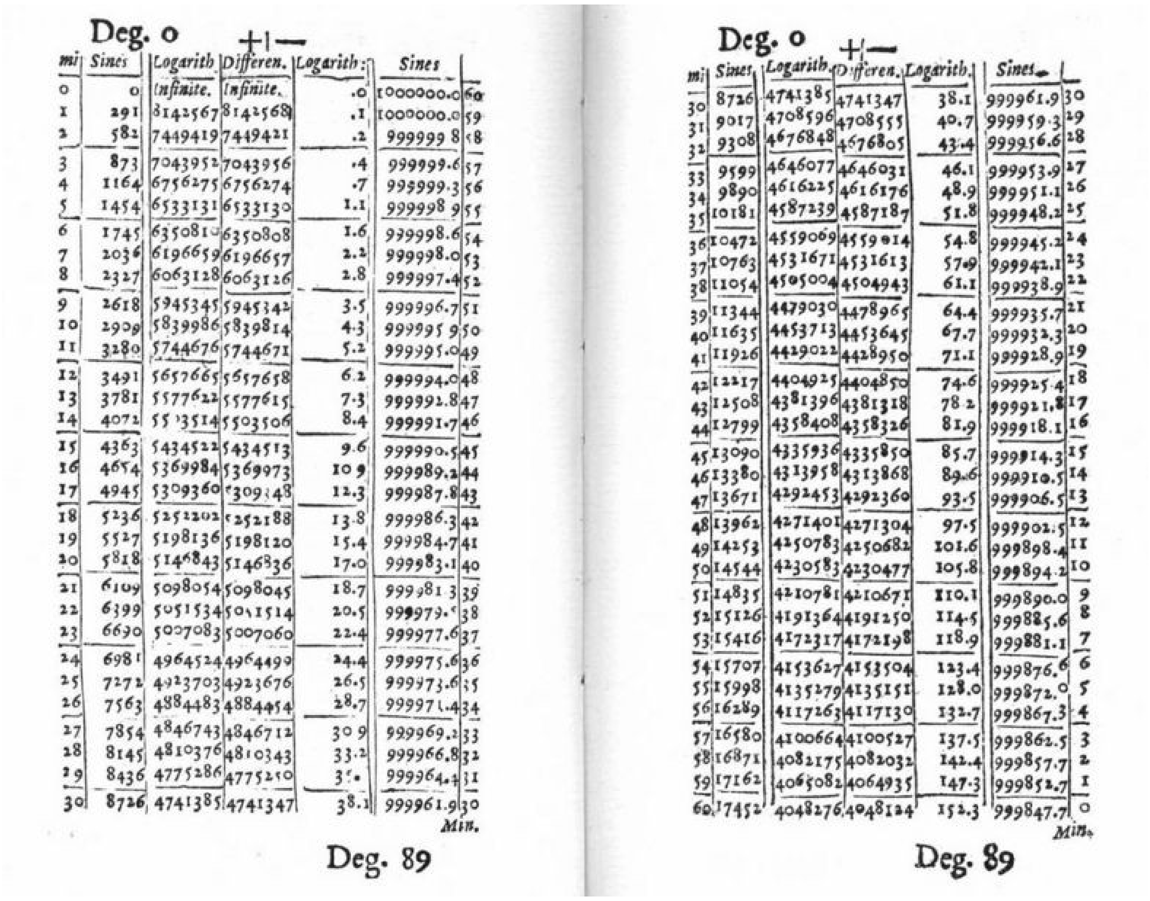


Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith :	Sines	
0	0	Infinite.	Infinite.	.0	1000000.0	60
1	291	8142567	8142568	.1	1000000.0	59
2	582	7449419	7449421	.2	999999 8	58
3	873	7043952	7043956	.4	999999.6	57
4	1164	6756275	6756274	.7	999999.3	56
5	1454	6533131	6533130	1.1	999998 9	55
6	1745	6350810	6350808	1.6	999998.6	54
7	2036	6196659	6196657	2.2	999998.0	53
8	2327	6063128	6063126	2.8	999997.4	52
9	2618	5945345	5945342	3.5	999996.7	51
10	2909	5839986	5839814	4.3	999995 9	50
11	3280	5744676	5744671	5.2	999995.0	49
12	3491	5657665	5657658	6.2	999994.0	48
13	3781	5577622	5577615	7.3	999992.8	47
14	4072	55[illegible]3514	5503506	8.4	999991.7	46
15	4363	5434522	5434513	9.6	999990.5	45
16	4654	5369984	5369973	10 9	999989.2	44
17	4945	5309360	5309[illegible]48	12.3	999987.8	43
18	5236	5252202	5252188	13.8	999986.3	42
19	5527	5198136	5198120	15.4	999984.7	41
20	5818	5146843	5146836	17.0	999983.1	40
21	6109	5098054	5098045	18.7	999981 3	39
22	6399	5051534	5051514	20.5	999979.[illegible]	38
23	6690	5007083	5007060	22.4	999977.6	37
24	6981	4964524	4964499	24.4	999975.6	36
25	7272	4923703	4923676	26.5	999973.6	35
26	7563	4884483	4884454	28.7	999971.4	34
27	7854	4846743	4846712	30 9	999969.2	33
28	8145	4810376	4810343	33.2	999966.8	32
29	8436	4775286	4775250	3[illegible]	999964.4	31
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
						Min.

Deg. 89

Deg. 0 +|—

mi	Sines	Logarith	Differen.	Logarith	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30
31	9017	4708596	4708555	40.7	999959.3	29
32	9308	4676848	4676805	43.4	999956.6	28
33	9599	4646077	4646031	46.1	999953.9	27
34	9890	4616225	4616176	48.9	999951.1	26
35	10181	4587239	4587187	51.8	999948.2	25
36	10472	4559069	4559014	54.8	999945.2	24
37	10763	4531671	4531613	57.9	999942.1	23
38	11054	4505004	4504943	61.1	999938.9	22
39	11344	4479030	4478965	64.4	999935.7	21
40	11635	4453713	4453645	67.7	999932.3	20
41	11926	4429022	4428950	71.1	999928.9	19
42	12217	4404925	4404850	74.6	999925.4	18
43	12508	4381396	4381318	78.2	999921.8	17
44	12799	4358408	4358326	81.9	999918.1	16
45	13090	4335936	4335850	85.7	999914.3	15
46	13380	4313958	4313868	89.6	999910.5	14
47	13671	4292453	4292360	93.5	999906.5	13
48	13962	4271401	4271304	97.5	999902.5	12
49	14253	4250783	4250682	101.6	999898.4	11
50	14544	4230583	4230477	105.8	999894.2	10
51	14835	4210781	4210671	110.1	999890.0	9
52	15126	4191364	4191250	114.5	999885.6	8
53	15416	4172317	4172198	118.9	999881.1	7
54	15707	4153627	4153504	123.4	999876.6	6
55	15998	4135279	4135151	128.0	999872.0	5
56	16289	4117263	4117130	132.7	999867.3	4
57	16580	4100664	4100527	137.5	999862.5	3
58	16871	4082175	4082032	142.4	999857.7	2
59	17162	4065082	4064935	147.3	999852.7	1
60	17452	4048276	4048124	152.3	999847.7	0
						Min.

