Remédiation degré 12

VI : Fonctions - 1 : Base - Corrigés des exercices

Ce document est l'une des ressources d'un **Cours de remédiation « degré 12 ».**

Public cible

Ces cours de remédiation sont conçus pour des élèves qui continuent leurs études après avoir terminé leur scolarité obligatoire (à Genève après le Cycle d'Orientation, vers 15 ans), qui ont identifié des lacunes dans leurs connaissances mathématiques de base et qui souhaitent apporter une remédiation.

Organisation des cours

Chaque cours est en principe constitué de trois parties :

- ☐ des modules **vidéos** reviennent sur les notions importantes illustrées par des exemples ;
- ☐ des **exercices « papier/crayon »**, accompagnés de leurs **corrigés complets** ;
- ☐ un parcours d'**exercices en ligne** qui utilisent la plate-forme Labomep (http://labomep.net) mais qui doivent être mis à disposition de l'élève par un professeur.

Mode de travail en autonomie

Ces cours sont conçus pour que la majorité du travail puisse être effectué de façon autonome par les élèves. Ceux-ci peuvent à leur rythme suivre les vidéos, s'exercer « papier-crayon » et s'auto-corriger après coup à l'aide des corrigés détaillés.
Les exercices en ligne permettent de s'exercer d'une autre façon ; les résultats sont disponibles en ligne autant pour l'élève que pour le professeur qui a mis le parcours à sa disposition.

Crédits

Source des exercices papier/crayon + corrigés : Manuel Sesamath.net cycle 4
http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=cycle4_2016

Adaptation : Jean-Marie Delley

Accéder aux ressources

http://sesamath.ch/manuel-matugym-1e/complements/ch05

Contact

Contact : Jean-Marie Delley – jean-marie.delley arobase edu.ge.ch

Corrigés des exercices

1 On considère le programme de calcul :

- Choisis un nombre ;
- Multiplie le nombre choisi par lui même ;
- Soustrais le triple du nombre choisi au produit obtenu.

a. En notant x le nombre choisi au départ, détermine la fonction f qui, à x, fait correspondre le résultat obtenu avec ce programme.

Multiplie le nombre par lui-même : x^2

le triple du nombre choisi : $3x$

On obtient donc :

$f(x) = x^2 - 3x$

b. Applique ce programme de calcul avec le nombre -2. Traduis ce calcul par une phrase contenant le mot « image » puis par une égalité.

$(-2) \times (-2) = 4$

$4 - 3\times(-2) = 4 + 6 = 10$

Pour –2, on trouve finalement 10 après application du programme.

10 est donc l'image de (-2) par la fonction f.

$f(-2) = 10$5 par la fonction m est nulle.

$m(5) = 0$

2 Traduis chaque phrase par une égalité puis par une correspondance de la forme $x \longmapsto ...$

a. x a pour image $4x - 5$ par la fonction f.

$f(x) = 4x - 5$; $f : x \longmapsto 4x - 5$.

b. L'image de x par la fonction g est $x(x + 1)$.

$g(x) = x(x + 1)$; $g : x \longmapsto x(x + 1)$.

c. Par la fonction h, $-3x$ est l'image de x.

$h(x) = -3x$; $h : x \longmapsto -3x$.

d. Par la fonction r, x a pour image $2x - 5x^2$.

$r(x) = 2x - 5x^2$; $r : x \longmapsto 2x - 5x^2$.

e. La fonction k associe, à tout nombre x, le nombre $3(x - 2)$.

$k(x) = 3(x - 2)$; $k : x \longmapsto 3(x - 2)$.

3 Traduis chaque notation par une phrase contenant le mot « image » et par une égalité.

a. $f : 7 \longmapsto -17$

7 a pour image -17 par la fonction f. $f(7) = -17$.

b. $g : -5 \longmapsto 3{,}2$

-5 a pour image par la fonction g 3,2.

$g(-5) = 3{,}2$.

c. $h : x \longmapsto -4x^2$

Par la fonction h, x a pour image $-4x^2$.

$h(x) = -4x^2$.

d. $v : x \longmapsto -3$

-3 est l'image de x par la fonction v . $v(x) = -3$.

4 La fonction f est définie par $f(x) = 8x$.

a. Détermine $f(2)$; $f(-3)$ et $f(0)$.

