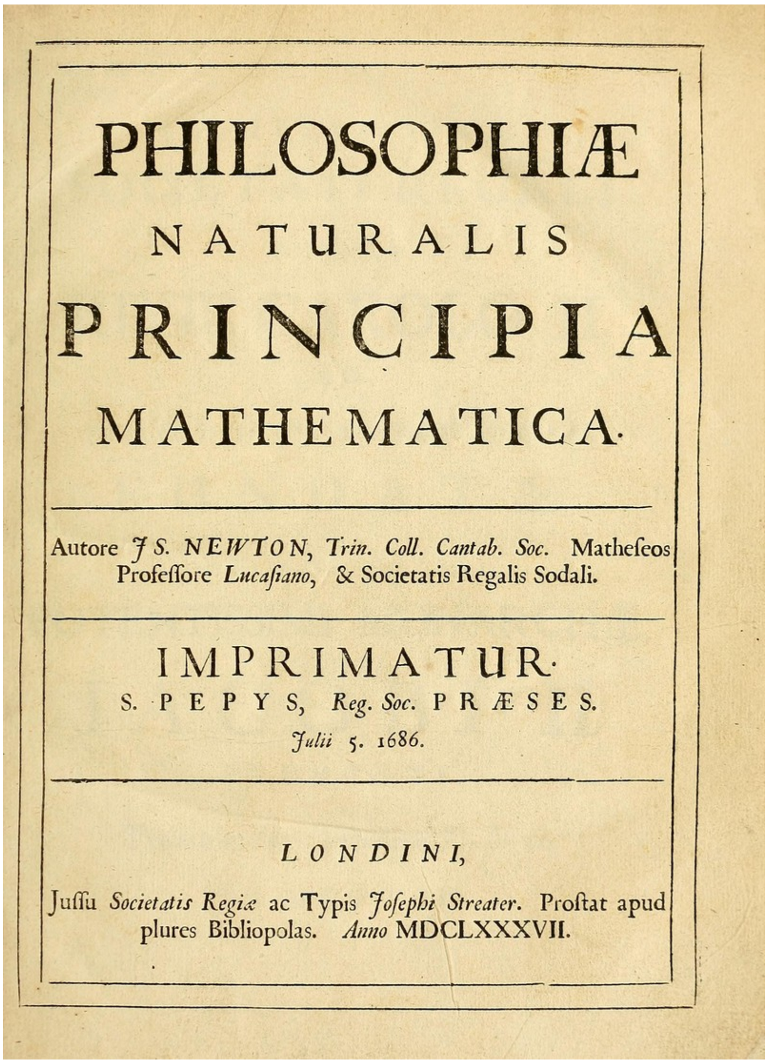
Ma4 - Chapitre 1 : Intégration

LEY


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Philosophiae naturalis principia mathematica (latin pour Principes mathématiques de la philosophie naturelle) est l'œuvre maîtresse d'Isaac Newton, publiée à Londres en 1687

Problème

Colin additionne les cubes des chiffres du nombre 2016. Il obtient 225. Il recommence avec les chiffres du résultat et obtient 141, puis successivement 66, 432, 99, 1458, 702, 351, 153, 153 , ... Les nombres suivants sont alors tous égaux à 153.
Combien y a-t-il d'années au 21e siècle (entre 2001 et 2100 inclus) pour lesquelles ce procédé permet d'aboutir au nombre 153 ? Justifier la démarche ...

1 [Aller plus loin] Sur les épaules de géants

Les calculs d'aire de figures géométriques simples comme les rectangles, les polygones et les cercles sont décrits dans les plus anciens documents mathématiques connus. La première réelle avancée au-delà de ce niveau élémentaire a été faite par Archimède, le génial savant grec. Grâce à la technique d'Archimède, on pouvait calculer des aires bornées par des paraboles et des spirales. Au début du 18e siècle, plusieurs mathématiciens ont cherché à calculer de telles aires de manière plus simple à l'aide de limites. Cependant, ces méthodes manquaient de généralité. La découverte majeure de la résolution générale du problème d'aire fut faite indépendamment par Newton et Leibniz lorsqu'ils s'aperçurent que l'aire sous une courbe pouvait être obtenue en inversant le processus de différentiation. Cette découverte, qui marqua le vrai début de l'analyse, fut répandue par Newton en 1669 et ensuite publiée en 1711 dans un article intitulé «De Analysis per Aequationes Numero Terminorum Infinitas». Indépendamment, Leibniz découvrit le même résultat aux environs de 1673 et le formula dans un manuscrit non publié daté du 11 novembre 1675.

L’origine de l’intégration est plus lointaine que le calcul différentiel et se trouve dans les problèmes d’ordre géométrique que se posaient les Grecs : calculs d’aires, de volumes, de longueurs,... On attribue à Eudoxe (-408 à -355) la détermination des volumes du cône et de la pyramide et à Archimède (-287 à -212) celles du centre de gravité d’une surface triangulaire, le rapport entre aire et le périmètre du cercle, le volume et l’aire de la sphère, le volume de la calotte sphérique, l’aire du « segment » de parabole délimité par celle-ci et une de ses cordes.

Les Arabes s’inspirent des travaux d’Archimède et les prolongent en calculant divers aires etvolumes. Ibn al-Haytham (mort après 1040) utilise cette méthode pour déterminer le volume d’un solide de révolution.

En s’inspirant d’Archimède, Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647), Roberval (1602-1675) et Fermat (1601-1665) réalisent de nombreuses quadratures, en particulier celle de l’aire sous la courbe d’équation $y =$ (n∈IN). Leibniz (1646-1716) et Newton (1642-1727) effectuent des progrès décisifs, organisés autour du théorème fondamental (réciprocité entre intégration et dérivation) et de notations adéquates. C’est à Leibnitz que l’on doit le symbole d’intégrale et à Johan Bernouilli, son disciple, le terme intégrale.

Cauchy, en 1823, essaie de définir l’intégrale sur un segment d’une fonction continue à l’aide des sommes dites «de Riemann». Riemann, en 1854, recherche à quelles conditions les sommes qui portent son nom convergent pour un « pas de subdivision » tendant vers zéro. Mais ni l’un ni l’autre ne réussissent à établir une théorie satisfaisante. Un premier exposé cohérent de l’intégrale ne sera présenté que par Darboux, en 1875. L’intégrale de Riemann puis l’intégrale de Lebesgue (Henri Lebesgue, 1902) marquent alors les esprits par leur formalisation aboutie.

L’intégration reste un sujet pour la recherche contemporaine; en témoignent des extensions telles que l’intégrale d’Itō, l’intégrale de Kurzweil-Henstock, ou la récente construction de Bongiorno (1996).

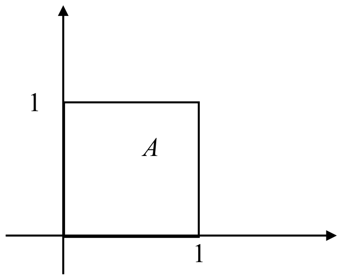
Bernhard Riemann. Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Aspect historique de quelques notions d’analyse
Faculté de Mathématiques, Université de Bordeaux, 2015
http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/profplus/docmaths/anabases/9_annexes/aspects_historiques.pdf

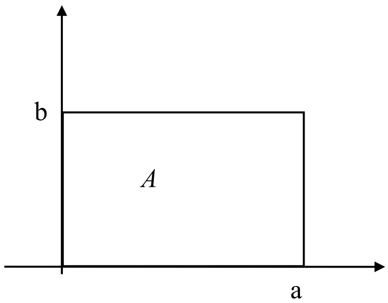
2 [Activité] Aires

Calculer les aires A des figures géométriques suivantes :

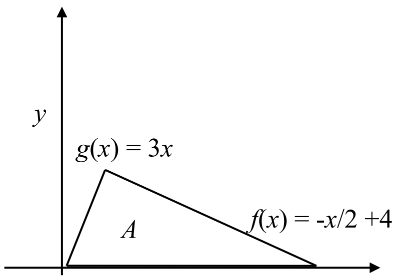
a.



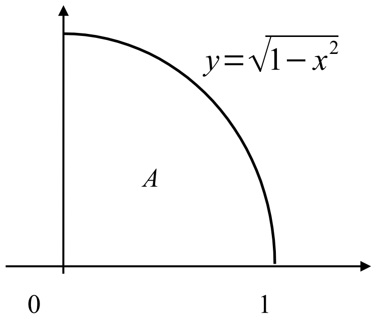
b.



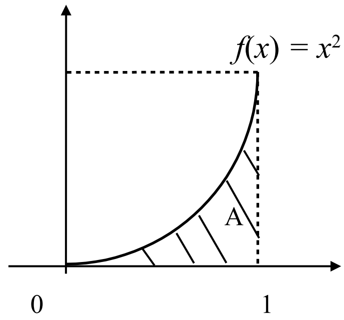
c.



d.



e.



3 [Activité] Sommes

1. Quel sens donner aux expressions suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{8} i^2$

b. $\sum_{i=1}^{n} i$

2. Même question pour :

a. $\sum_{i=k}^{n} 2i$

b. $\sum_{i=1}^{n} f(i)$, où f est définie par $f(x)=2x+1$

3. Donner d'autres exemples.

4. Quelles différences y a-t-il entre $\sum_{i=3}^{8} f(x^i)$, $\sum_{i=3}^{8} f(x_i)$, $\sum_{i=3}^{8} f^i(x)$ et $\sum_{i=3}^{8} f_i(x)$?

4 [Activité] A l'envers

Ecrire à l'aide de la notation $\sum$ les sommes suivantes :

a. 1 + 2 + 3 + ... + 36

b. 8 + 9 + ... + 299

c. 13 + 15 + 17 + ... + 1001

d. la somme des multiples de 3 positifs inférieurs ou égaux à 50

e. $1-2+3-4+5-6+\ldots-224$

f. $-5+10-15+20+\ldots+1300$

5 [Activité] Avec la calculatrice

Calculer avec la calculatrice :

a. $\sum_{i=1}^{100} i^3$

b. $\sum_{i=18}^{41} i^3$

6 [Activité] Approximer

a. Représenter graphiquement la surface S délimitée par l'axe 0x, les droites x = 0, x = 1 et la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.

b. On souhaite calculer l'aire A de S. Expliquer pourquoi cela semble compliqué.

c. Partager l'intervalle $[a;b]$ en 4 segments **équidistants**.

d. Construire 4 « grands rectangles » dont la somme des aires soit supérieure à celle de A.

e. Construire 4 «petits rectangles » dont la somme des aires soit inférieure à celle de A.

f. Déduire des points précédents une approximation de A par encadrement.

g. Utiliser GeoGebra pour explorer des situations où on choisit un nombre plus grand de petits et grands rectangles.

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 8

7 [Activité] Calculs d'aires par sommes infinies

Reprenons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et considérons maintenant un **partage** de [0;1] en n segments équidistants.

a. Que se passe-t-il si n devient très grand ?

b. Utiliser un passage à la limite pour déterminer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites x=0 et x=1.