Deg. 89

Extrait de tables de logarithmes de John Napier

Problème

Timotée aime les nombres … par exemple les nombres palindromes. Ce sont des nombres qui se lisent de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche ; 55 ; 95159 ou 1221 sont de tels nombres.
Timotée a trouvé un nombre palindrome à 4 chiffres, qui, lorsqu'on lui soustrait un certain nombre palindrome à 3 chiffres, donne encore un résultat palindrome.
Quel est ce nombre ?
Remarque : l'écriture d'un nombre à plus d'un chiffre ne commence jamais par un 0.

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Drôle de primitive

On considérons la fonction f déterminée par $f(x)=\frac{1}{x}$.

a. Déterminer son domaine de définition D_f puis la représenter graphiquement.

b. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Sur $]0;+\infty[$?

c. Existe-t-il une primitive de f sur $]0;+\infty[$?Plusieurs ?

d. Arrive-t-on à déterminer une expression algébrique $f(x)$ = … pour une telle primitive ?

Considérons la fonction $F:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ déterminée par $F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

e. F est-elle bien définie sur $]0;+\infty[$? Justifier.

Nous allons essayer de déterminer certaines propriétés de F pour pouvoir en tracer une représentation graphique :

f. F est-elle (dé)croissante, strictement (dé)croissante sur $]0;+\infty[$? Justifier.

g. F est-elle dérivable sur $]0;+\infty[$? Justifier.

h. F est-elle continue sur $]0;+\infty[$? Justifier.

i. Déterminer le tableau de signes de F.

j. Est-il possible de déterminer une (des) image(s) de F ?

k. Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$? Enoncer une conjecture.

l. * Démontrer cette conjecture.

Indication : démontrer que $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=+\infty$ puis comparer l'aire sous la courbe entre 1 et n avec la somme $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$

m. Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$?

Indication : chercher une symétrie dans la représentation graphique de f…

n. Utiliser les informations obtenues jusque là pour tracer une représentation graphique de F.

2 [Activité] Une première propriété

Considérons le théorème suivant et sa démonstration :

Théorème : Si $x>0$ et $y>0$, alors $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Démonstration :

Soit α un nombre réel strictement positif.

On a : $[F(\alpha x)]'=F'(\alpha x)\cdot(\alpha x)'$, car [ARG 1]

$=\frac{1}{\alpha x}\cdot(\alpha x)'$, car [ARG 2]

$=\frac{1}{\alpha x}\cdot\alpha$, car [ARG 3]

$=\frac{1}{x}$, car [ARG 4]

$=F'(x)$, car [ARG 5]

Donc $(F(\alpha x)-F(x))'=0$, car [ARG 6]

ce qui implique que $F(\alpha x)-F(x)=c$ où c est une constante réelle, car [ARG 7]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser x = 1, car [ARG 8]

$F(\alpha 1)-F(1)=c$, d'où $c=F(\alpha)$, car [ARG 9]

On obtient donc finalement la propriété : $F(\alpha x)=F(x)+F(\alpha)$, car [ARG 10]

Comme ceci est vrai pour tout x et tout α strictement positifs, on peut aussi écrire $F(xy)=F(x)+F(y)$.

Donner pour chaque [ARG] ci-dessus le ou les arguments nécessaires,

3 [Activité] Une seconde propriété

On peut démontrer le théorème suivant :

Théorème : Si $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors $F(x^{\alpha})=\alpha\cdot F(x)$.

a. En exercice, on démontre cette nouvelle propriété en s'inspirant de la démonstration précédente.

b. Pourquoi se limite-t-on à $\alpha\in\mathbb{Q}$?

4 [Souvenirs] Exponentielles et logarithmes de base *a*

En 2e année, nous avons étudié les **fonctions exponentielles de base a** $\left(a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}\right)$,

définies ainsi : $\exp_a : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & a^x\end{array}$

a. Pourquoi limite-t-on $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$?

b. Rappeler pour quels x a^x est-il bien défini à ce stade.

c. Quel type de phénomènes cette famille de fonction permet-elle de **modéliser** ?

Ces fonctions étant **bijectives** entre ces ensembles de départ et d'arrivée, nous savons qu'elles admettent une **fonction réciproque**, que nous appelons **logarithme de base a**, notée ainsi :

$$\log_a : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \log_a(x)\end{array} ,$$

d. Rappeler les propriétés très particulières des logarithmes.

e. Résoudre les équations suivantes :

i $2^x=3$

ii $\log(4-x^2)=2\log(1-x)+1$

5 [Activité] Logarithme naturel

La forme de la représentation graphique de F et surtout les deux dernières propriétés que nous avons démontrées rappellent ce qu'on connaît déjà des **fonctions logarithmiques**.

Nous appellerons ainsi **logarithme naturel** ou **logarithme népérien** (et nous noterons ln) la fonction définie par :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{array}$$

6 [Aller plus loin] Napier

John Napier (1550-1617), est considéré comme l'inventeur des logarithmes. Il était appelé en français Neper, d'où la dénomination de logarithme népérien ...
Plus d'infos sur http://fr.wikipedia.org/wiki/John_Napier.


Source : http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AJohn_Napier.jpg

7 [Activité] Le nombre *e*

a. Que peut-on dire de l'équation $\ln(x) = 1$?

b. Donner une estimation de la valeur de la solution de cette équation.

c. Définir le **nombre *e***.

8 [Aller plus loin] Un nombre étonnant !

Le **nombre *e*** est une des constantes fondamentales des mathématiques. Il apparaît dans de nombreuses situations ; par exemple :

- $e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
- $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \lim_{n \to +\infty} \sum_1^n \frac{1}{n!}$
- $e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}} \overset{not}{=} [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,\ldots]$

9 [Aller plus loin] Le même !

Montrer que $e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

10 [Activité] Réciproque du logarithme naturel

Nous avons vu que le logarithme naturel est une fonction dérivable, continue et strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Cette fonction est donc **bijective** de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et, comme telle, possède une **réciproque**, qu'on nommé **exp** [pour exponentielle, puisqu'on sait déjà que les logarithmes et exponentielles connues (de base $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$) sont réciproques les unes des autres.

