Nombres

Pourquoi ?

navigation, astronomie, physique, commerce, …

quantifier-mesurer-ordonner

Le gardien prend et conserve un caillou pour chaque chèvre qui passe devant lui le matin et vérifie le soir qu'à chaque caillou correspond bien une chèvre !	remarque : les animaux comptent … un peu...

Où ? Quand ?

Sumériens (-3000) → sédentarisation/écriture
Mésopotamie (-2000/-1000) → calculs (en base 60)
Egypte (-2000/-1000) → géométrie/fractions
Grèce (-600/-200) → géométrie/argumentation
Civilisations islamiques (800/1500) → algèbre/trigo
Occident (1500…) → analyse
mais aussi Chine, Mayas(0-800), Inde (le zéro)
Arabie (800/1500) → algèbre
Europe (XV siècle)

Comment ?

Les chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 … et 0	fruit d'une longue évolution ...

Les nombres avec deux opérations : + et *

10, 234, 343729, …

$2345 = 2\cdot 1000 + 3\cdot 100 + 4\cdot 10 + 5\cdot 1$

entiers naturels, addition/somme, multiplication /produit, ppmc/pgdc, division (euclidienne) avec reste, système de numération positionnel en base 10/autres bases

Ces deux opérations sont « internes » : les résultats sont toujours des entiers naturels

en commerce il y a aussi des pertes …

une nouvelle opération : - qui produit de nouveaux nombres

-1, -2, -3, -4, -5, ...

soustraction/différence, entiers relatifs, division/quotient, opposé

et on doit parfois fractionner des quantités ...

$\frac{1}{3}; -\frac{5}{12}; \frac{-7}{435}; \frac{435}{-7}$ Attention : $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{a}{0}$ n'existent pas

fractions, numérateur, dénominateur
amplifier, simplifier, opérations entre fractions, fractions irréductibles

ces nouveaux objets sont également des nombres …
si on les considère comme résultats de divisions : ÷
en utilisant une écriture décimale

$$\frac{1}{2}=0.5\,;\ \frac{2231}{1000}=2.231\,;\ \frac{1}{3}=0.\overline{3}\,;\ \frac{2}{7}=0.\overline{3285714}\ldots$$

Les résultats de ces divisions ont toujours une partie fractionnaire finie ou infinie périodique

division/quotient, fractions (irréductibles), écriture décimale, nombre rationnel, inverse

Il y a une équivalence entre « fraction irréductible » et « écriture décimale avec partie fractionnaire finie ou infinie périodique » ou infinie périodique »

avec les nombres rationnels, tout est mesurable
avec une très grande précision … mais pas toujours de façon exacte !

Puissances entières

Définitions

a un nombre quelconque et n entier naturel non nul : $a^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ fois}}$

a un nombre quelconque non nul : $a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$

a un nombre quelconque et n entier naturel négatif : $a^n \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{a^{-n}}$

Attention : 0^0 n'existe pas

Théorèmes

a, b nombres quelconques, n et m entiers relatifs (et exclusion des cas 0^0) :

$a^n\cdot a^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n\cdot m}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^m} \overset{\text{thm}}{=} a^{n-m}(\text{ pour } a\neq 0)$

$a^n\cdot b^n \overset{\text{thm}}{=} (ab)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} \overset{\text{thm}}{=} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n (\text{pour } b\neq 0)$

Mais attention : $a^n+b^n \neq (a+b)^n$

Racines carrées

Définition

a un nombre quelconque positif : $\sqrt{a} = b \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} b^2=a$ et $b\geq 0$

Théorèmes

a, b nombres quelconques positifs :

$\sqrt{a}\sqrt{b} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt{a\cdot b}$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt{\dfrac{a}{b}},\ (b\neq 0)$ $\quad \sqrt{a^2} \overset{\text{thm}}{=} \left(\sqrt{a}\right)^2 \overset{\text{thm}}{=} a$

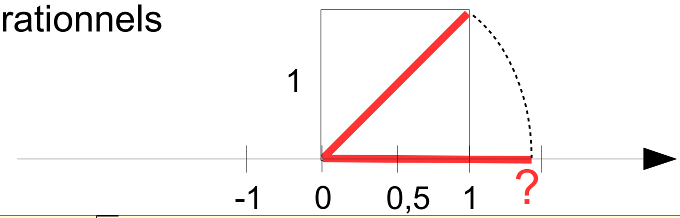
Mais attention : $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

D'autres nombres encore ...