8 [Activité] Généralisation

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

1. Soit $b > 0$ un réel. On cherche à calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=0$ et $x=b$.

a. Représenter graphiquement la situation.

b. Quel intervalle considérer ?

c. Expliciter un partage en n sous-intervalles équidistants.

d. Expliciter les **grandes sommes** et **petites sommes** de Riemann.

e. Déterminer A.

2. Considérons maintenant $0\leq a\leq b$ deux réels. Calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=a$ et $x=b$.

3. Et si $a\leq b\leq 0$? Et si $a\leq 0\leq b$?

9 [Activité] Intégrale de Riemann

1. Définir l'intégrale de Riemann en général.

2. Calculer $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x, \forall a\leq b$, $\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \forall a\leq b$ et $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x, \forall a\leq b$

3. Quels sont les avantages et les inconvénients de cet outil ?

10 [Activité] Calculs d'aires par sommes infinies +

Pour chacune des fonctions ci-dessous sur l'intervalle indiqué :

a. f définie par $f(x)=x^2+x+1$ sur $[a;b]=[0;1]$;

b. f définie par $f(x)=x^2+1$ sur $[a;b]=[0;2]$;

c. f définie par $f(x)=-2x+6$ sur $[a;b]=[1;3]$;

d. f définie par $f(x)=3x^2$ sur $[a;b]=[0:2]$;

e. f définie par $f(x)=x^2$ sur $[a;b]=[1:2]$;

f. f définie par $f(x)=x^2+x$ sur $[a;b]=[0:2]$.

On s'intéresse à l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$. Pour cela :

i représenter graphiquement f sur l'intervalle considéré ;

ii donner l'expression algébrique correspondant aux nombres Δx ; x_0 ; x_1 ; x_2 ; … ; et x_i ; … ; et x_n nécessaires au partage de l'intervalle considéré.

iii exprimer algébriquement la petite somme de Riemann en indiquant clairement les étapes des calculs ;

iv utiliser la notation sigma et les formules de la table CRM (p.15) pour simplifier l'écriture de la petite somme de Riemann ;

v calculer la limite quand n tend vers l'infini de la petite somme de Riemann en indiquant clairement les étapes des calculs ;

vi en déduire une valeur exacte de l'aire recherchée en admettant que la limite de la grande somme de Riemann donnerait le même résultat.

11 [Activité] Intégrale = aire ?

1. Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ainsi que l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites $x=a$ et $x=b$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=6$

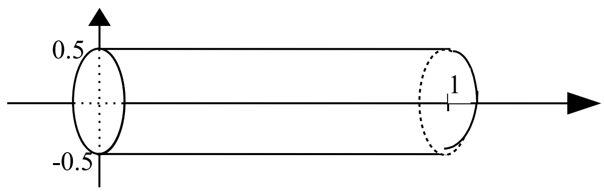
2. Donner l'interprétation géométrique d'un calcul d'intégrale comme étudié jusque-là.

12 [Aller plus loin] Volume ?

En s'inspirant des calculs d'aires de surfaces par limite d'approximations par des rectangles, imaginer un moyen pour calculer le volume d'un cône droit de rayon 4 et de hauteur 8, puis effectuer ce calcul.

13 [Aller plus loin] Valable ?

On propose le procédé suivant pour le calcul du volume du cylindre de hauteur 1 et de rayon 0.5 :



on commence par coucher le cylindre, puis on découpe l'intervalle [0;1] en n parties de longueur $\frac{1}{n}$, ce qui permet d'obtenir n petits cylindres dont on peut calculer le volume : il vaut $\frac{1}{n}\pi(0.5)^2$; on fait enfin tendre n vers l'infini pour obtenir $V=\lim_{n\to\infty} n\frac{1}{n}\pi(0.5)^2=\pi(0.5)^2$;on retrouve bien le résultat obtenu en appliquant la formule du volume du cylindre donne. Que penser de ce raisonnement ?

14 [Activité] Qu'est-ce qu'une intégrale ?

Comment se représenter le concept d'intégrale de façon judicieuse ?

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Tout calcul de dérivée en un point est un calcul de limite du type "indétermination $\frac{0}{0}$ "

b. Tout calcul d'intégrale est un calcul de limite du type "indétermination $0\cdot\infty$ "

c. Calculer une intégrale (de surface) et une aire c'est la même chose.

d. L'outil intégrale sert exclusivement à essayer de mesurer une surface.

15 [Activité] Toujours intégrable ?

1. Soit la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-\sqrt{2})^2}, \text{si } x\neq\sqrt{2}\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$ et [*a*;*b*] = [0;2].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

2. Soit $f(x)=\begin{cases}1, \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0, \text{sinon}\end{cases}$ et [*a*;*b*] = [0;1].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

3. La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse ?

Conjecture : Toutes les fonctions sont intégrables sur un intervalle [*a*;*b*] donné.

4. Soit $f(x)=\begin{cases}1, \text{si } x\in[0;1[\\ 0, \text{si } x=1\end{cases}$ et [*a*;*b*] = [0;1].

a. Que peut-on dire de s_n et S_n ?

b. Qu'en déduit-on quant à $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?

5. Il existe une condition **suffisante mais non nécessaire** qui garantit l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle ; quelle est-elle ?

16 [Aller plus loin] Améliorer la définition

Soit $f(x)=\begin{cases}x, \text{si } x\in[0;1[\\ 0, \text{si } x=1\end{cases}$.

1. Que penser de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?

2. Comment pourrait-on améliorer notre définition actuelle de l'intégrale ?

17 [Activité] Critère d'intégrabilité

Représenter à l'aide de diagramme de Venn les ensembles D, C et I des fonctions respectivement dérivables, continues et intégrables en identifiant les inclusions et en illustrant avec des exemples.

Voir la théorie 4 à 7 et les exercices 9 à 14

18 [Activité] Interlude : les primitives

Considérons la définition suivante : F est une **primitive** de f sur I $\Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x \in I$.

Chercher une primitive F d'une fonction f donnée, c'est donc se poser la question suivante: « de quelle fonction F la fonction f est-elle la dérivée?

1. Trouver une primitive F (sur $\mathbb{R}$) de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$. Y a-t-il plusieurs solutions ? Justifier.

2. Trouver une primitive F de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ telle que $F(1)=2$?

3. Trouver une primitive F de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ telle que $F(1)=2$ et $F(2)=1$.

4. Peut-on trouver une primitive de la fonction f déterminée par $f(x)=x^2$ qui ne soit pas de la forme $F(x)=\frac{x^3}{3}+c$?

5. Enoncer un théorème « Relation entre toutes les primitives » qui permet d'établir quelles sont toutes les primitives d'une fonction donnée.

6. Le démontrer.

Remarque : le lien entre intégrale et primitive ne paraît pas très évident ... Pourtant il existe bel et bien – voir plus loin... Ainsi, on utilise aussi la notation suivante : $\int f(x)dx$ représente toutes les primitives d'une fonction f donnée ; on parle d'**intégrale indéfinie**.

7. Déterminer : $\int x^3 dx$, $\int x^4 \mathrm{d}x$, $\int x^{45} \mathrm{d}x$, $\int x^n \mathrm{d}x$.

8. Interpréter graphiquement les résultats obtenus précédemment.

19 [Activité] Encore des primitives

Rappeler les formules de dérivation vues en 3ᵉ, qui sont à mettre en relation avec la recherche de primitive.

1. Déterminer une primitive de $f(x)=x^4+5x^3-\frac{1}{2}x2-7$.

2. Déterminer toutes les primitives de $f(x)=x^4+5x^3-\frac{1}{2}x2-7$.

20 [Activité] Déterminer une primitive

Déterminer une primitive pour les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)= -3x+7$

b. $f(x)=x^4-2x+4$

c. $f(x)= (3x)^5$

d. $f(x)=(5x+2)^2$

e. $f(x)=(4-2x)^5$

f. $f(x)=8x(4x^2+7)^5$

g. $f(x)=(3x^2-2)(x^3-2x+4)^6$

h. $f(x)=(6x^2-4)(x^3-2x+4)^6$

i. $f(x)=(2-3x^2)(x^3-2x+4)^6$

j. $f(x)=\frac{2}{x^2}$

k. $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

l. $f(x)=\frac{1}{x^6}-\frac{2}{x^2}$

m. $f(x)=\frac{x^5-3}{x^4}$

n. $f(x)=\frac{3x^2}{(1+3x^3)^4}$

o. $f(x)=\frac{2x+1}{(2x^2+2x+6)^3}$

p. $f(x)=x^2\sqrt{x^5}$

q. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$

r. $f(x)=\frac{3x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

s. $f(x)=\cos(4x)$

t. $f(x)=1+\tan^2(4x)$

u. $f(x)=2\sin(x)\cos^5(x)$

v. $f(x)=\frac{\cos(x)}{(2\sin(x)-1)^2}$

Voir la théorie 8 à 9 et les exercices 15 à 17

21 [Activité] Calculer des intégrales plus efficacement ?

Etape 1 : avec les propriétés des intégrales

On considère la surface S délimitée par l'axe $0x$ et la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=x^3-x^2-6x$.

a. Représenter S.

b. Poser le calcul d'intégrale qui permet de calculer son aire A.

c. Que penser de ce calcul ?

22 [Activité] Propriétés de l'intégrale

1. Rappel sur les intégrales de base : nous savons que, pour tout choix possible de a et b des nombres réels tels que $a < b$:

a. [I1] $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x=b-a$: démontré avec la définition de l'intégrale et confirmé par un calcul d'aire algébrique

b. [I2] $\int_a^b k\,\mathrm{d}x=k(b-a)$: démontré avec la définition de l'intégrale et confirmé par un calcul d'aire algébrique

c. [I3] $\int_a^b x\,\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$: démontré par un calcul géométrique d'aire

d. [I4] $\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$: démontré avec la définition de l'intégrale

e. [I5] $\int_a^b x^3\,\mathrm{d}x=\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$: peut être démontré avec la définition de l'intégrale

2. On énonce ci-dessous le **Théorème « Propriétés des intégrales »**

Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a;b]$. Alors on a :

a. [PrI1] $k\,f$ est intégrable sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\ \forall k\in\mathbb{R}$

b. [PrI2] $(f+g)$ est intégrable. sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

c. [PrI3] $(f-g)$ est intégrable. sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

d. [PrI4] $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : c'est aussi vrai si $a < b < c$ et f intégrable sur $[a;c]$!

e. [PrI5] si $f(x)\geq 0, \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

f. [PrI6] si $f(x)\leq 0, \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

g. [PrI7] si $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Illustrer ces propriétés.