Cette réciproque **exp** est elle-même dérivable, continue et croissante [sans démonstration formelle].

a. Représenter graphiquement sur un même repère la fonction **ln** et sa réciproque **exp**.

b. Exprimer les relations de réciprocité entre les fonctions $\ln$ et $\exp$ à l'aide de la composition.

c. Considérons le théorème suivant et sa démonstration :

Théorème : Si $x\in\mathbb{Q}$, alors $\exp(x)=e^x$

Démonstration :

La réciproque du logarithme naturel, exp, est une fonction telle que

$\ln(\exp(x))$ = [......................] pour tout $x\in$ [.............], car [ARG 1]

$\exp(\ln(x))$ = [.........] pour tout $x\in$ [..............], car [ARG 2

Donc pour tout x strictement positif et tout nombre $\alpha\in\mathbb{Q}$, on a :

x^α = exp(ln([.........])), car [ARG 3]

= $\exp(\alpha\cdot\ln(x))$, car [ARG 4]

Posons $x = e$: e^α = exp([.........]) = $\exp(\alpha\cdot\ln(e))$ = $\exp(\alpha)$, car [ARG 5].

Donner pour chaque [ARG] ci-dessus le ou les arguments nécessaires, et remplir chaque [......].

d. Nous avons donc montré que la réciproque du logarithme naturel est une fonction définie par $exp(x)=e^x, \forall x\in\mathbb{Q}$. Finalement, nous définissons $e^x=\exp(x), \forall x\in\mathbb{R}$ de façon à pouvoir considérer cette expression e^x pour toute valeur réelle.

11 [Activité] Propriétés de *exp*

On considère le

Théorème : Si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, alors $\exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$ et $[\exp(x)]^y=\exp(xy)$

ce qu'on peut également noter $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$ et $(e^x)^y=e^{xy}$

Démontrer ce théorème pour les valeurs de *x*,*y* possibles..

Indication : poser $e^x=X$ et $e^y=Y$, c'est-à-dire $\ln(X)=x$ et $\ln(Y)=y$ et utiliser les propriétés de ln pour conclure.

12 [Activité] Résumé intermédiaire des propriétés de *ln* et de *exp*

$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x \to \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt \end{array}$	$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x \to \exp(x) = e^x \end{array}$
$\ln(1) = 0$	$e^0 = 1$
ln est dérivable, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$	exp est continue, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x^y) = y\ln(x)$	$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ et $(e^x)^y = e^{xy}$
$\ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$	$e^{\ln}(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

13 [Activité] Calculer

1. Calculer sans machine :

a. $\log(1000)$

b. $\log_a(a^5)$

c. $\log(0{,}01)$

d. $\ln(e^{-2})$

e. $\log_3(\sqrt{81})$

f. $\log_7(-49)$

2. Résoudre :

a. $\log(x) = -2$

b. $\ln(x) = 1{,}5$

c. $\ln(20x) - 1 = \ln(x^2)$

d. $\ln(-20x+5) - 1 = \ln(1-x^2)$

Voir la théorie 1 à 7 et les exercices 1 à 5

14 [Activité] Dérivée de l'exponentielle

On considère le théorème :

Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\exp'(x) = \exp(x)$, ce qu'on note aussi $(e^x)' = e^x$

et la démonstration :

L'exponentielle est la réciproque d'une fonction dérivable, donc elle-même dérivable, car [ARG 1].

Sa dérivée s'obtient en dérivant les deux termes de la relation $\ln(e^x) = x$:

on obtient [....................] = [.....................], car [ARG 2]

d'où $(e^x)'$ = [........................]

Donner pour chaque [ARG] ci-dessus le ou les arguments nécessaires, et remplir chaque [......].

15 [Activité] Dériver et intégrer des fonctions avec ln et exp

1. Compléter les formules suivantes :

a. $[\ln(f(x))]' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b. $[\exp(f(x))]' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c. $[e^{f(x)}]' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

d. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

e. $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

f. $\int \exp(f(x)) \cdot f'(x) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

g. $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

h. $\int_a^b \exp(f(x)) \cdot f'(x) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

i. $\int_a^b e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \ln(2x^2+1)$

b. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1})$

c. $f(x) = \frac{1}{x}\ln(x)+1$

d. $f(x) = \ln(\sin(x))$

e. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2+1}$

f. $f(x) = e^{-2x}$

g. $f(x) = e^{\cos(x)}$

h. $f(x) = e^{\ln(x^2)}$

3. On lit dans la table numérique qu'une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(|x|)$ et non ln(x). Pourquoi ?

4. Déterminer une primitive pour les fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{3}{x+8}$

b. $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$

c. $f(x) = e^{-2x}$

d. $f(x) = (e^x+3)^2 3e^x$

e. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

f. * $f(x) = \frac{2}{e^x+1}$

5. Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a. $\int_0^1 \frac{4x}{x^2+3} \mathrm{dx}$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin(2x)}{\cos(2x)} \mathrm{dx}$

c. $\int_2^3 e^{-2x+1} \mathrm{dx}$

6. Déterminer une primitive F telle que $F(\frac{\pi}{2}) = 1$ pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)-1}$

Voir la théorie 8 et les exercices 6 à 16

16 [Activité] Applications

1. Calculer l'aire de la surface délimitée par l'axe Ox, les droites d'équations x=-7 et x=-1 et la courbe d'équation $y=\frac{2x}{x^2+3}$, puis entre

2. Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la surface délimitée par la courbe d'équation $y=\frac{1}{\sqrt{-x}}$ et les droites y=-e et y=-1.

17 [Aller plus loin] Applications +

1. Le Saussurstan comptait 3 millions d'habitants en 1950 et 5,6 millions en 2000. En supposant que la vitesse de croissance de la population saussurstanaise soit en tout temps proportionnelle à la taille de cette population :

a. Combien y aura-t-il d'habitants au Saussurstan en l'an 2050 ?

b. En quelle année la population franchira-t-elle le cap des 50 millions d'habitants ?

a. Quelle était la vitesse de croissance de la population en l'an 2000 ?

2. Etudier complètement les fonctions f de g définies par :

a. $f(x)=\ln^2(x)-1$ **b.** $g(x)=e^{x^2}-1$ **c.** $f(x)=\ln\frac{(x)}{x}$

Voir la théorie 9 et les exercices 17 à 25

18 [Aller plus loin] Exp/Log en base quelconque

a. Quelle est la définition connue de 2^x pour les différentes valeurs possibles de x entier positif, négatif, nul, nombre rationnel ?

b. Et pour les nombres irrationnels ?

c. Utiliser le logarithme naturel et l'exponentielle pour définir 2^x pour n'importe quelle valeur réelle de x, puis pour définir l'exponentielle de base a. puis le logarithme de base a.

d. Montrer qu'on peut alors consolider la démonstration de $F(x^\alpha)=\alpha\cdot F(x)$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

e. Montrer que $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

f. Enoncer et démontrer les propriétés de ces logarithmes et exponentielles en base a.