$f(2) = 8 \times 2 = 16$ $\quad$ $f(-3) = 8 \times (-3) = -24$ $\quad$ $f(0) = 8 \times 0 = 0$

b. Quelle est l'image de -5 par la fonction f ? Et celle de $\frac{1}{8}$?

$f(-5) = -40$ donc -5 a pour image -40 par la fonction f

$f\left(\frac{1}{8}\right) = 1$ donc 1 est l'image par f de $\frac{1}{8}$

c. Détermine les antécédents, par la fonction f, des nombres -16 ; 0 et 28.

On doit résoudre des petites équations :

$8x = -16$ donc $x = -2$

$8x = 0$ donc $x = 0$

$8x = 28$ donc $x = 3{,}5$

Donc -2; 0 et 3,5 sont les antécédents respectifs des nombres -16; 0 et 28 par la fonction f.

5 La fonction h est définie par $h : x \longmapsto -6x$.

a. Détermine les images, par la fonction h, des nombres 0 ; -5 et $\frac{1}{3}$.

On a $h(x) = -6x$ donc :

$h(0) = 0$ $\quad h(-5) = 30$ et $h\left(\frac{1}{3}\right) = -2$

b. Calcule $h(-1)$ et $h(3{,}5)$.

$h(-1) = 6$ $\quad h(3{,}5) = -21$

c. Détermine les antécédents, par la fonction h, des nombres 24 ; -42 et $-\frac{3}{4}$.

On doit résoudre des petites équations :

$-6x = 24$ donc $x = -4$

$-6x = -42$ donc $x = 7$

$-6x = \frac{-3}{4}$ donc $x = \frac{-3}{4} \times \frac{1}{-6} = \frac{1}{8}$

ou $x = 0{,}125$

6 Voici un tableau de valeurs correspondant à une fonction g.

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	0	0,7	0,9	1,1	1,3
$g(x)$	5	2	1	$-0{,}1$	-4	5	3,4

Recopie et complète les égalités suivantes.

a. $g(-0{,}1) = 2$

b. $g(0) = 1$

c. $g(0{,}9) = -4$

d. $g(1{,}3) = 3{,}4$

e. $g(0{,}7) = -0{,}1$

f. $g(-0{,}5) = 5 = g(1{,}1)$

7

8 La fonction k est définie par $k(x) = 4x^2 - 3$.

a. Quelle est l'image de $-0,5$ par k ?

$k(-0,5) = 4 \times (-0,5)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$

b. Quel nombre a pour antécédent 1 par k ?

$k(1) = 4 \times (1)^2 - 3 = 4 - 3 = 1$

c. Quel est l'antécédent de -3 par k ?

$k(x) = 4x^2 - 3 = -3$ d'où $4x^2 = 0$ soit $x^2 = 0$

d'où $x = 0$

d. Quels nombres ont pour image -2 par k ?

$k(x) = 4x^2 - 3 = -2$ d'où $4x^2 = 1$ soit $x^2 = 0,25$

d'où $x = \sqrt{0,25}$ ou $x = -\sqrt{0,25}$

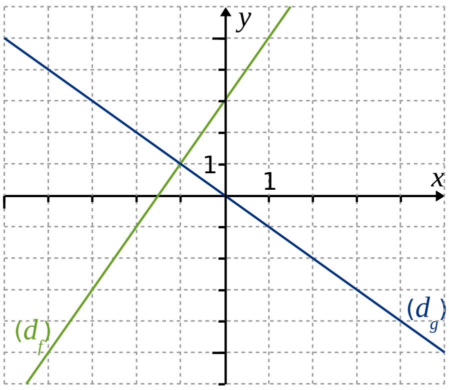
e. Pour quelles valeurs de x a-t-on $k(x) = 0$? Interprète la (ou les) solution(s) de cette équation pour la fonction k.

$k(x) = 4x^2 - 3 = 0$ d'où $4x^2 = 3$ soit $x^2 = 0,75$

d'où $x = \sqrt{0,75}$ ou $x = -\sqrt{0,75}$

La représentation graphique de k coupera l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\sqrt{0,75}$ et $-\sqrt{0,75}$

9 Le graphique ci-dessous représente des fonctions f et g.



Par lecture graphique, détermine pour chaque fonction :

a. les images des nombres 0 ; 1 et -4.