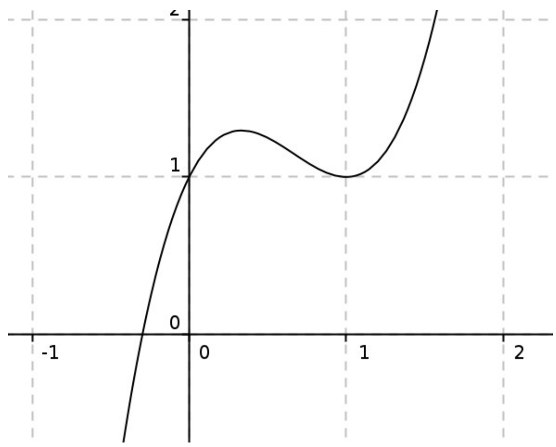
3. Résoudre l'exemple de l'activité précédente en s'aidant de ces propriétés et des intégrales de base connues. Que penser de cette méthode de calcul d'intégrale ?

4. Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$. Nous avons défini $\int_a^b f(x)\,dx$ pour $a\leq b$.

Quel sens donner à $\int_a^a f(x)\,dx$ ou à $\int_b^a f(x)\,dx$, par exemple à $\int_1^1 x^2\,dx$ ou à $\int_2^1 x^2\,dx$?

23 [Activité] Calculer des intégrales plus efficacement ? Etape 2 : lien entre intégrales et primitives ...

1. On considère la fonction f définie graphiquement ci-contre et deux inconnues : la constante a et la variable x, appartenant à l'axe des abscisses.



Prérequis et activités de découverte

On considère l'aire A délimitée par les droites verticales passant par $(a;0)$ et $(x;0)$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f. Cette aire dépend des choix de a et x.

a. On choisit $a=0$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- **i** $A(0)=0$
- **ii** $A(1)<A(2)$
- **iii** Si f décroît sur un intervalle, alors A décroît sur cet intervalle.
- **iv** $A'(x)>0, \forall x\in[1;2]$
- **v** [aller plus loin] $A''(x)<0, \forall x\in[1;2]$

b. On choisit $a = 0$ et $f(x) = x$ pour $x\geqslant 0$.

- **i** Calculer $A(1)$ et $A(3)$.
- **ii** Déterminer $A(x)$, $\forall x\geq 0$
- **iii** Mêmes questions pour $f(x) = 2x$ puis $f(x) = 2x + 3$.

c. Proposer une conjecture établissant le lien entre les fonctions A et f.

d. On choisit $a = 2$ et $f(x) = x$ pour $x\geqslant 0$.
Déterminer $A(x)$, $\forall x\geq 0$ et comparer avec le cas $a = 0$.

e. On choisit $a = 3{,}5$ et $f(x) = x$ pour $x\geqslant 0$.
Déterminer $A(x)$, $\forall x\geq 0$ et comparer avec le cas $a = 0$.

f. Proposer une conjecture établissant l'effet du changement de a sur A.

2. Théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) : relation entre intégrale et dérivée

Soit $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et $x_0\in[a;b]$.

On définit une nouvelle fonction F définie par $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t, \forall x\in[a;b]$.

Alors on a : F est dérivable et $F'(x)=f(x), \forall x\in]a;b[$

a. Illustrer avec des exemples.

b. Pourquoi appelle-t-on ce théorème « théorème fondamental».

c. Comment démontrer ce théorème ?

3. Théorème de la moyenne

Soit $f:[a;b]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Alors il existe au moins un $c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\cdot(b-a)$

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer ce théorème.

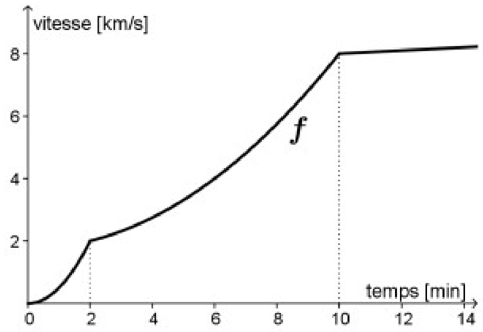
c. Pourquoi l'appelle-t-on « théorème de la moyenne » ?

d. Quel est le nombre c qui satisfait la conclusion du théorème de la moyenne pour l'intégrale donnée, et quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$?

- **i** $\int_1^3 x^2\,\mathrm{d}x$
- **ii** $\int_0^2 \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ (en utilisant le thm. fond I)

e. Une fusée doit lancer un satellite sur orbite. Le graphique ci-contre représente la vitesse prévue du lanceur (en km/s) en fonction du temps (en minutes) après les décollage.

On s'intéresse à la seconde phase du vol (entre 2 et 10 minutes après le décollage) et on modélise cette phase par la fonction f définie par $f(t)=\frac{t^2}{16}+\frac{7}{4}$.



i Calculer prévue la vitesse moyenne du lanceur sur l'intervalle [2;10] (réponse en valeur exacte).

ii À quel instant précis t (en minutes) le lanceur atteint-il cette vitesse ?

4. Démontrer le « théorème fondamental».

5. **Théorème fondamental II** (du calcul différentiel et intégral) : relation entre calcul d'intégrale et primitive - Théorème de Newton-Leibnitz

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a, b \in I$ et G une primitive de f sur I.

Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(x)\Big|_a^b = G(b)-G(a)$.

a. Illustrer avec des exemples.

b. Démontrer.

c. Quel est l'intérêt de ce théorème ?

d. Calculer les intégrales suivantes :

i $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ **iii** , $\int_0^1 x^{45}\,\mathrm{d}x$ **v** $\int_a^b x^n\,\mathrm{d}x$

ii , $\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x$ **iv** , $\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ **vi** $\int_0^1 (x^4+5x^3-\frac{1}{2}x^2-7)\,\mathrm{d}x$

e. Calculer $\int_0^3 x^3-x^2-6x\,\mathrm{d}x$

6. Utiliser la calculatrice pour calculer une intégrale.

24 [Activité] Approche graphique de la notion de primitive

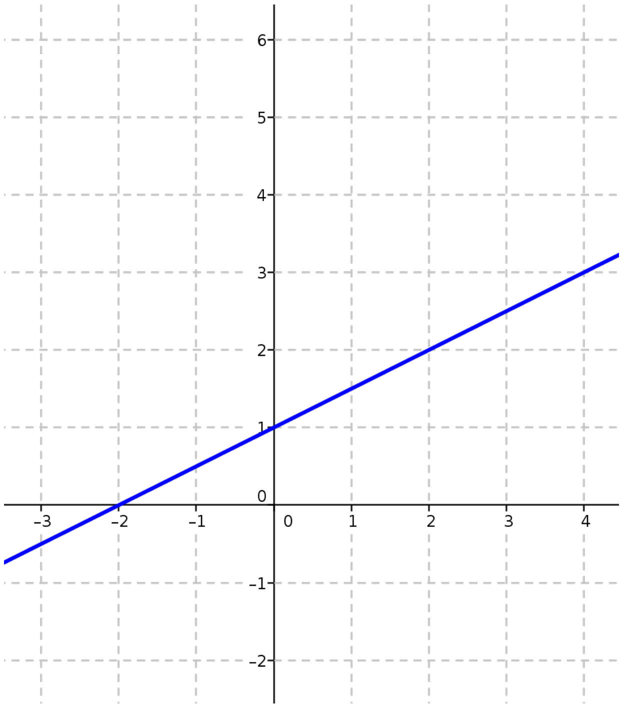
1. On considère le tableau suivant avec quelques valeurs de la dérivée d'une fonction f définie sur l'intervalle [-3;5] :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x)$	-1	0	0.5	1	2	0	-0.5	-1	-2

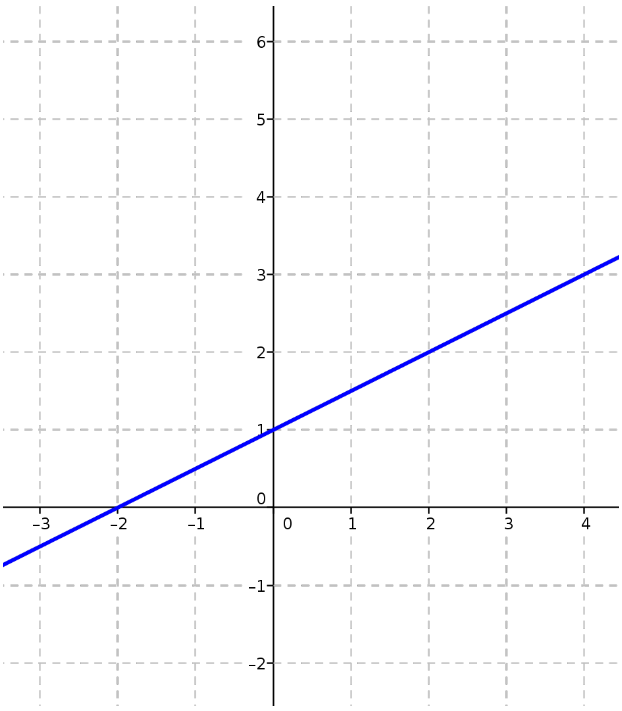
Esquisser une représentation graphique possible de f.

2. On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les trois cas. Dans les 3 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

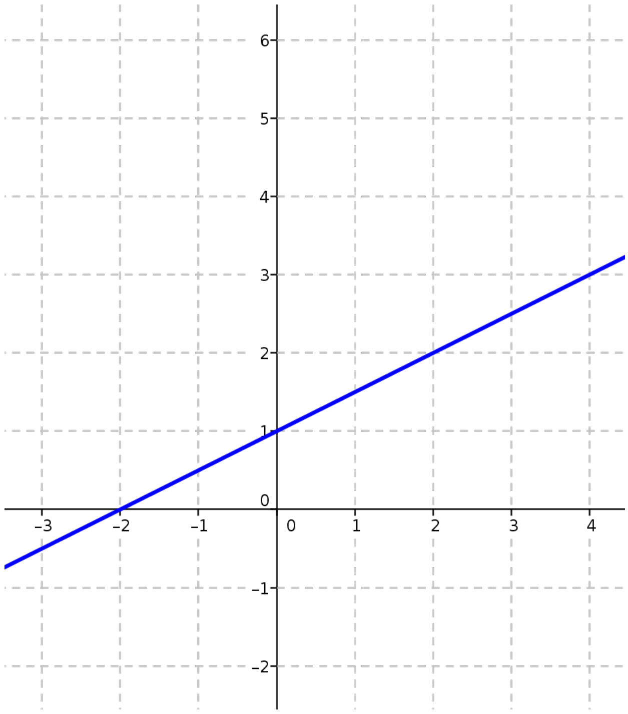
a. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :



b. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive F de f définie par $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$:

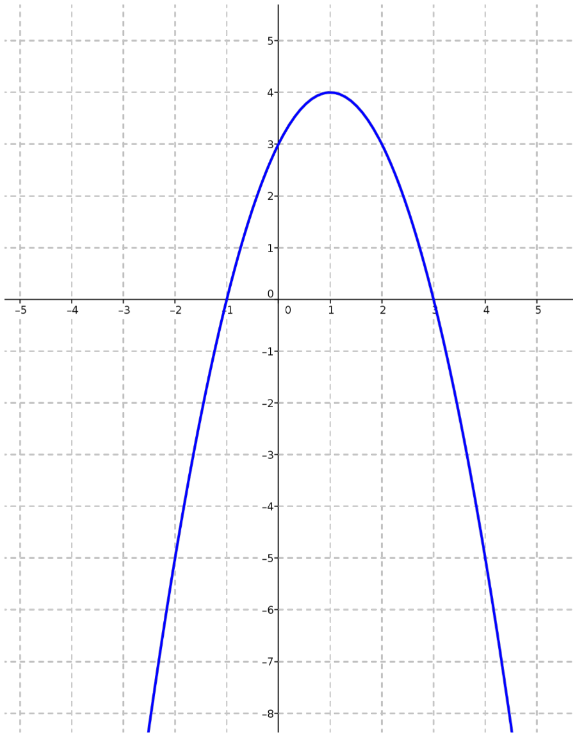


c. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive G de f définie par $G(x)=\int_1^x f(t)dt$:

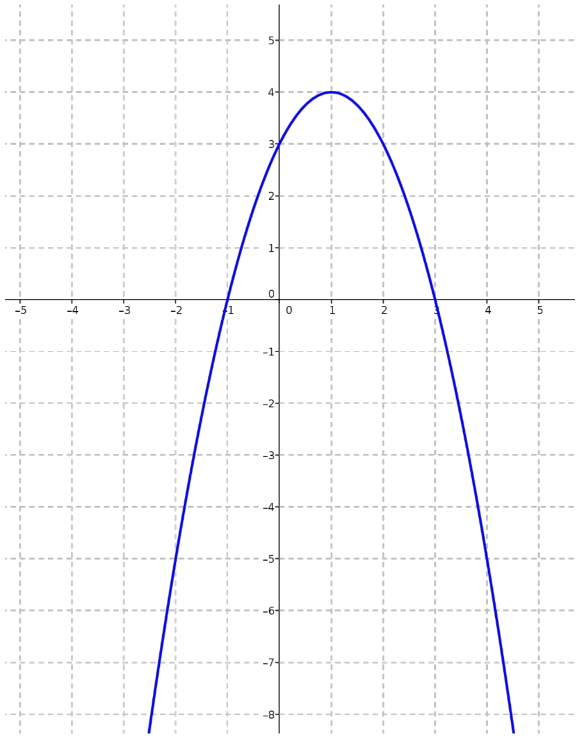


3. On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les deux cas. Dans les 2 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

a. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :

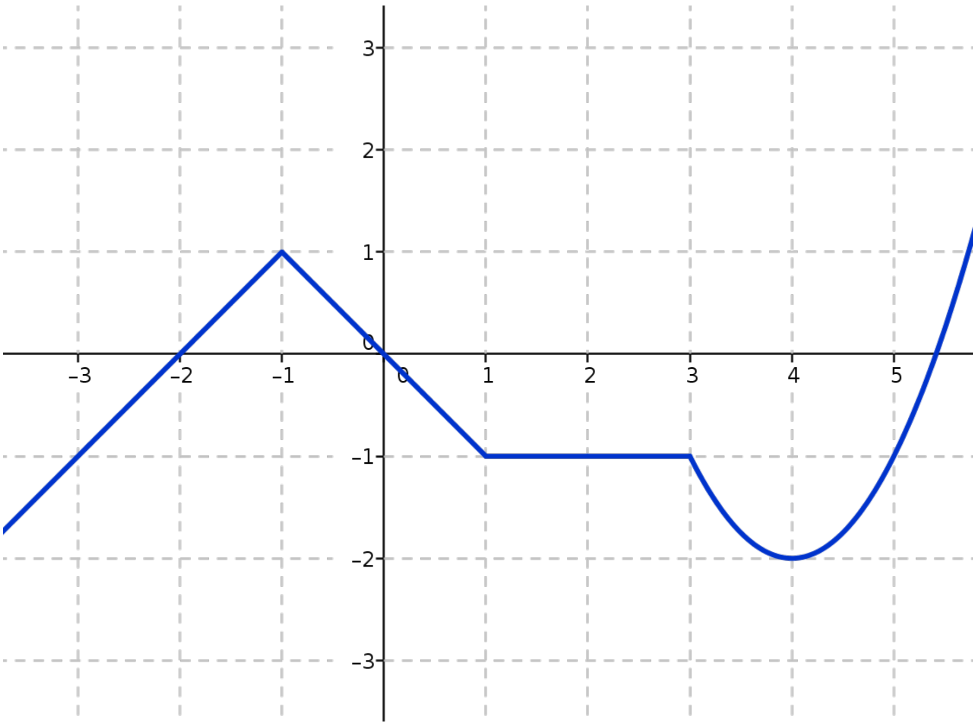


b. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive F de f définie par $F(x)=\int_2^x f(t)dt$:

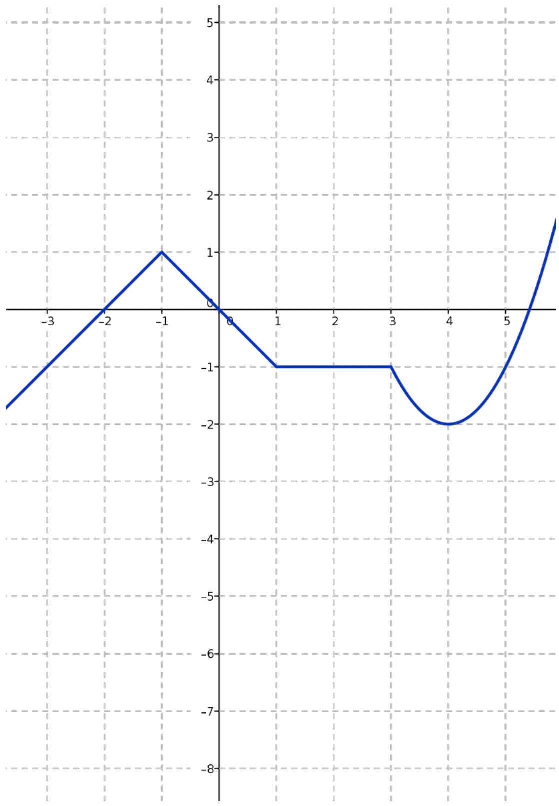


4. On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les deux cas. Dans les 2 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

a. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :

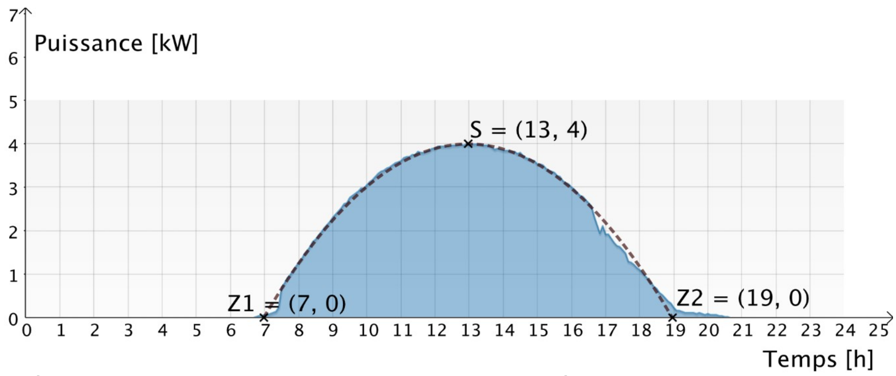


b. Représenter graphiquement sur le repère ci-contre la primitive F de f telle que $F(2)=0$:



Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 18 à 30

25 [Aller plus loin] Moyenne



On a représenté ci-dessus le graphique de la production d'énergie d'une installation photovoltaïque lors d'une belle journée d'été. Ce graphique indique la puissance produite en fonction de l'heure de la journée.

On peut approcher ce graphique avec une parabole (représentée en traits-tillés) de sommet $S(13\,;4)$ et de zéros $Z_f=\{7\,;19\}$.

a. Déterminer l'équation développée de cette parabole.

b. La quantité d'énergie produite se mesure en multipliant la puissance par le temps (l'unité de mesure est le kilowatt-heure [kW·h]). Cela correspond à l'aire sous la courbe. Calculer l'énergie produite par cette installation en utilisant la fonction f ci-dessus entre 7h et 19h.

c. Calculer la puissance moyenne de l'installation entre 7h et 19h.

d. Déterminer par lecture graphique à quelle(s) heure(s) de la journée cette puissance est-elle atteinte ? (Illustrer clairement la réponse sur le graphique).

Prérequis et activités de découverte

26 [Activité] Aires

1. Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{2x}$ et $g(x)=\frac{x^2}{16}$. On considère le domaine S compris entre les courbes représentatives des fonctions f et g.

a. Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection de ces deux fonctions.

b. Calculer l'aire de S en donnant la réponse sous forme exacte simplifiée au maximum.

2. Considérons les représentations graphiques de deux fonctions continues f et g données et $A=(a;f(a))$ et $B=(b;f(b))$ deux points d'intersection. Déterminer une méthode générale pour calculer l'aire de la surface délimitée par ces deux courbes entre A et B.

27 [Activité] Volumes de révolution

1. Nous savons déjà que le calcul intégral permet de déterminer l'aire de surfaces à priori difficiles à mesurer. Pour autant que ces surfaces soient délimitées par des graphes de fonctions continues, nous savons aussi que les intégrales dont nous aurons besoin existent, et que nous sommes capables de les calculer dans les cas où nous pouvons déterminer les primitives nécessaires au calcul. Imaginer des situations dans lesquelles nous sommes dans l'impossibilité de déterminer l'aire d'une surface donnée.

2. Nous avons aussi vu un cas où le calcul intégral permet de déterminer un volume. Nous allons essayer de généraliser l'approche vue à cette occasion.

a. Donner la définition d'un **corps de révolution** et d'un **volume de révolution**. Donner des exemples.

b. Déterminer une méthode générale pour calculer le volume de révolution déterminé par une courbe connue.

c. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle de centre O=(0;0) et de rayon 1 autour de la droite $y = 0$.

d. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle de centre O=(0;0) et de rayon r autour de la droite $y = 0$.

e. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation de la droite d'équation $y = 2x + 1$ autour de l'axe Ox entre $a = -0.5$ et $b = 2$, puis entre $a = 0$ et $b = 2$.

3. Déterminer le volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h.

4. Calculer le rapport du volume de la sphère de rayon r à celui du cylindre qui lui est circonscrit.

28 [Aller plus loin] Un peu d'histoire

Archimède, par Domenico Fetti, 1620, Musée Alte Meister, Dresde (Allemagne)

Archimède naît à Syracuse vers 287 av. J.-C. et y meurt en 212 av. J.-C. lors du siège des romains, des mains d'un soldat malgré la volonté du général Marcus Claudius Marcellus de ne pas s'en prendre à lui.

On dit qu'Archimède aurait souhaité que le résultat que nous venons d'établir (Act 27.4) soit gravé sur sa tombe ! Cicéron (106-43 av. J.-C.) raconte dans *Les Tusculanes* comment il a découvert la tombe d'Archimède grâce à une sphère inscrite dans un cylindre !