19 [Aller plus loin] Tout varie !

Calculer :

a. $\left(x^x\right)'$ **b.** $\left(x^{\ln(x)}\right)'$

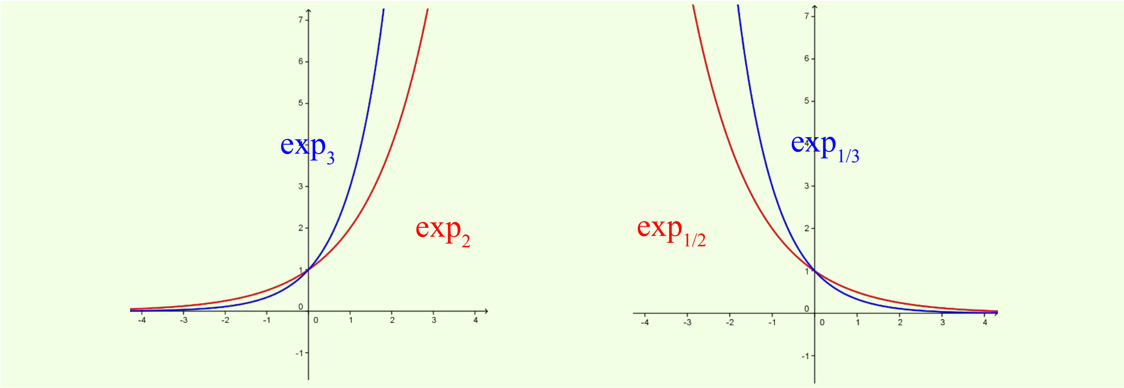
1 [Souvenirs] Exponentielles et logarithmes de base *a*

Définition «Fonction exponentielle de base *a*»

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Une **fonction exponentielle de base a** est une fonction de la forme

$$\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & a^x \end{array}$$

Exemple : représentation graphique des fonctions $\exp_2(x)$, $\exp_3(x)$, $\exp_{1/2}(x)$ et $\exp_{1/3}(x)$



Remarque : la définition de a^x n'est connue à ce stade que pour $x \in \mathbb{Q}$!

Ces fonctions permettent de modéliser des phénomènes à très forte croissance (a >1) ; elles sont **bijectives** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et admettent donc une **fonction réciproque**, qui est appelée **logarithme de base a**.

Définition «Logarithme de base *a*»

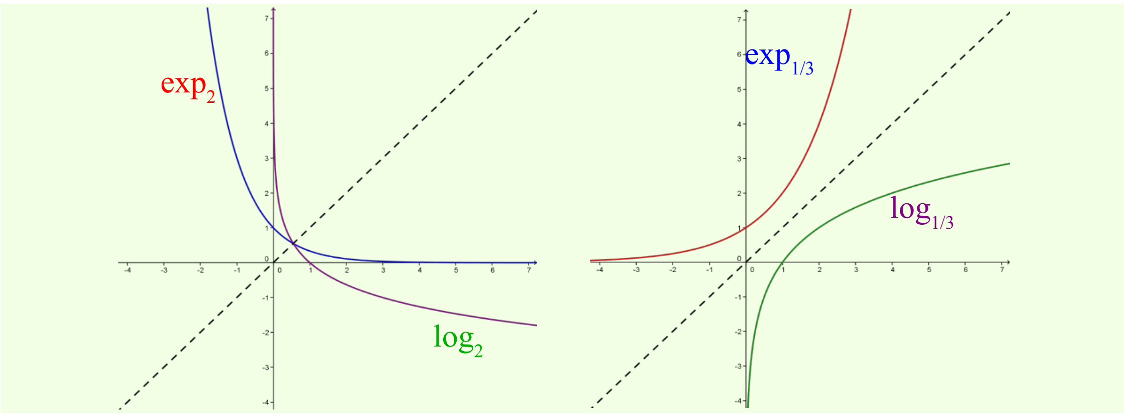
Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La **fonction logarithmique de base a** est la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base a. On écrit :

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \log_a(x) \end{array}$$

et on a donc par définition de «fonction réciproque» :

$$\log_a(\exp_a(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \exp_a(\log_a(x)) = x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

Exemple: représentations graphiques des fonctions $\exp_2$ et $\log_2$, puis $\exp_{1/3}$ et $\log_{1/3}$:



Méthodes et notions essentielles

Théorème [logarithmes]

Si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, alors on a:

1 $\log_a(a)=1$ et $\log_a(1)=0$

2 $\log_a(a^x)=x$ pour tout nombre réel x

3 $a^{\log_a(x)}=x$ pour tout nombre réel x strictement positif

4 $\log_a(x)=\log_a(y) \Leftrightarrow x=y$, pour tous nombres réels x et y strictement positifs

Théorème [propriétés des logarithmes]

Soit $u, v \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

1 $\log_a(u \cdot v)=\log_a(u)+\log_a(v)$

2 $\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$

3 $\log_a(u^c)=c \cdot \log_a(u)$ pour tout nombre réel c

Théorème (changement de base)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors on a: $\log_a(x)=\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Résoudre une équation logarithmique

1 Déterminer le domaine de définition de l'équation

2 Transformer si nécessaire l'équation jusqu'à arriver à une équation équivalente de la forme $\log_a(\textit{expression } 1)=\log_a(\textit{expression } 2)$

3 En déduire que $\textit{expression } 1=\textit{expression } 2$ en utilisant le fait que les fonctions logarithmes sont bijectives

4 Résoudre l'équation $\textit{expression } 1=\textit{expression } 2$

5 Ne garder que les solutions qui appartiennent au domaine de définition

Exemple: résoudre $\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1$

On détermine le domaine de définition de l'équation: $D=]5;+\infty[$

$$\log_7(x-5)+\log_7(x+1)=1 \Leftrightarrow \log_7(x-5)+\log_7(x+1)=\log_7(7)$$
$$\Leftrightarrow \log_7((x-5)(x+1))=\log_7(7)$$

$$(x-5)(x+1)=7$$

$$(x-5)(x+1)=7 \Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2)=0$$
$$x=6 \text{ ou } x=-2$$

$$S=\{6\}$$

Résoudre une équation exponentielle avec les logarithmes

Exemple: résoudre $2^x=3$

$$2^x=3 \Leftrightarrow \log(2^x)=\log(3) \quad [\text{ car la fonction log est bijective }]$$
$$\Leftrightarrow x \cdot \log(2)=\log(3) \quad [\text{par une propriété des log}]$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\log(3)}{\log(2)} \quad [\text{division par log(2)}]$$
$$\Leftrightarrow x \simeq 1{,}58 \quad [\text{calculatrice}]$$

Résoudre un problème exponentiel

Exemple : votre ancêtre a placé à la naissance de Jésus Christ deux sesterces sur un compte épargne à 1%. A combien s'élève votre compte en 2016 ? Et après combien de temps devient-il milliardaire ?