$f(0) = 3$ $f(1) = 5$ $f(-4) = -5$

$g(0) = 0$ $g(1) = -1$ $g(-4) = 4$

b. les antécédents des nombres 3 ; -5 et 5.

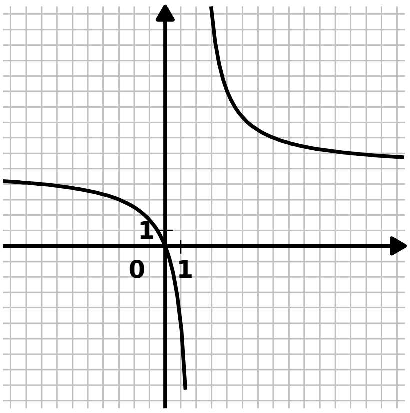
Pour f on a trouvé précédemment

$f(0) = 3$ $f(-4) = -5$ $f(1) = 5$

pour g :

$3 = g(-3)$ $-5 = g(5)$ $5 = g(-5)$

10 Voici la représentation graphique de la fonction D telle que $D(x) = \dfrac{5x}{x-2}$.



a. Quel nombre n'a pas d'image par la fonction D ? Peut-on le voir sur le graphique ? Explique.

Le nombre 2 n'a pas d'image par D car pour $x=2$ le dénominateur de la fraction s'annule. On ne peut pas le lire sur le graphique car le point de la courbe d'abscisse 2 n'existe pas.

b. Lire sur le graphique :

- l'image de 0 par la fonction D ; $D(0)=0$
- $D(4)$, $D(7)$, $D(-8)$;

$D(4)=10$ et $D(7)=7$ et $D(-8)=4$

- la valeur de a telle que $D(a) = 3$.

Pour $a = -3$

c. Vérifier les réponses du **b.** par le calcul.

$D(0)=\dfrac{5\times 0}{0-2}=0$ $D(4)=\dfrac{5\times 4}{4-2}=20:2=10$

$D(7)=\dfrac{5\times 7}{7-2}=35:5=7$ $D(-8)=\dfrac{5\times(-8)}{-8-2}=4$

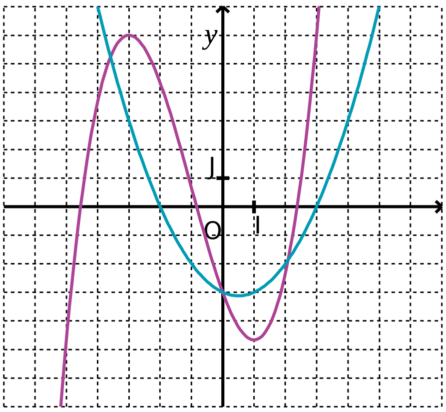
$D(x)=\dfrac{5x}{x-2}=3$ soit $3(x-2) = 5x$ soit $2x = -6$ ou $x = -3$

d. Donne une valeur approchée de :

- l'image de 8 par la fonction D ;
- l'image de -5 par la fonction D.

$D(8)\cong 6,7$ et $D(-5)\cong 3,6$

11 Dans le repère (O, I, J) ci-dessous sont représentées deux fonctions f (en violet) et g (en bleu).



Corrigés des exercices

a. Recopie et complète le tableau ci-dessous en lisant le graphique. Donne toutes les réponses possibles.

x	-3	-1	0	-5	$-4{,}8$; 0 et $1{,}8$	-3 et 3
$f(x)$	6	$0{,}5$	-3	-5	-3	6

b. Recopie et complète le tableau ci-dessous en lisant le graphique. Donne toutes les réponses possibles.

x	-2	0	3	Pas d'antécédent	-1 et 2	-3 et 4
$g(x)$	0	-3	0	-6	-2	3

c. Quelle est l'image maximale par la fonction f pour un nombre compris entre -5 et 0 ?

L'image maximale par la fonction f pour un nombre compris entre -5 et 0 est 6.

d. Détermine une valeur approchée du nombre, compris entre -4 et 5, qui a la plus petite image par la fonction g.