Théorème : La longueur de la diagonale du carré de côté 1
ne peut pas être écrite sous forme de fraction

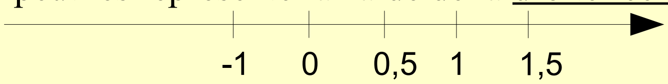
Démonstration : par l'absurde ...

Conséquence : certaines longueurs ne peuvent être mesurées avec les nombres rationnels

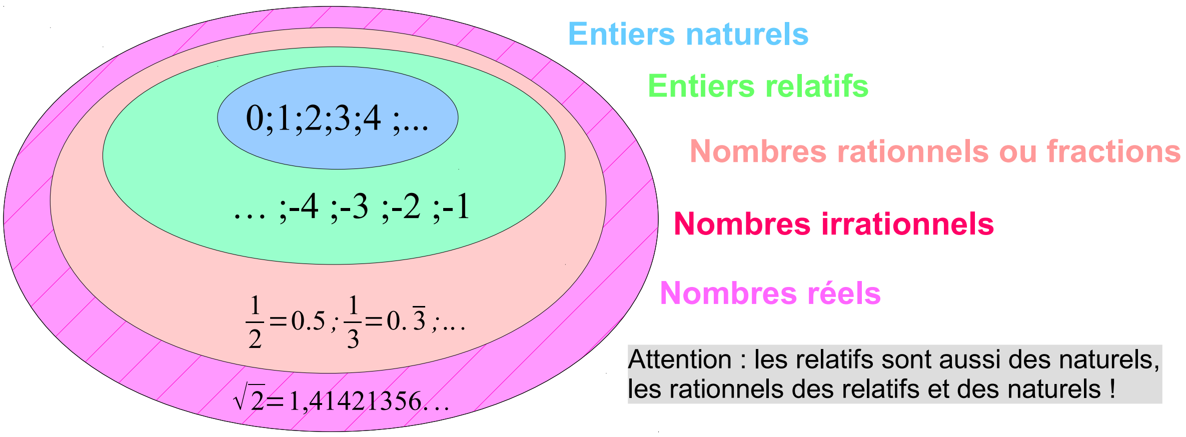


Autrement dit : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel
il existe donc des nombres non rationnels … les nombres irrationnels
leur écriture décimale a une partie fractionnaire infinie non périodique
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 2\cdot\sqrt{2}, 13\cdot\sqrt{19}\,;\pi$ sont aussi des nombres irrationnels

Les <u>nombres réels</u> sont les nombres rationnels ou irrationnels ; ce sont les nombres dont l'écriture décimale est finie, infinie périodique ou infinie non périodique.
On peut les représenter à l'aide de la <u>droite réelle</u> :



nombres irrationnels, nombres réels
la droite réelle est un modèle pour mesurer de façon exacte les grandeurs
il n'existe pas de nombre réel « le plus proche » d'un autre ...
il y a une infinité de nombre rationnels … et de nombres irrationnels … tous « mélangés » de façon très complexe ...



Attention : les relatifs sont aussi des naturels, les rationnels des relatifs et des naturels !

compétences techniques essentielles

ordre des opérations	règle des signes	calcul de fractions	proportions	gestion des parenthèses	utiliser efficacement la calculatrice
simplifier/réduire des expressions (fractionnaires) avec puissances					
simplifier/réduire des racines carrées			écrire une expression sans racine au dénominateur		