Après 1 an, le compte a $(2+0{,}01\cdot 2)=2\cdot(1+0{,}01)$ sesterces.

Après 2 ans : $2(1+0{,}01)+0{,}01[2\cdot(1+0{,}01)]=2\cdot(1+0{,}01)[1+0{,}01]=2\cdot(1+0{,}01)^2$

...

Après t ans : $C(t)=2\cdot(1+0{,}01)^t=2\cdot(1{,}01)^t$

En 2016 : $C(2016)=2\cdot(1+0{,}01)^{2016}=2\cdot(1{,}01)^n \overset{C}{=} 1030195246$ sesterces !

Pour devenir milliardaire : $C(t)=1000000000=2\cdot(1{,}01)^n$

on résout avec les logarithmes :

$$\begin{aligned} 1000000000=2\cdot(1{,}01)^n &\Leftrightarrow 500000000=(1{,}01)^n \\ &\Leftrightarrow \log(500000000)=\log[(1{,}01)^n] \\ &\Leftrightarrow \log(500000000)=n\cdot\log(1{,}01) \\ &\Leftrightarrow n=\frac{\log(500000000)}{\log(1{,}01)}\simeq 2013{,}01 \end{aligned}$$

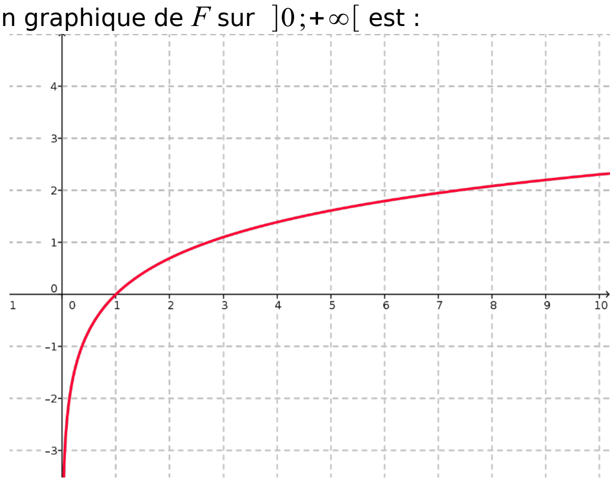
Il devient milliardaire un peu après 2013

2 [A savoir] Définition de *ln*

On considérons la fonction $f:]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=\dfrac{1}{x}$, puis la fonction $F:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ déterminée par $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a :

- ☐ F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $F'(x)=f(x)$ sur $]0;+\infty[$
- ☐ F est continue $]0;+\infty[$
- ☐ F est strictement croissante sur $]0;+\infty[$
- ☐ F est strictement négative sur $]0;1[$, $F(1)=0$, F est strictement positive sur $]0;+\infty[$
- ☐ $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$
- ☐ Une représentation graphique de F sur $]0;+\infty[$ est :



Théorème « Deux propriétés de la primitive de 1/x »

1 Si $x>0$ et $y>0$, alors $F(xy)=F(x)+F(y)$.
2 Si $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors $F(x^\alpha)=\alpha\cdot F(x)$

Définition « Ln »

La fonction définie par $ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \int_1^x \frac{1}{t}dt \end{array}$ est appelée **logarithme naturel** ou **logarithme népérien.**

3 [A savoir] Le nombre *e*

Définition

e est l'unique solution de l'équation $ln(x) = 1$.

On peut démontrer que *e* est un nombre irrationnel dont la valeur est 2,71828... On l'approche en général avec la valeur 2,72.

4 [Aller plus loin] Le même *e* !

Théorème

$e=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

5 [A savoir] Exponentielle *exp*

Définition

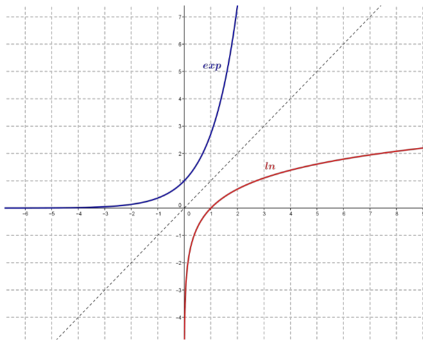
e est l'unique solution de l'équation $ln(x) = 1$.

On peut démontrer que *e* est un nombre irrationnel dont la valeur est 2,71828... On l'approche en général avec la valeur 2,72.

Définition

La fonction $exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est la réciproque de la fonction $ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$;
ce qu'on peut également noter

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & \exp(x)=\ln^{-1}(x) \end{array}$$



Représentation des fonctions ln et exp

Théorème «Propriétés de *exp* »

Si $x \in \mathbb{Q}$, alors $exp(x)=e^x$

Définition « e^x pour tout réel »

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $e^x = \exp(x)$

Théorème «Propriétés de *exp* »

Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $exp(x+y)=exp(x) \cdot exp(y)$ et $[exp(x)]^y = exp(xy)$

Relations de réciprocité entre *exp* et *ln*

- ☐ $\ln \circ \exp(x)=x \Leftrightarrow \ln(e^x)=x \,, \forall\, x \in \mathbb{R}$
- ☐ $exp \circ \ln(x)=x \Leftrightarrow e^{\ln(x)}=x \,, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$

Théorème «Dérivée de *exp* »

Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\exp'(x)=\exp(x)$, ce qu'on note aussi $(e^x)'=e^x$

6 [A savoir] Résumé des propriétés de *exp* et *ln*

Propriétés de ln et exp

- ☐ $\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \ln(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{array}$ et $\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \to & \exp(x)=e^x \end{array}$
- ☐ ln(1) = 0 et $e^0=1$
- ☐ ln est dérivable, continue,croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- ☐ exp est continue, dérivable et croissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$ et $(\exp(x))'=\exp(x)$ (ou $(e^x)'=e^x$)
- ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x=0$
- ☐ $\ln(xy)=\ln(x)+\ln(y)$ et $\ln(x^y)=y\ln(x)$; $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ et $(e^x)^y=e^{xy}$
- ☐ $\ln(e^x)=x \,, \forall\, x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln(x)}=x \,, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$

Exemple : calculer $\ln(\frac{1}{e^5})$

$$\ln(\frac{1}{e^5})=\ln(e^{-5})=(-5)\cdot\ln(e)=(-5)\cdot 1=-5$$

Exemple : résoudre l'équation $\ln(x-5)+\ln(x+1)=\ln(70)-\ln(10)$

On détermine le domaine de définition de l'équation: $D=]5;+\infty[$

$$\ln(x-5)+\ln(x+1)=\ln(70)-\ln(10) \Leftrightarrow \ln(x-5)+\ln(x+1)=\ln(\frac{70}{10})$$
$$\Leftrightarrow \ln((x-5)(x+1))=\ln(7)$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+1)=7 \Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \Leftrightarrow (x-6)(x+2)=0$$
$$x=6 \text{ ou } x=-2$$

$6\in D$ mais $-2\notin D$, donc $S=\{6\}$

7 [Aller plus loin] Exponentielles et logarithmes en base *a*

Nous savons définir 2^x pour des valeurs entières positives, négatives, nulle ou rationnelles de x. Mais quel sens lui donner pour des valeurs irrationnelles de x ?