Une valeur approchée du nombre, compris entre -4 et 5, qui a la plus petite image par la fonction g est $0{,}5$.

e. Détermine graphiquement les valeurs approchées de x entre -4 et 3 qui ont la même image par les fonctions f et g.

Graphiquement les valeurs approchées de x qui ont la même image par les fonctions f et g sont environ $-3{,}6$; 0 et environ $2{,}1$.

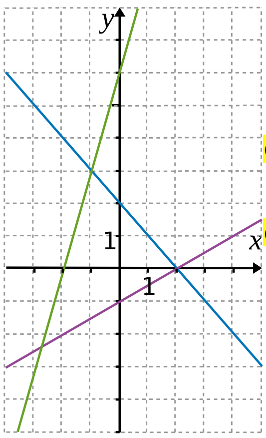
12 Avec le graphique ci-dessous :

a. Identifie les droites (d_f), (d_g) et (d_h) qui représentent les fonctions f, g et h définies par :

$f(x) = 3x + 6$;

$g(x) = 0{,}5x - 1$;

$h(x) = -x + 2$.



(d_f) coupe l'axe des ordonnées en 6. c'est donc la droite verte. $(d\ g)$ coupe l'axe des ordonnées en -1. c'est donc la droite rouge. Et enfin $(d\ h)$ la droite bleue qui coupe bien l'axe des ordonnées en 2

b. Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) par le calcul.

Si x est l'abscisse du point d'intersection, on doit avoir $g(x) = h(x)$.

C'est à dire $0{,}5x - 1 = -x + 2$

donc $1{,}5x = 3$ soit $x = 2$.

On a $h(2) = -2 + 2 = 0$ Donc le point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) apour coordonnées (2;0)

c. Détermine celles du point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) également par le calcul.

Si x est l'abscisse du point d'intersection, on doit avoir $f(x) = h(x)$.

C'est à dire $3x + 6 = -x + 2$

donc $4x = -4$ soit $x = -1$.

On a $h(-1) = 1 + 2 = 3$ Donc le point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) a pour coordonnées $(-1;3)$

d. Déduis-en, sans aucun calcul, les solutions de l'équation et de l'inéquation ci-dessous.

$-x + 2 = 3x + 6$ $\qquad$ $0{,}5x - 1 < -x + 2$

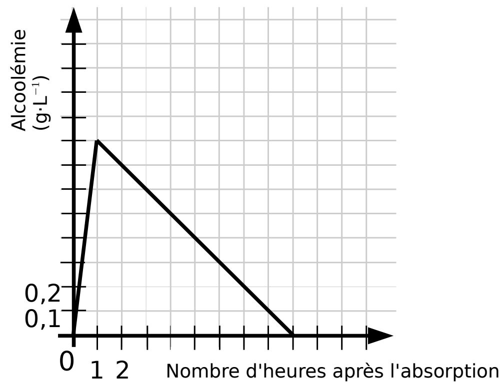
Justifie ta réponse.

L'équation a été résolue au b). Elle correspond à l'abscisse du point d'intersection des droites (d_f) et (d_h). $x = -1$.

Pour l'inéquation l'ordonnée d'un point de (d_g) doit être plus petite que celle correspondante à (d_h)

C'est la partie de (d_g) au dessous de (d_h) : $x < 2$.

13 On mesure le taux d'alcoolémie chez un homme après l'absorption d'une boisson alcoolisée à jeun.



a. Quel est le taux d'alcoolémie au bout de trois heures ?

Le taux d'alcoolémie au bout de trois heures est de $0{,}6$ g·L^{-1}.

b. Quand le taux d'alcoolémie est-il de $0{,}5$ g·L^{-1} ?

Le taux d'alcoolémie est de $0{,}5$ g·L^{-1} au bout de $0{,}6$ h, puis à nouveau au bout de 4 heures.

c. Quand le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

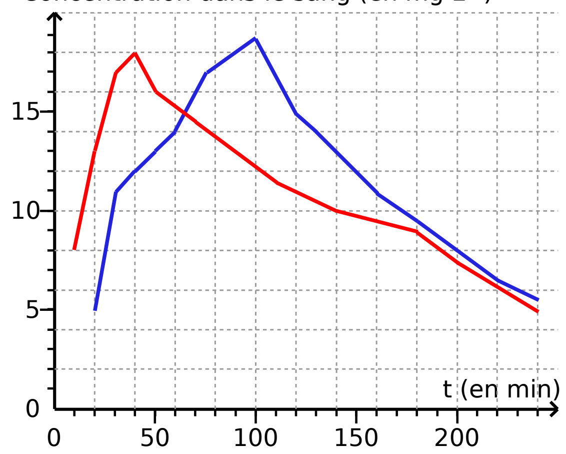
Le taux d'alcoolémie est maximal au bout d'une heure.

d. Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il nul ?