«Je ne puis considérer sa vie [Denys de Syracuse] comme méprisable ou détestable. Je la comparerai aux vies de Platon et d'Archytas de Tarente, hommes savants et pleins de sagesse. De la même ville, je ferai surgir en l'enlevant à sa poussière et à sa baguette un pauvre homme modeste qui a vécu longtemps après : Archimède. Pendant que j'étais questeur en Sicile [en 75 av JC], je fus curieux de m'informer de son tombeau à Syracuse, où je trouvai qu'on le connaissait si peu, qu'on disait qu'il n'en restait aucun vestige; mais je le cherchai avec tant de soin que je le déterrai enfin sous des ronces et des épines. Je fis cette découverte à la faveur de quelques vers, que je savais avoir été gravés sur son monument, et qui portaient qu'on avait placé au-dessus une sphère et un cylindre. M'étant donc transporté près de la porte Agrigente, dans une campagne couverte d'un grand nombre de tombeaux, et regardant de toutes parts avec attention, je découvris sur une petite colonne qui s'élevait par-dessus les buissons, le cylindre et la sphère que je cherchais. Je dis aussitôt aux principaux Syracusains qui m'accompagnaient, que c'était sans doute le monument d'Archimède. En effet, sitôt qu'on eut fait venir des gens pour couper les buissons, et nous faire un passage, nous nous approchâmes de la colonne, et lûmes sur la base l'inscription, dont les vers étaient encore à demi lisibles, le reste ayant été effacé par le temps. Et c'est ainsi qu'une des plus illustres cités de la Grèce, et qui a autrefois produit tant de savants, ignorerait encore où est le tombeau du plus ingénieux de ses citoyens, si un homme de la petite ville d'Arpinum n'était allé le lui apprendre.»

Cicéron, Les Tusculanes [5,23] XXIII

Benjamin West (1797) : Ciceron découvrant la tombe d'Archimède

29 [Aller plus loin] Aire latérale du cône ?

En suivant une procédure analogue à celle de l'intégrale de Riemann pour le calcul d'une aire, nous allons calculer l'aire latérale du cône de base circulaire de rayon R et de hauteur H (sans l'aire de la base).

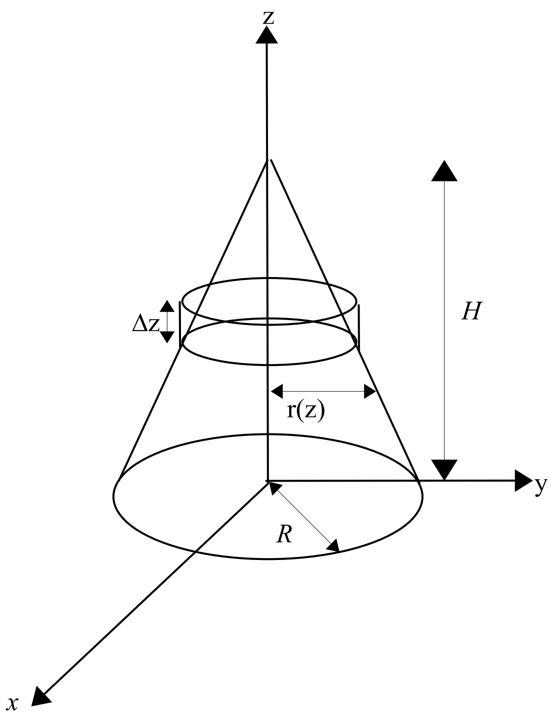
On le découpe en tranches élémentaires parallèles au plan de symétrie Oxy :

On découpe verticalement l'aire latérale en *n* tranches. L'aire latérale *S* d'une tranche de petite épaisseur *z* située à l'altitude *z* est celle du cylindre de rayon *r*(*z*) correspondant : $S=2\cdot r(z)\cdot\Delta z$

L'aire latérale totale A est alors donnée par

$$A=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{R}{H}z\,\Delta z$$

ce qu'on note $A=\int_0^H 2\pi\frac{R}{H}z\,dz$



Si on calcule cette intégrale, on obtient :

$$A=2\pi\frac{R}{H}\int_0^H z\,dz=\pi\frac{R}{H}\left(z^2\right)\Big|_0^H$$

$$=\pi\frac{R}{H}H^2=\pi RH$$

Pourtant, dans la table numérique, il est écrit que l'aire latérale de ce cône est $A=\frac{1}{3}RL$,

où L est la longueur de la diagonale du cône (la génératrice).

Que se passe-t-il ?

30 [Aller plus loin] Longueurs

1. Utiliser le calcul intégral pour calculer le demi périmètre d'un cercle de rayon 1.

2. Utiliser le calcul intégral pour calculer le quart de périmètre d'un cercle de rayon R.

3. Enoncer une méthode générale.

Voir la théorie 12 à 14 et les exercices 31 à 42

31 [Aller plus loin] Intégration par parties

1. calculer $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos(x)\mathrm{d}x$

3. Enoncer une méthode générale pour déterminer ce type de primitive ou d'intégrale.

32 [Aller plus loin] Intégration par changement de variable

1. Calculer $\int_{2}^{6} \frac{x}{\sqrt{2x-3}} \mathrm{d}x$

2. Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \mathrm{d}x$ et retrouver ainsi que l'aire du demi-cercle de rayon 1 est égale à $\frac{\pi}{2}$.

3. Déterminer le volume du corps engendré par la rotation du cercle $x^2 + y^2 = 4$ autour de la droite $x = 3$. Quel est ce solide? Généraliser.

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 43 à 48

33 [Aller plus loin] Réciproques des fonctions trigonométriques

Comment déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$?

1. Réciproques

a. Représenter graphiquement les fonctions sin, cos et tan.

b. Déterminer les plus grands intervalles pour que ces fonctions soient bijectives.

c. Définir leurs réciproques.

d. Les représenter graphiquement.

2. Dérivée de la réciproque

a. Etablir une formule de dérivation pour la fonction réciproque.

b. Utiliser cette formule pour dériver arcsin, arccos et arctan.

c. Interpréter graphiquement les résultats.

3. Primitives

a. Déterminer une primitive des fonctions définies ci-dessous :

i $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ **ii** $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **iii** $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b. Déterminer une primitive de la fonction fonction f définie par $f(x)=\frac{x+x^3+1}{1+x^2}$.

Voir la théorie 17 et l'exercice 49

1 [Souvenirs] Aires

Définition « Surface et aire » [intuitives]

Une **surface** dans le plan est un objet géométrique : un sous-ensemble de points du plan, (de dimension deux). Etant donné un repère normé du plan et donc une unité de mesure, on peut à une surface associer une **aire**, soit le nombre d'unité de mesure qui est nécessaire pour recouvrir exactement et sans chevauchement cette surface.
Une aire est un nombre réel, toujours positif ou nul.

Aires des surfaces de base

En acceptant connaître l'aire du carré, on peut démontrer la formule pour l'aire du rectangle (démarche facile pour les longueurs de côtés rationnelles, plus difficilement pour les cas des longueurs irrationnelles...). Les formules pour les aires des triangles et des autres quadrilatères de base (carré, parallélogramme, losange, trapèze) sont alors aussi facilement déductibles, puis celles pour les polygones (par triangulation, c'est-à-dire par découpage en triangles) et enfin pour les cercles (par un argument de limite infinie).

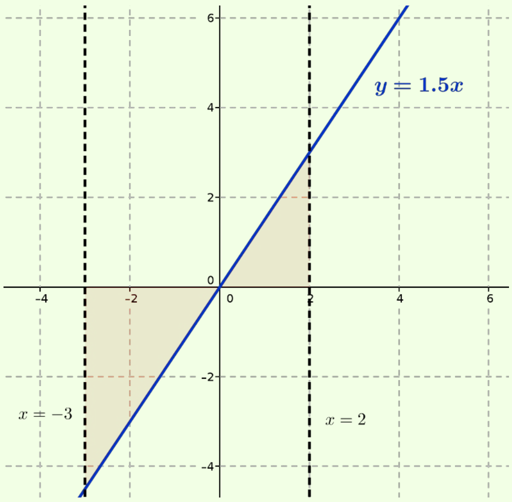
Méthode « Aires de surfaces se ramenant à des sommes/différences d'aires connues »

Par addition ou soustraction, on peut calculer les aires de surfaces « simple » en se ramenant à des calculs d'aires connues de surfaces de base.

Exemple : déterminer géométriquement la valeur de l'aire de la surface délimitée par l'axe $0x$, les droites x = -3 et x = 2 et la droite d'équation y = 1,5x.

Il s'agit de calculer l'aire de deux triangles en prenant soin de ne considérer que des valeurs positives : $A=\frac{2\cdot f(2)}{2}+\frac{3\cdot|f(-3)|}{2}$

$$=\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4.5}{2}=3+6{,}75=9{,}75$$



2 [A savoir] Sommes

Définition

$\sum_{i=k}^{n} f(i)$, où i, n et k sont des nombres entiers ($k \leq n$). et $f(i)$ une expression mathématique faisant intervenir la variable i, est définie comme :

$$\sum_{i=k}^{n} f(i)=f(k)+f(k+1)+...+f(n)$$

et se lit « somme pour l'indice i allant de k jusqu'à n de $f(i)$ »

Remarques :

☐ Le nom des variables n'est pas important : $\sum_{i=1}^{n} f(i)=\sum_{j=1}^{n} f(j)=\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

☐ Par contre, il faut faire attention à être cohérent ; par exemple $\sum_{i=1}^{n} f(i)\neq\sum_{i=1}^{n} f(j)$ car $\sum_{i=1}^{3} f(i)=f(1)+f(2)+f(3)$ alors que $\sum_{i=1}^{3} f(j)=f(j)+f(j)+f(j)=3f(j)$, car $f(j)$ est une constante par rapport à i !

Exemples : écrire comme somme la somme des entiers entre 21 et 456, la somme des multiples de 5 positifs inférieurs ou égaux à 100, les multiples de 5 supérieurs à 21 et inférieurs ou égaux à 100 et $-1+4-9+16+...-169$

la somme des entiers entre 21 et 456 : $\sum_{i=21}^{456} i$

la somme des multiples de 5 positifs inférieurs ou égaux à 100 : $\sum_{i=0}^{20} 5i$

les multiples de 5 supérieurs à 21 et inférieurs ou égaux à 100 : $\sum_{i=5}^{20} 5i$

$-1+4-9+16+...-169 = \sum_{i=1}^{13} (-1)^i \cdot i^2$

Méthode « Somme avec la calculatrice »

Comment s'aider de la calculatrice pour calculer des sommes ?