Définition «exponentielles de base a »

Si $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, on a $a^x=\mathrm{e}^{x\cdot\ln(a)}$ est appelé **exponentielle de base *a***.

Cette dernière écriture montre que l'exponentielle de base a est définie pour tout nombre réel. Si on considère la fonction définie ainsi : $\exp_a : \begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \rightarrow & \exp_a(x)=e^{x\cdot\ln(a)}\end{array}$, on peut montrer que cette fonction est bijective.

Définition «logarithmes de base a »

Pour $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, le **logarithme en base *a*** est la réciproque de l'exponentielle de base a.

Propriétés «logarithmes et exponentielles en base a »

Si $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, on a :

- ☐ $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$
- ☐ $\log_a(a^x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$
- ☐ $a^{\log_a(x)}=x, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$
- ☐ $a^{x+y}=a^x\cdot a^y, \forall x\in\mathbb{R}$
- ☐ $a^{xy}=(a^x)^y, \forall x\in\mathbb{R}$
- ☐ $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y), \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$
- ☐ $\log_a(xy)=y\cdot\log_a(x), \forall x,y\in\mathbb{R}_+^*$

Dérivées «logarithmes et exponentielles en base a »

- ☐ $(ax)'=\ln(a)\cdot ax$
- ☐ $(\log_a(x))'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln(a)}$

Voir les exercices 1 à 5

8 [A savoir] Dériver et intégrer avec *ln* et *exp*

Dériver et intégrer avec ln et exp

- ☐ $(\ln(f(x)))'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ et $\left[e^{f(x)}\right]'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
- ☐ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+c$
- ☐ $\int \exp(f(x))\cdot f'(x)dx=\exp(f(x))+c$ ou $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)dx=e^{f(x)}+c$
- ☐ $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|\Big|_a^b$
- ☐ $\int_a^b \exp(f(x))\cdot f'(x)\,dx=\exp(f(x))\Big|_a^b$ ou $\int_a^b e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx=e^{f(x)}\Big|_a^b$

Exemple : déterminer $[\ln(\frac{1}{x^2+2})]'$ et $\left[e^{\cos(x^3)}\right]'$

$$[\ln(x^2+2)]'=\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}=\frac{2x}{x^2+2} \quad \text{et} \quad \left[e^{\cos(x^3)}\right]'=[\cos(x^3)]'\cdot e^{\cos(x^3)}=\sin(x^3)\cdot 3x^2\cdot e^{\cos(x^3)}$$

Exemple : déterminer $\int \frac{2\cos(x)}{\sin(x)+2}dx$

$$\int \frac{2\cos(x)}{\sin(x)+2}dx=2\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}dx=2\int \frac{(\sin(x)+2)'}{\sin(x)+2}dx=2\cdot\ln|\sin(x)+2|+c$$

Exemple : calculer $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\,e^{x^2}\,dx$

$$\int_0^{\sqrt{3}} 3x\,e^{x^2}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 2x\,e^{x^2}\,dx=\frac{3}{2}\cdot\int_0^{\sqrt{3}} (x^2)'e^{x^2}\,dx=\frac{3}{2}\cdot e^{x^2}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{3}{2}\cdot(e^{(\sqrt{3})^2}-e^{(0^2)})=\frac{3}{2}\cdot(e^3-1)$$

Voir les exercices 6 à 16

9 [A savoir] Applications

Problèmes d'optimisation ou d'étude de fonction

Les problèmes d'optimisation et d'étude de fonction comprenant des fonctions ln/exp se traitent de la même façon qu'avec d'autres foncions. Pour les calculs de limites, on utilisera sans démonstration : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

De façon générale, on peut dire que la croissance exponentielle « l'emporte » sur la croissance polynomiale et que celle-ci « l'emporte » sur la croissance logarithmique.

Problèmes de calculs d'aires ou de volumes de révolution

Nous pouvons comme dans le chapitre sur l'intégration utiliser les ln/exp pour résoudre des problèmes de calcul d'aires ou de volumes de révolution.

Problèmes de croissance exponentielle

De nombreux problèmes se basent sur le fait que la croissance d'une quantité $Q'(t)$ en fonction du temps t est proportionnelle à la quantité $Q(t)$ elle-même. On montre alors que le modèle adéquat à utiliser est donné par

$$Q(t)=Q_0\,e^{kt}\ .$$

où Q_0 est la quantité initiale et k le taux de croissance.

Exemple : un kg d'un élément radioactif inconnu est entreposé dans un tonneau. Après 100 ans, on constate qu'il en reste encore 995g.

a) Déterminer la fonction $Q(t)$ qui exprime la masse de cet élément après t années.

b) Quelle masse de cet élément restera-t-il après 2500 ans ?

c) Calculer la **demi-vie** de cet élément.

a) Soit $Q(t)$ la quantité restant après le temps t et $Q_0 = 1$ la quantité initiale [en kg].

On a : $Q(t)=Q_0\,e^{kt}=1\cdot e^{kt}=e^{kt}$.