Le taux d'alcoolémie est nul au bout de neuf heures (en ne comptant pas l'instant 0).

14 Les deux courbes ci-après donnent la concentration dans le sang (en mg·L^{-1}) en fonction du temps (en min) pour deux formes différentes d'un anti-douleur (dont l'action est proportionnelle à son taux de concentration dans le sang) : le comprimé « classique » (en bleu) et le comprimé effervescent (en rouge).

Concentration dans le sang (en mg·L⁻¹)



a. Pour chaque forme de comprimé, donne la concentration dans le sang au bout de 30 min ; d'1 h 30 min et de 3 h.

Avec un comprimé « classique » :

Temps en min	30 min	90 min	180 min
Concentration en mg.L^{-1}	11	18	9,5 (ou 9,6)

Avec un comprimé « effervescent »

Temps en min	30 min	90 min	180 min
Concentration en mg.L^{-1}	17	13	9

b. Au bout de combien de temps chaque concentration est-elle maximale ?

La concentration maximale est obtenue au bout de 100 min (soit 1h40min) avec un comprimé « classique ».

La concentration maximale est obtenue au bout de 40 min avec un comprimé effervescent.

Quelle forme de comprimé doit-on prendre si l'on souhaite calmer des douleurs le plus rapidement possible ?

Pour calmer le plus vite possible les douleurs, il faut utiliser un comprimé effervescent, dont l'effet est rapidement constaté !

c. À quels instants a-t-on une concentration de 13 mg·L^{-1} pour chacun des produits ?

La concentration de 13 mg.L^{-1} est obtenue au bout de 50 min puis de 140 min (soit 2h20min) avec un comprimé « classique »
et au bout de 20 min puis de 90 min (soit 1h30min) avec un comprimé effervescent.

b. À quel instant les deux concentrations sont-elles égales ?

Les deux courbes se coupent au point d'abscisse 65.

Ainsi, quel que soit le comprimé choisi, la concentration dans le sang est la même au bout 65 min.

a. Récris chacune des réponses précédentes en utilisant le langage des fonctions.

Soit f et g les fonctions respectives qui, à l'instant *t* relevé en min à partir de la prise de l'antidouleur, associent la concentration dans le sang avec un comprimé «classique», respectivement «effervescent».

Question a.
Alors, par lecture graphique :

$f(30) = 11$ $f(90) = 18$ $f(180) = 9{,}5$

$g(30) = 17$ $g(90) = 13$ $g(180) = 9$

Question b.

Le maximum de f est atteint pour $t = 100$.

Le maximum de g est atteint pour $t = 40$.

Au bout de 30 min : $f(30) < g(30)$

Question c.

$f(50) = f(140) = 13$ donc 13 a pour antécédents 50 et 140 par la fonction f.

$g(20) = g(90) = 13$ donc 13 a pour antécédents 20 et 90 par la fonction g.

On constate que $f(65) = g(65)$ donc 65 a la même image par les fonctions f et g.

15 Le code couleur des résistances indique une valeur annoncée et une tolérance.
La tolérance d'une résistance est comprise entre 0,05 % et 20 %.
Pour être conforme, la valeur mesurée de la résistance doit valoir ce qui est annoncé plus ou moins cette tolérance.
On étudie des résistances dont la tolérance est de 20 %.

a. La première résistance a une valeur annoncée de 250 Ω.
Donne un encadrement de ses valeurs mesurées conformes.

La tolérance étant de 20 %, la résistance aura une résistance comprise entre

$250 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 200\,\Omega$ et

$250 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 300\,\Omega$

b. La deuxième résistance qui est conforme a une valeur mesurée de 420 Ω.
Donne un encadrement de ses valeurs annoncées possibles.

