équations de départ et on substitue la valeur de l'inconnue déjà trouvée
x = - 1/3	On obtient ainsi la valeur de la seconde inconnue
Conclusion : $S=\{(\frac{4}{3};-\frac{1}{3})\}$	