On sait aussi qu'après 10 ans, il reste 995g, soit 0.995kg : $Q(100)=e^{k\cdot100}=0.995$

On peut en déduire k : $e^{k\cdot100}=0.995\Leftrightarrow\ln(0.995)=k\cdot100\Leftrightarrow k=\frac{\ln(0.995)}{100}\simeq-0.00005$

Ce nombre étant très petit, l'approximation risque de conduire à de grandes erreurs, on fera donc la suite des calculs en travaillant toujours avec la valeur exacte le plus longtemps possible.

a) $Q(t)=e^{kt}=e^{\frac{\ln(0.995)\cdot t}{100}}$

b) $Q(2500)=e^{k\cdot2500}=e^{\frac{\ln(0.995)}{100}\cdot2500}=e^{\ln(0.995)\cdot25}\simeq0.882\ \text{kg}$

c) La demi-vie est le temps nécessaire pour qu'il ne reste que la moitié de la quantité initiale ; d'où : on cherche t tel que

$$Q(t)=0.5Q_0\Leftrightarrow Q_0\cdot e^{k\cdot t}=0.5\,Q_0\Leftrightarrow\cdot e^{k\cdot t}=0.5$$

$$\Leftrightarrow\cdot\ln(0.5)=k\cdot t\Leftrightarrow\cdot t=\frac{\ln(0.5)}{k}=\frac{\ln(0.5)}{\frac{\ln(0.95)}{100}}=\frac{100\cdot\ln(0.5)}{\ln(0.995)}\approx13828.26\text{ans}$$

Voir les exercices 17 à 25

Exercices d'entraînement

Primitive de 1/x

1 On considère le

Théorème : Si $x>0$ et $\alpha\in\mathbb{Q}$, alors
$F(x^{\alpha})=\alpha\cdot F(x)$
et une démonstration :
Soit α un nombre réel strictement positif.
On a : $[\alpha F(x)]'=\alpha F'(x)$, car [ARG 1]

mais aussi: $[F(x^{\alpha})]'=\frac{1}{x^{\alpha}}(x^{\alpha})'$, car [ARG 2]

$=\frac{1}{x^{\alpha}}(\alpha x^{\alpha-1})$, car [ARG 3]

$=\alpha\frac{1}{x^{\alpha}}x^{\alpha-1}$, car [ARG 4]

$=\alpha\frac{1}{x^{\alpha}}x^{\alpha-1}$, car [ARG 5]

$=\alpha\frac{1}{x}$, car [ARG 6]

$=\alpha F'(x)$, car [ARG 7]

d'où: $(F(x^{\alpha}))'-(\alpha F(x))'=0$, car [ARG 8]

$(F(x^{\alpha})-\alpha F(x))'=0$, car [ARG 9]

ce qui implique que $(F(x^{\alpha})-\alpha F(x))'=C$ où C est une constante réelle, car [ARG 10]

Pour déterminer la valeur de la constante, on peut poser x = 1, car [ARG 11]

$F(1)-\alpha F(1)=C$, d'où $C=0$, car [ARG 12]

On obtient donc finalement la propriété :
$F(x^{\alpha})=\alpha\cdot F(x)$, car [ARG 13]

Donner les arguments.

2 Calculer sans machine :

a. log(10)
b. log(1)
c. $\log_a(a)$
d. $\log_a(a^4)$
e. log(0,001)
f. $\ln(\frac{1}{e^3})$
g. $\log_2(\sqrt{8})$

3 Est-il possible de calculer log(e)ln(10) sans calculatrice?

4 Résoudre:

a. $3^{2x+1}=7$
b. $\log(x)=-3$
c. $\log_2(x)=4{,}5$
d. $\ln(x)-2=\ln(2+x)$

5 Combien de chiffres y a-t-il dans la forme développée du nombre 2016^{2017} ?

Voir la théorie 1 à 7

Dériver/Intégrer

6 Déterminer les dérivées des fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=\ln(4x-5)$
b. $f(x)=\ln(\sqrt{3-x^2})$
c. $f(x)=\ln(3x^5)$
d. $f(x)=\ln((x^2+x-1)3)$
e. $f(x)=x\ln(x)-x$
f. $f(x)=\ln(\cos(x))$
g. $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
h. $f(x)=\ln(\ln(x))$
i. $f(x)=e^{5x}$
j. $f(x)=e^{x^3}$
k. $f(x)=e^{\sin(2x)}$
l. $f(x)=x^2e^x$

7 Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\ln(\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x+3}\cdot\sqrt[5]{3x-2})$.

8 Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale que prend la fonction f déterminée par $f(x)=x^2-8\ln(x)$ pour $x\in\mathbb{R}_+^{\times}$

9 Etudier les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=x\ln(x)$
b. $f(x)=\frac{1+2\ln(x)}{x}$
c. $f(x)=xe^x$
d. $f(x)=e^x(2x^2-3x)$
e. $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

10 Etudier les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=\ln(x)+\frac{1-x}{x}$
b. $f(x)=x-\ln(x)$
c. $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$
d. $g(x)=(x-2)^2e^x$

11 Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{dx}$.

12 Déterminer les primitives des fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=\frac{1}{x+2}$ sur $]2;+\infty[$

b. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]1;+\infty[$

c. $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ sur $]-1;+\infty[$

d. $f(x)=e^{-x}$

e. $f(x)=e^{3x}$

f. $f(x)=(e^x+1)^3 e^x$

g. $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$

13 Calculer :

a. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}\right)\mathrm{dx}$

b. $\int_0^1 \frac{4x}{x^2-4}\mathrm{dx}$

c. $\int_2^3 5e^{2x+1}\mathrm{dx}$

d. $\int_{-1}^{2} 3xe^{x^2-1}\mathrm{dx}$

e. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\mathrm{dx}$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{dx}$

14 Calculer :

a. $\int_0^{\pi} \sin(x)e^{\cos(x)}\mathrm{dx}$

b. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}}\mathrm{dx}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos(x)\mathrm{dx}$

d. $\int_1^e \ln(x)\mathrm{dx}$

15 Déterminer la primitive de la fonction f définie par $f(x)=5e^{2x}-3x$ dont la courbe représentative contient le point $(0;2)$.

16 Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifier précisément votre réponse en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les résultats vus au cours.

a. Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{100}}dt$. Alors F est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions f et g définies par $f(x)=\ln((x+1)^3)$ et $g(x)=3\ln(5x+5)$ sont deux primitives d'une même fonction.

Voir la théorie 8

Applications

17 Calculer l'aire de la surface délimitée par l'axe Ox, les droites d'équations $6x+2y=3$ et $x=1$ et la courbe d'équation $y=\frac{3}{2}e^x$.

18 Calculer l'aire de la surface comprise entre l'axe horizontal, les deux droites verticales $x=1$ et $x=-1$ et les courbes représentatives de $y=e^x$ et $y=e^{-x}$.

19 Soit la fonction f définie par $f(x)=2x\cdot\ln^3(x)$.

a. Montrer que $f'(x)=2\ln^3(x)+6\ln^2(x)$

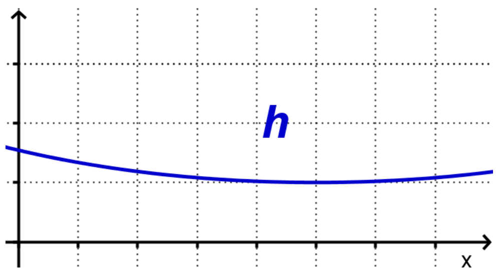
b. Déterminer les coordonnées du(des) point(s) de la représentation graphique de f où la tangente est horizontale. Donner la réponse sous forme exacte et simplifiée le plus possible.

c. Calculer l'équation de la droite tangente à la représentation graphique de f au point $(e;f(e))$.

d. Utiliser la calculatrice pour proposer une esquisse d'une représentation graphique de f sur laquelle faire apparaître les résultats précédents.