La tolérance étant de 20 %, la résistance aura une résistance comprise entre

$420 \div \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 350\,\Omega$ et $420 \div \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 525\,\Omega$

Corrigés des exercices

c. On appelle x la valeur annoncée de la résistance en ohm (Ω).
Exprime, en fonction de x, la valeur minimale $m(x)$ pour laquelle une résistance est conforme.
Exprime, en fonction de x, la valeur maximale $M(x)$ pour laquelle une résistance est conforme.

$m(x)=\left(1-\dfrac{20}{100}\right)x=0{,}8\,x$ et

$M(x)=\left(1+\dfrac{20}{100}\right)x=1{,}2\,x$

d. Représente graphiquement ces deux fonctions dans un même repère. Utilise des couleurs différentes. Fais apparaître la zone du plan délimitée par ces deux droites.

16 Collées sur une vitrine, de grandes affiches annoncent une réduction de 30 % sur toute la boutique.

a. Une jupe à 80 € est soldée. Quel est son nouveau prix ? Détaille tes calculs.

Nouveau prix : $80 \times (1 - 0{,}30)$
$= 80 \times 0{,}70$
$= 56$ €

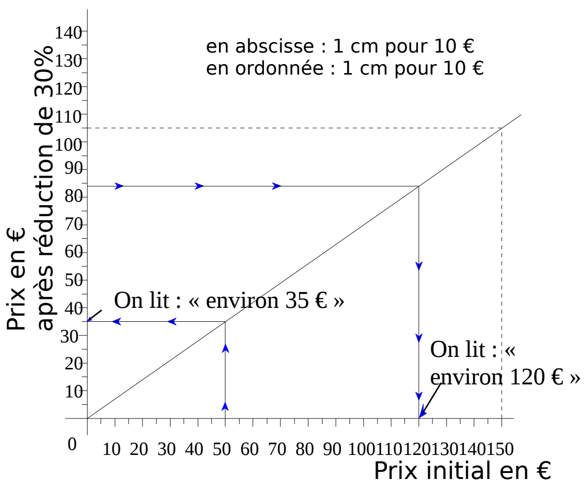
b. Un article coûtant x € est soldé. Exprime $p(x)$, son nouveau prix, en fonction de x.

$p(x) = x \times 0{,}70$ où $p(x) = 0{,}7x$

c. Cette fonction p est-elle linéaire ou affine ?

C'est une fonction linéaire.

d. Représente cette fonction pour les valeurs de x comprises entre 0 € et 150 €, sur une feuille de papier millimétré. Tu placeras l'origine du repère orthogonal dans le coin inférieur gauche. Tu prendras 1 cm pour 10 € en abscisse et en ordonnée.

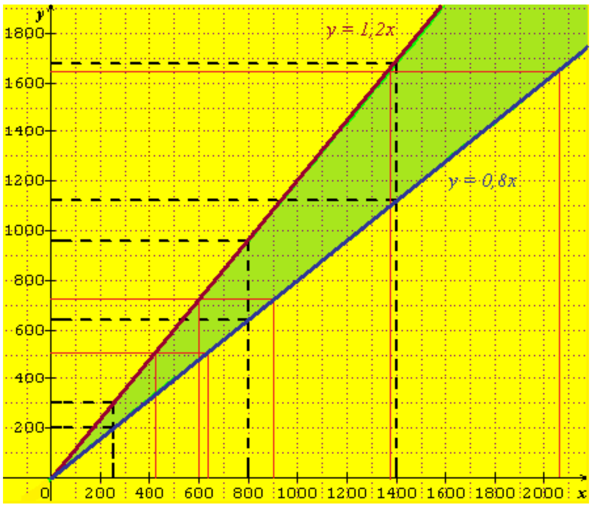


e. Lis sur le graphique le prix soldé d'un pull qui coûtait 50 €.

Il sera soldé environ 35 €.

f. Lis sur le graphique le prix avant démarque d'un pantalon soldé à 84 €.

Le pantalon coûtait environ 120 €.



g. Par lecture graphique, donne l'encadrement des valeurs mesurées conformes pour des valeurs annoncées de 250 Ω ; 800 Ω et 1 400 Ω.