Exemple : calculer $\sum_{i=1}^{15} i^2$

math → sum (ou taper sur « 5 ») puis saisir successivement 1 → flèche droite → 15 → x → x² → «Enter : réponse 1240

Rappel : le manuel utilisateur de la calculatrice est disponible ici : https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/maturite-gymnasiale-4e/complements/ch01

3 [A savoir] Approximer

Méthode

Pour obtenir une approximation de l'aire de la surface comprise entre une courbe connue f, l'axe Ox et deux droites verticales $x=a$ et $x=b$, on peut procéder ainsi :

- choisir un entier n ;
- partager l'intervalle $[a;b]$ en n sous-intervalles équidistants, de longueur $\Delta x=\frac{1}{n}$;
- identifier les $n+1$ points du partage sur l'axe Ox, qu'on nomme x_0, x_1, x_2, …, x_n ;
- pour chaque sous-intervalle, construire le plus grand « petit rectangle » possible dont l'aire soit inférieure à celle sous la courbe dans ce sous-intervalle ; sa base est de longueur $\Delta x=\frac{1}{n}$ et sa hauteur est obtenue en calculant l'image de l'un des x_i ;
- la somme de ces aires donne une approximation par défaut de l'aire considérée (on parle de « petite somme »;
- procéder de même avec les plus petits « grands rectangles » pour obtenir une approximation par excès (on parle de « grande somme » ;
- on a finalement un encadrement de l'aire cherchée, comprise entre la petite et la grande somme.

Remarques :

- Plus n est grand, plus l'encadrement est précis.

- Dans la pratique, cette méthode dépend essentiellement de la capacité à identifier les hauteurs des rectangles utilisés, soit à déterminer pour quelles valeurs de x sur chaque sous-intervalle, on a un minimum et un maximum ! Cela est plus facilement réalisable dans le cas de fonctions f croissantes ou décroissantes sur $[a;b]$.

Exemple : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Approximer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x et les droites x=0 et x=1 en partageant l'intervalle [0;1] en 4 segments équidistants.

On partage $[0;1]$ en 4 intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{4}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{4}$

On pose :

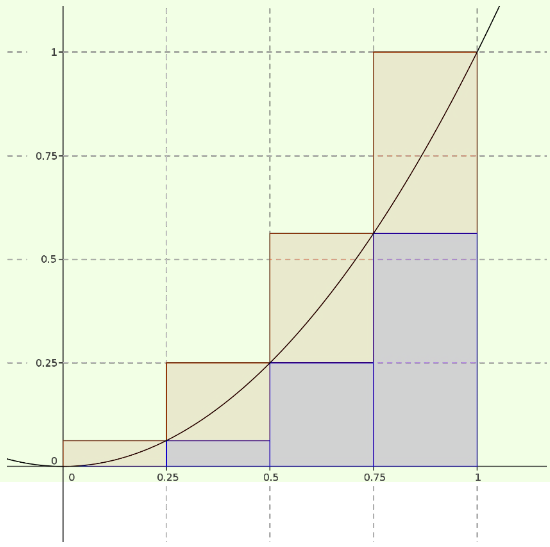
$x_0=0$

$x_1=\frac{1}{4}$

$x_2=\frac{2}{4}$

$x_3=\frac{3}{4}$

$x_4=\frac{4}{4}=1$



On approxime par des petits (en bleu) et grands rectangles (en brun).

Les grandes sommes donnent :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\Delta x\, f(x_4) \quad \left(=\sum_{i=1}^{4}\Delta x\cdot f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{4}{4}\right) \quad \left(=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\cdot f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{4}{4}\right)^2 \quad \left(=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i}{4}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{4^2}{4^2}\right) \quad \left(=\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i^2}{4^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\sum_{i=1}^{4}i^2\right)\\
&= \frac{1}{4^3}\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4^3}\sum_{i=1}^{4}i^2\right)\\
&= \frac{1}{64}(1+4+9+16)=\frac{1}{64}(30)=\frac{30}{64}=\frac{15}{32}
\end{aligned}
$$

Puis les petites sommes :

$$
\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\, f(x_0)+\Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\Delta x\cdot f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{0}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2}{4}\right)+\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{0}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i}{4}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{0^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2^2}{4^2}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{3^2}{4^2}\right) \quad \left(=\sum_{i=0}^{3}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{i^2}{4^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\left(0^2+1^2+2^2+3^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4^2}\right)\sum_{i=0}^{3}i^2\right)\\
&= \frac{1}{4^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2\right) \quad \left(=\frac{1}{4^3}\sum_{i=0}^{3}i^2\right)\\
&= \frac{1}{64}(0+1+4+9)=\frac{1}{64}(14)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}
\end{aligned}
$$

On en déduit un encadrement de l'aire : $\frac{7}{32}\leqslant A\leqslant\frac{15}{32}$

Remarque : on peut bien sûr écrire ces calculs de façon plus simple, mais il s'agit aussi ici de s'habituer à des notations qui seront indispensables plus loin ...

Voir les exercices 1 à 8

4 [A savoir] Intégrale de Riemann

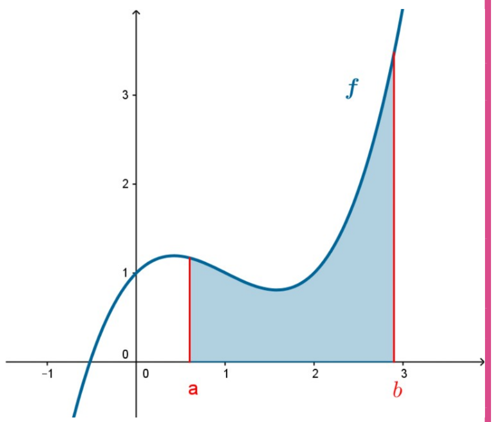
Il s'agit maintenant de passer d'une approximation de l'aire recherchée à une méthode qui permettra de calculer sa valeur exacte.

Définition « Sommes de Riemann » simplifiée

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ avec $a\leq b$.

On partage [a;b] en n sous-intervalles équidistants de longueur $\dfrac{b-a}{n}$

et on note $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$



On pose : $x_0=a$

$$x_1=a+\Delta x=a+\frac{b-a}{n}$$

$$x_2=a+2\Delta x=a+2\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$x_3=a+3\Delta x=a+3\cdot\frac{b-a}{n}$$

...

$$x_{n-1}=a+(n-1)\Delta x=a+(n-1)\cdot\frac{b-a}{n}$$

et donc : $x_n=a+n\Delta x=a+n\cdot\dfrac{b-a}{n}=b$

On définit, si cela est possible, les minima m_i et maxima M_i sur chaque sous-intervalle :

$$M_i=\max_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \text{ pour } i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

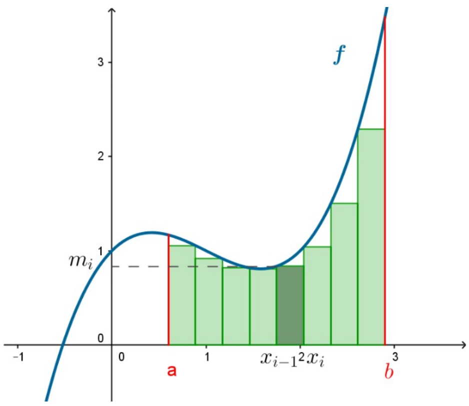
$$m_i=\min_{x\in[x_{i-1};x_i]} f(x) \text{ pour } i\in\{1,2,\ldots,n\}$$

On définit les **petites sommes de Riemann** :

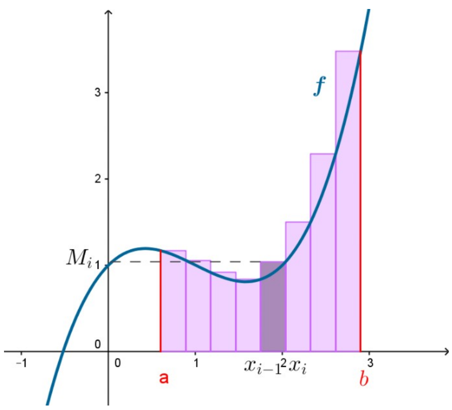
$$s_n=\Delta x\, m_1+\Delta x\, m_2+\Delta x\, m_3+\ldots+\Delta x\, m_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\, m_i$$

puis les **grandes sommes de Riemann** :

$$S_n=\Delta x\, M_1+\Delta x\, M_2+\Delta x\, M_3+\ldots+\Delta x\, M_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\, M_i$$



Petites sommes de Riemann



Grandes sommes de Riemann

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant S_n$.

On calcule :

les limites des petites sommes $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

et des grandes sommes $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

Et enfin on définit :
f est **intégrable** sur $[a;b]$ (au sens de Riemann) si et seulement si ces deux limites existent et sont égales à un nombre réel I (c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$)

On dit alors que I est **l'intégrale** de f entre a et b et on note : $I=\int_a^b f(x)\,dx$

Explication de la notation

Le signe $\int$ symbolise un S [pour somme] stylisé [pour le passage à l'infini],
$\int_a^b f(x)\,dx$ signifie donc "somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment petite dx, x parcourant l'intervalle $[a;b]$"

Exemple : soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Calculer l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=0$ et $x=1$.

On partage [0;1] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

On pose :

$x_0=0$

$x_1=0+\Delta x=\frac{1}{n}$

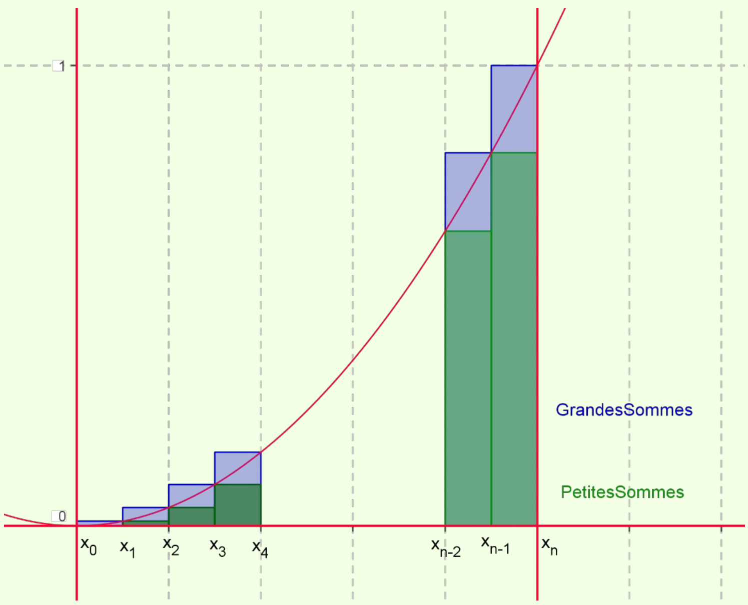
$x_2=0+2\Delta x=\frac{2}{n}$

$x_3=0+3\Delta x=\frac{3}{n}$

...