20 On suppose que la hauteur d'une ligne électrique par rapport au sol est donnée par la fonction h définie ainsi :

$h(x)=\frac{e^{x-1}+e^{-(x-1)}}{10}$, où x représente la distance au sol (horizontalement) par rapport à la base du poteau électrique rectiligne et $h(x)$ est la hauteur de la ligne électrique à cet endroit là (x et h sont mesurés en hectomètres).



a. A quelle hauteur (en mètres) du poteau électrique le câble est-il accroché ?

b. A quelle distance de la base du poteau (en mètres) le câble est-il le plus proche du sol ?

Exercices d'entraînement

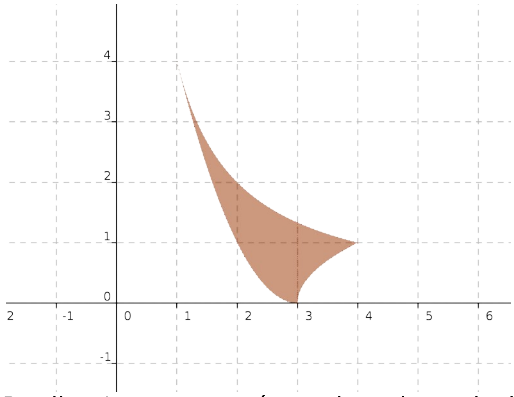
21 On considère la surface S délimitée par la courbe d'équation $y=\frac{6}{x}$ et les droites d'équations $y=x+1$ et x = 4.

a. Représenter S dans un repère orthonormé.

b. Calculer l'aire de S

c. Calculer le volume du corps de révolution obtenu en faisant tourner S autour de l'axe Ox.

22 Calculer l'aire de la surface représentée ci-dessous, délimitée par des représentations graphiques des fonctions f, g et h définies par $f(x)=(x-3)^2$, $g(x)=\sqrt{x-3}$ et $h(x)=\frac{4}{x}$.



N.B. il n'est pas nécessaire de calculer algébriquement les points d'intersection qui apparaissent clairement sur le schéma.

23 On considère les fonctions f et g définies par $f(x)=e^{-x}$ et $g(x)=\sqrt{x+1}$.

a. Esquisser une représentation graphique des fonctions f et g sur l'intervalle [−1; 3].

b. On désigne par S_1 la surface fermée délimitée par le graphe de g, l'axe Ox et les droites d'équation x=−1 et x=0.

On désigne par S_2 la surface fermée délimitée par le graphe de f , l'axe Ox et les droites d'équation x=0 et x=b (avec b > 0).

c. Mettre en évidence ces deux surfaces sur le graphique et calculer la valeur que doit prendre le paramètre b pour que les aires respectives A_1 et A_2 de S_1 et S_1 vérifient l'équation $A_1 = A_2$.

d. Calculer (en fonction de b) le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de $S_1 \cup S_1$ délimitée par le graphe de g, l'axe Ox et les droites d'équation x=−1 et x= 0.

24 A chaque instant t, la vitesse de désintégration d'une substance radioactive est proportionnelle à la masse restante de cette substance (la probabilité de désintégration étant la même pour chaque atome, le nombre d'atomes se désintégrant est proportionnel au nombre d'atomes restant). Autrement dit, si $M(t)$ est la masse restante à l'instant t, alors $M'(t)=\alpha M(t)$ avec α est une constante négative.

a. Un kg d'un élément radioactif inconnu est entreposé dans une grotte. Après 10 ans, on constate qu'il n'en reste plus que 950g.

i Déterminer la fonction $M(t)$ qui exprime la masse de cet élément après t années.

ii Quelle masse de cet élément restera-t-il après 250 ans ?

iii Calculer la demi-vie de cet élément.

b. La demi-vie du Plutonium 239 est de 5500 ans. Si, suite à un accident, cent grammes de Pu239 se répandent dans le sol :

i Donner la fonction qui exprime la masse de Pu239 restante t années après l'accident.

ii Quelle quantité restera-t-il après 1000 ans ? après 10'000 ans ?

25 Un corps porté à une température initiale $T(0)$, puis plongé dans un environnement à température constante M (avec $M<T(0)$) se refroidit, à chaque instant t, avec une vitesse proportionnelle à l'écart entre M et $T(t)$. Autrement dit : $T'(t)=\alpha(T(t)-M)$, où α est une constante négative qui dépend du corps en question. NB : Cette dernière égalité peut aussi s'écrire $(T(t) - M)' = \alpha\,(T(t) - M)$ puisque $(T(t) - M)' = T'(t) - M' = T'(t)$.

Une certaine quantité d'eau est portée à ébullition (100°C), puis laissée à refroidir dans un milieu à température constante de 18°C. Au bout de 5 minutes, la température de l'eau n'est plus que de 70°C.

a. Déterminer la valeur de la constante de refroidissement α .

b. Après combien de temps l'eau aura-t-elle une température de 19°C ?

c. Quelles sont les vitesses de refroidissement au début (100°C) et à la fin (19°C) de ce processus.

26 Déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x)=2^{15x}$.

Voir la théorie 9

« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé au calcul de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes.»

Pierre-Simon De Laplace, mathématicien, astronome, physicien et homme politique français (1749-1827) »

A savoir en fin de chapitre

Ln et exp

- ✔ définition de la fonction ln comme primitive de 1/x ;
- ✔ représentation graphique de ln ;
- ✔ propriétés de ln ;
- ✔ définition du nombre *e* ;
- ✔ définition de la fonction exp comme réciproque de ln ;
- ✔ propriétés de exp ;
- ✔ fonctions logarithmiques et exponentielles générales ;

Voir la théorie 1 à 7 et les exercices 1 à 5

Dériver/Intégrer

- ✔ dériver et intégrer des fonctions ln/exp ;
- ✔ étudier des fonctions ln/exp ;

Voir la théorie 8 et les exercices 6 à 16

Applications

- ✔ problèmes d'optimisation ;
- ✔ problèmes de calculs d'aire ;
- ✔ problèmes de volumes de révolution ;
- ✔ problèmes de (dé)croissance exponentielle.

Voir la théorie 9 et les exercices 17 à 25

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...
https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/4e/complements/ch02