Graphiquement, on lit :

pour 250 Ω que les valeurs réelles sont comprises entre 200 Ω et 300 Ω ;

pour 800 Ω , entre 640 Ω et 960 Ω ;

pour 1 400 Ω entre 1 120 Ω et 1 680 Ω.

h. Par lecture graphique, donne l'encadrement des valeurs annoncées possibles pour des résistances mesurées de 510 Ω ; 720 Ω et 1 650 Ω.

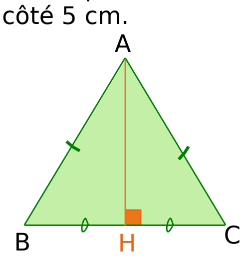
Graphiquement, pour une résistance mesurée de 510 Ω, la valeur annoncée pourra être comprise entre 425 et 640 Ω.

Graphiquement, pour une résistance mesurée de 720 Ω, la valeur annoncée pourra être comprise entre 600 et 900 Ω.

Graphiquement, pour une résistance mesurée de 1 650 Ω, la valeur annoncée pourra être comprise entre 1 375 et 2 060 Ω.

17

a. Calcule la hauteur puis l'aire d'un triangle équilatéral de côté 5 cm.



Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore,

$AH^2 + BH^2 = AB^2$

Donc $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - 2{,}5^2 = 18{,}75$

$AH = \sqrt{18{,}75} \approx 4{,}33$ cm .

On note A l'aire de ABC :

$A = \dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{5\sqrt{18{,}75}}{2} \approx 10{,}8\ \text{cm}^2$.

b. On note x le côté d'un triangle équilatéral (en cm). Exprime sa hauteur en fonction de x.

Dans le triangle AHB, rectangle en H, on a d'après le théorème de Pythagore,

c. $AH^2 + BH^2 = AB^2$

Donc $AH^2 = AB^2 - BH^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$.

Alors $AH = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

a. On appelle A la fonction qui à x associe l'aire du triangle équilatéral de côté x.

- Détermine une expression de A.

L'aire de ABC est encore calculée par :

$\frac{AH \times BC}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x \times x}{2}$, d'où $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

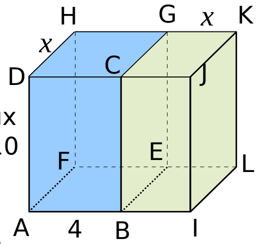
- Calcule $A(5)$; $A(3)$ et $A(\sqrt{3})$.

$A(5) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

$A(3) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

$A(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{3}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

18 L'unité est le centimètre. ABCDFEGH et BIJCELKG sont deux pavés droits.



a. Exprime les volumes $V_1(x)$ du pavé bleu et $V_2(x)$ du pavé vert en fonction de x.

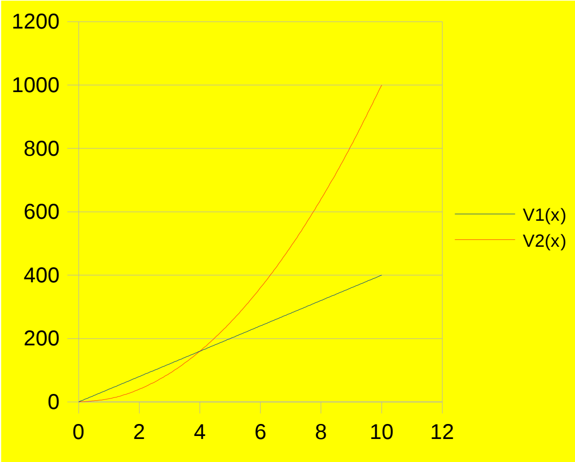
$V_1(x) = 4 \times 10 \times x = 40x$.

$V_2(x) = x \times 10 \times x = 10x^2$.

b. Dans un tableur, construis un tableau de valeurs et les courbes représentatives de V_1 et V_2 en fonction de x.

On voit que x est la mesure d'une arête, donc $x \geqslant 0$

x	$V_1(x)$	$V_2(x)$
0	0	0
1	40	10
2	80	40
3	120	90
4	160	160
5	200	250
6	240	360
7	280	490
8	320	640
9	360	810
10	400	1000



c. Quel(s) nombre(s) a (ont) la même image par V_1 et V_2 ?

0 et 4 ont la même image par V_1 et V_2.