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=\frac{n-1}{n}$

$x_n=0+n\Delta x=\frac{n}{n}=1$



Comme la fonction est croissante sur [0;1], on peut facilement déterminer les m_i et les M_i:

$M_1 := f(x_1)$, $M_2 := f(x_2)$, $M_3 := f(x_3)$, …, , $M_n := f(x_n)$

$m_1 := f(x_0)$, $m_2 := f(x_1)$, $m_3 := f(x_2)$, …, , $m_n := f(x_{n-1})$

On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x\cdot M_1+\Delta x\cdot M_2+\Delta x\cdot M_3+\ldots+\Delta x\cdot M_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot M_i\\
&= \Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\Delta x\cdot f(x_3)+\ldots+\Delta x\cdot f(x_n)\\
&= \frac{1}{n}\cdot f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{2}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{3}{n})+\ldots+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{n}{n})\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n}{n})^2\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1^2}{n^2})+\frac{1}{n}(\frac{2^2}{n^2})+\frac{1}{n}(\frac{3^2}{n^2})+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n^2}{n^2})\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)\\
&= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)
\end{aligned}$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

On calcule la somme des aires des petits rectangles:

$$\begin{aligned}
s_n &= \Delta x\cdot m_1+\Delta x\cdot m_2+\Delta x\cdot m_3+\ldots+\Delta x\cdot m_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta x\cdot m_i\\
&= \Delta x\cdot f(x_0)+\Delta x\cdot f(x_1)+\Delta x\cdot f(x_2)+\ldots+\Delta x\cdot f(x_{n-1})\\
&= \frac{1}{n}\cdot f(0)+\frac{1}{n}\cdot f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(2\frac{1}{n})+\frac{1}{n}\cdot f(3\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n}\cdot f((n-1)\frac{1}{n})\\
&= \frac{1}{n}(0)^2+\frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(2\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(3\frac{1}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}((n-1)\frac{1}{n})^2\\
&= \frac{1}{n}(\frac{0}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n-1}{n})^2\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)\\
&= \frac{1}{n^3}(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)
\end{aligned}$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2)=\frac{(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)}{6}=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

et donc: $s_n = \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant A \leqslant S_n$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^3 6}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

On avait $s_n \leqslant A \leqslant S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, c'est-à-dire : $\frac{1}{3} \leqslant A \leqslant \frac{1}{3}$

Donc $A=\frac{1}{3}$. On dit que f est intégrable sur [0;1] (au sens de Riemann) et on note

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

Remarques :

☐ Le plus souvent, on utilise pour ces calculs des formules bien connues :

$$1+2+3+...+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \sum_{i^2=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \sum_{i^2=1}^{n} i^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$

etc (voir table).

☐ Si vous disposez d'une calculatrice performante, d'un logiciel sur un ordinateur ou d'une application sur un smartphone ou une tablette, vous pouvez paramétrer/programmer le calcul des petites et grandes sommes de Riemann dans le cas d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle.

☐ Lorsqu'une fonction est continue et croissante ou décroissante sur un intervalle donné, il est possible de déterminer les minima m_i et les maxima M_i sur chacun des n intervalles équidistants de longueur $\frac{b-a}{n}$ car ils sont toujours égaux à l'un des $f(x_i)$ (c'est-à-dire que les hauteurs des petits et grands rectangles sont toujours sur les bords des sous-intervalles); lorsqu'une fonction n'est pas croissante ou décroissante, ce n'est plus aussi facile ... et la méthode devient difficile voir impossible à mettre en œuvre !

5 [A savoir] Quelques questions à propos de cette intégrale

Intégrale = toujours pour des aires ?

Une intégrale est la limite d'une somme dont le nombre de termes tend vers l'infini et où chacun des termes tend vers zéro (dans notre définition). Le calcul intégral est un outil qui permet par approximation puis passage à la limite d'effectuer des mesures à priori complexes. Il est toujours essentiel de bien contrôler l'erreur commise durant tout le processus afin de s'assurer qu'elle tende bien vers 0 lors du passage à la limite.

On peut ainsi mesurer des aires, des volumes, des débits et bien d'autres quantités physiques. Avec la dérivée – qui peut se généraliser en « différentielle », c'est l'une des deux branches du calcul différentiel et intégral (ou calcul infinitésimal) issu des travaux de Newton et Leibniz au XVIIe siècle.

Intégrale = aire ?

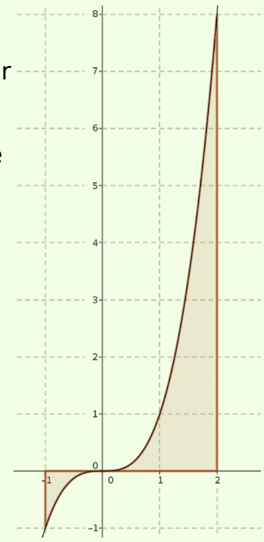
Dans ce cours, pour le moment, nous avons construit l'outil intégrale dans le but de calculer des aires. Mais attention, l'intégrale n'est pas toujours égale à l'aire géométrique ; il s'agit de faire très attention au signe de la fonction.

- ☐ Si $f(x)$ est positive (ou nulle) sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est égale à l'aire sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$.
- ☐ Si $f(x)$ est négative (ou nulle) sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ est égale à l'aire sous la courbe de f délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=a$ et $x=b$. Dans ce cas l'intégrale est égale à l'aire avec un signe négatif ; on parle aussi d'**aire algébrique**.
- ☐ Lorsque $f(x)$ change de signe sur $[a;b]$ et que l'intégrale existe, alors il faut décomposer le problème en travaillant sur les sous-intervalles où la fonction est de signe constant.

Remarque : nous formaliserons cela plus loin (Propriétés de l'intégrale) et l'utiliserons dans des situations concrètes (Applications) dans des sections suivantes.

Exemple : calculer l'aire sous la courbe $y=x^2$ délimitée par l'axe $0x$ et les droites $x=-1$ et $x=2$

On représente la situation : la fonction est négative sur [-1;0], il faut donc calculer $\int_{-1}^{0} x^3\,\mathrm{d}x$ qui sera négative et prendre sa valeur absolue, puis calculer $\int_{0}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$ qui elle donnera directement l'aire sous la courbe entre 0 et 2 :



$$\text{Aire}=\left|\int_{-1}^{0} x^3\,dx\right|+\int_{0}^{2} x^3\,dx$$

Pour cela, on utilise $\int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$ calculé précédemment :

$$\text{Aire}=\left|\frac{0^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right|+\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\left|\frac{-1}{4}\right|+\frac{16}{4}=\frac{1}{4}+\frac{16}{4}=\frac{17}{4}$$

Intégrales calculées géométriquement ou avec la définition

Nous savons que pour tout a et b des nombres réels tels que $a < b$:

[I1] : $\int_a^b 1\,dx = b-a$: démontré avec la définition de l'intégrale et confirmé par un calcul d'aire algébrique;

[I2] : $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$: démontré avec la définition de l'intégrale et confirmé par un calcul d'aire algébrique;

[I3] : $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$: démontré avec la définition de l'intégrale et confirmé par un calcul d'aire algébrique;

[I4] : $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$: démontré avec la définition de l'intégrale ;

[I5] : $\int_a^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}$: démontrable avec la définition de l'intégrale.

Toujours intégrable ?

Il existe des fonctions qui ne sont pas intégrables sur un intervalle donné [a;b]

Exemple : que penser de l'intégrale de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x^2}$ sur [1;1] ?

On peut partager [-1;1] en n sous-intervalles équidistants. L' un de ces sous-intervalles contiendra forcément 0. Or la fonction n'est pas définie en 0 et prend des valeurs tendant vers l'infini lorsqu'on se rapproche de 0 ; le minimum n'existe donc pas dans ce sous-intervalle, on ne peut pas calculer S_n ! L'intégrale de f sur [-1;1] n'existe pas au sens où nous l'avons définie.

Théorème « Critère d'intégrabilité » [non démontré]

Si f est continue sur [a;b], alors f est intégrable sur [a;b]

Intégrables et non continue ?

La réciproque du théorème précédent est fausse ; il existe des fonctions non continues sur [a;b] mais qui sont intégrables sur [a;b].

Exemple : calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}1\,,\text{si } x\in[0\,;1[\\ 2\,,\text{si } x=1\end{cases}$ sur [0;1].

On partage [0;1] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=\frac{1}{n}$

on pose : $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, ..., $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$ et $x_n=\frac{n}{n}=1$

on a : $m_1=m_2=\ldots=m_n=1$, et $M_1=M_2=M_3=\ldots=M_{n-1}=1$ mais $M_n=2$

d'où $s_n=\Delta x\cdot m_1+\Delta x\cdot m_2+\Delta x\cdot m_3+\ldots+\Delta x\cdot m_n=\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\ldots+\Delta x\cdot 1=n\cdot\Delta x$

et $S_n=\Delta x\,M_1+\Delta x\,M_2+\ldots+\Delta x\cdot M_{n-1}+\Delta x\,M_n$
$=\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 1+\ldots+\Delta x\cdot 1+\Delta x\cdot 2=(n-1)\cdot\Delta x+\Delta x\cdot 2=\Delta x\cdot((n-1)+2)=\Delta x\cdot(n+1)$

d'où $\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\Delta x=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty} 1=1$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \Delta x\cdot(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot(n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{n} = 1+0=1$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, c'est-à-dire que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

Une définition «simplifiée» qui a ses limites

Avec cette définition, certaines fonctions ne sont pas intégrables, alors qu'on aimerait pouvoir les intégrer.

Exemple : calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x \text{, si } x\in[0;1[\\ 1 \text{, si } x=1\end{cases}$ sur [0;1].

On partage [0;1] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x = \frac{1}{n}$

on pose : $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{n}$, $x_2=\frac{2}{n}$, ..., $x_{n-1}=\frac{n-1}{n}$ et $x_n=\frac{n}{n}=1$

on a : $m_1=m_2=\ldots=m_n=1$, et $M_1=M_2=M_3=\ldots=M_{n-1}=1$ mais M_n n'existe pas ! On ne peut donc pas calculer la grande somme et la fonction n'est pas intégrable sur [0;1].

On peut améliorer la définition pour contourner ce problème, mais dans ce cours, nous nous restreindrons pour tous les calculs et les exercices à notre définition simplifiée.

6 [Aller plus loin] Améliorer la définition

On peut améliorer la définition de Riemann-intégrable en utilisant les résultats suivants :

☐ on choisit dans chaque sous-intervalle n'importe quelle valeur $f(x_i)$ comme hauteur de rectangle puis on calcule une « somme de Riemann » de la même façon que pour les petites et grandes sommes ; elle est ainsi forcément comprise entre la petite et la grande somme de Riemann. Si la limite à l'infini de cette somme existe, alors on définit l'intégrale de Riemann comme étant égale à cette limite.

On peut démontrer que l'existence de la limite et sa valeur ne dépendent pas des choix de ces $f(x_i)$ (pour autant bien sûr que tous les longueurs de tous les sous-intervalles tendent bien vers 0) ;

Avec cette définition, on montre facilement que la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x \text{, si } x\in[0;1[\\ 1 \text{, si } x=1\end{cases}$ sur [0;1] est intégrable et que son intégrale vaut 0,5.

☐ pour autant que la longueur de chacun des Δx tende vers 0 quand n tend vers l'infini, on peut prouver que, quand elles existent, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ne dépendent pas du partage de l'intervalle $[a;b]$ que l'on a choisi ; on peut donc utiliser des partages équidistants comme nous l'avons fait jusqu'à présent, mais également « jouer » sur des longueurs d'intervalles différentes (pour autant que toutes tendent bien vers 0 in fine). Cela permet, en particulier en analyse numérique, d'améliorer et d'accélérer le calcul numérique d'intégrales.

7 [Aller plus loin] Une autre définition

Dans les cours de mathématiques universitaires, on utilise le plus souvent une autre définition de l'intégrale, dite de Darboux, car celle-ci simplifie un certain nombre de démonstrations (que nous ne verrons pas ici!).

On peut démontrer que les deux définitions – Riemann et Darboux sont équivalentes : les fonctions Riemann-intégrables sont exactement les mêmes que les fonctions Darboux-intégrables, et les intégrales sont identiques.

Définition « sup et inf »

Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.
s est appelé est le **supremum** de X - on note $s = sup\, X$ si et seulement si :

- ☐ $\forall x \in X$, on a : $x \leq s$
- ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ tel que $x > s - \epsilon$

i est appelé est l'**infimum** de X - on note $s = inf\, X$ si et seulement si :

- ☐ $\forall x \in X$, on a : $x \geq i$
- ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X$ tel que $x < i - \epsilon$

Remarque : faire bien sûr le lien avec la définition formelle de la limite vue en 3e !

Définition « Sommes de Darboux» avec sup et inf

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ avec $a \leq b$.

On partage $[a;b]$ en n sous-intervalles équidistants de longueur $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ et on pose comme précédemment $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, ... , $x_n = a + n \Delta x = b$

On définit, si cela est possible, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ et $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

On définit les **petites sommes de Darboux** $s_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, m_i$, puis les **grandes sommes de Darboux** $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, M_i$.

Remarque : on a toujours $s_n \leqslant S_n$.

On calcule les limites $\lim_{n \to \infty} s_n$ et $\lim_{n \to \infty} S_n$

Et enfin on définit :
f est **intégrable** sur $[a;b]$ si et seulement si ces deux limites existent et sont égales à un nombre réel I (c'est-à-dire que $\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = I$)

On dit alors que I est **l'intégrale** de f entre a et b et on note : $I = \int_a^b f(x)\, dx$

Voir les exercices 9 à 14

8 [A savoir] Interlude : les primitives

Calculer une intégrale avec la définition est particulièrement long et compliqué. Nous introduisons maintenant une nouvelle notion – très en lien avec la dérivée – qui n'a à priori aucun lien avec les intégrales ... mais nous verrons plus loin que ce lien existe bel et bien !

Définitions

F est une **primitive** de f sur $I \Leftrightarrow F'(x)=f(x), \forall x \in I$

Exemple : déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$.

F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f [sur $\mathbb{R}$], car $(x^3)'=3x^2$

G définie par $G(x)=x^3+1$ est une autre primitive de f [sur $\mathbb{R}$], car $(x^3+1)'=3x^2$

Remarques :

- on écrit plus simplement $F(x) = x^3$ est une primitive de $f(x) = 3x^2$;
- on omet souvent, en particulier lorsque cela n'est pas la question principale, d'indiquer l'intervalle sur lequel on travaille ; par défaut, de façon implicite, c'est le plus grand intervalle possible sur lequel F est une primitive de f, souvent $\mathbb{R}$ tout entier, mais pas forcément.

Exemple : déterminer une primitive de la fonction f définie par $f(x)=-\frac{1}{x^2}$

F définie par $F(x)=\frac{1}{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}^*$, car $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Théorème « Relation entre toutes les primitives d'une fonction donnée »

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit F une primitive de f.
Alors on a : $G(x)+c$, où c est une constante, est aussi une primitive de f.

On peut de plus démontrer que :

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f.
Alors on a : $F(x)=G(x)+c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Remarques : cela signifie que toutes les primitives d'une fonction f donnée sont exactement les fonctions qui différent de f d'une constante. Pour trouver toutes les primitives de f, il suffit donc d'en trouver une, et toutes s'obtiennent en ajoutant une constante.

Exemple : déterminer toutes les primitives de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$.

F définie par $F(x)=x^3$ est une primitive de f, donc $G(x)=x^3+C$ est la famille de toutes les primitives de f

9 [A savoir] Trouver une primitive

Primitives élémentaires à connaître

[P1] c est une primitive de 0, ou $\int 0\,\mathrm{d}x=c$ [car $(cte)'=0$], où c est une constante réelle

[P2] x est une primitive de 1, ou $\int 1\,\mathrm{d}x=x+c$ [car $(x)'=1$]

[P3] $\frac{x^2}{2}$ est une primitive de x, ou $\int x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+c$ [car $\left(\frac{x^2}{2}\right)'=x$]

[P4] $\frac{x^3}{3}$ est une primitive de x^2, ou $\int x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+c$ [car $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$]

[P5] $\frac{x^4}{4}$ est une primitive de x^3, ou $\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+c$ [car $\left(\frac{x^4}{5}\right)'=x^3$]

[P6] si $n\neq-1$: $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n, ou $\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ [car $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=x^n$]

[P7] $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ou $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\sqrt{x}+c$ [car $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$]

[P8] $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$, ou $\int -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+c$ [car $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$]

[P9] $-cos$ est une primitive de sin, ou $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x=-\cos(x)+c$ [car $\cos'(x)=-\sin(x)$]

[P10] sin est une primitive de cos ou $\int \cos(x)\,\mathrm{d}x=\sin(x)+c$ [car $\sin'(x)=\cos(x)$]

Remarque : cos est une primitive de $-sin$ et $-sin$ est une primitive de $-cos$

[P11] $\int 1+\tan^2(x)\,\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x=\tan(x)+c$

Théorème « Propriétés des primitives »

Aux théorèmes sur les dérivées correspondent bien sûr des théorèmes sur les primitives :

Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a;b]$. Alors on a :

[PrP1] $\int k\,f(x)\,dx=k\cdot\int f(x)\,dx,\ \forall k\in\mathbb{R}$

[PrP2] $\int f(x)+g(x)\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx$

[PrP3] $\int f(x)-g(x)\,dx=\int f(x)\,dx-\int g(x)\,dx$

Remarque : comme la dérivée du produit n'est pas égale au produit des dérivées - rappel : $(f(x)\cdot g(x))'\neq f'(x)\cdot g'(x)$ mais $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$, il n'y a pas de formule « simple » pour la primitive d'un produit !

Par contre, on peut récrire ainsi la formule pour la dérivée de la composée :

[PrP4] $\int g'(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=g(f(x))$

Méthode pour déterminer une primitive

1 S'agit-il d'une d'une primitive élémentaire ?

Exemple : déterminer $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{P7}{=} \sqrt{x}+c$: il s'agit d'une primitive élémentaire à connaître

2 Peut-on utiliser les propriétés des primitives, en particulier « sortir » les constantes multiplicatives du calcul et/ou décomposer en sommes/différences ?

Exemple : déterminer $\int (3x^2-2)\,\mathrm{d}x$

$\int (3x^2-2)\,\mathrm{d}x \overset{PrP3+PrP1}{=} 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int 1\,\mathrm{d}x \overset{P4+P2}{=} 3\frac{x^3}{3}-2x = x^3-2x$

3 Peux-on récrire $f(x)$ pour simplifier le calcul ?

Exemple : déterminer $\int \frac{x^3+2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\int \frac{x^3+2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^3}{x^2}+\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x+\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{PrP2/PrP1}{=} \int x\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \overset{P3/P8}{=} \frac{x^2}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{2}-\frac{2}{x}$

4 Peut-on utiliser la composition $\int g'(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = g(f(x))+C$?

Exemple : déterminer $\int 3x^4(x^5-2)^7\,\mathrm{d}x$

$\int 3x^4(x^5-2)^7\,\mathrm{d}x$ [on travaille autour du pivot "x^5-2 "]

$=\int \frac{3}{5}[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$ [on fait apparaître la dérivée interne]

$=\frac{3}{5\cdot 8}\int 8[(x^5-2)^7\cdot 5x^4]\,\mathrm{d}x$ [on corrige les constantes]

$=\frac{3}{5\cdot 8}\cdot(x^5-2)^8$ [il n'y a "plus" qu'à conclure !]

on peut vérifier que : $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{(x^5-2)^8}{8}\right)' = 3x^4(x^5-2)^7$

on peut aussi travailler avec les fonctions en évitant le symbole : $\int$

On pose : $f(x)=3x^4(x^5-2)^7$

on récrit pour faire apparaître ce qui nous arrange : $f(x)=\frac{3}{5\cdot 8}(8[(x^5-2)^7\cdot 5x^4])$

d'où on peut obtenir : $F(x)=\frac{3}{5\cdot 8}\cdot(x^5-2)^8$

Remarque : on peut savoir que la primitive existe – car la fonction est continue sur l'intervalle considéré – tout en n'arrivant pas à déterminer une expression algébrique (c'est même ce qui arrive le plus souvent, sauf dans les cas où tout a été « préparé » pour qu'on puisse déterminer $F(x)$!

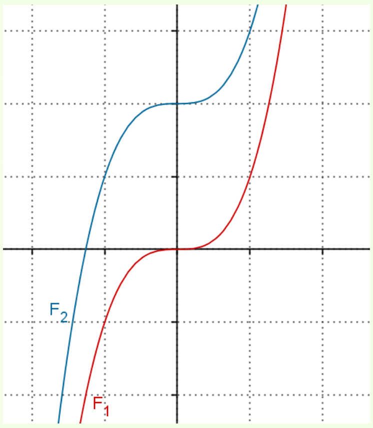
Interprétation graphique

Graphiquement, le fait que toutes les primitives d'une fonction donnée ne diffèrent que d'une constante s'interprète ainsi : toutes les courbes représentatives des primitives sont translatées verticalement les unes par rapport aux autres.

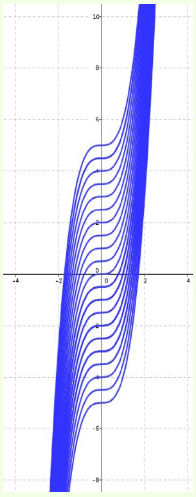
Exemple : déterminer toutes les primitives de (la fonction f définie par) $f(x) = 3x^2$ et interpréter graphiquement

Nous avons vu que toutes les primitives de de f sont les fonctions de la forme $F(x)=x^3+C$

Graphiquement : toutes ces courbes sont des translations verticales de la fonction F définie par $F(x)=x^3$



deux primitives : la distance verticale en tout x entre les deux courbes est toujours la même !



beaucoup de primitives

Condition initiale

Il arrive qu'on impose une demande supplémentaire à une primitive de f, comme par exemple que sa courbe représentative passe par un point donné. Cette demande s'appelle une **condition initiale** et il existe une unique primitive de f qui satisfasse une condition initiale donnée (dans les cas où les primitives existent!).
Graphiquement, cela revient à choisir parmi toutes les primitives celles dont la courbe représentative passe par ce point.

Exemple : déterminer la primitive de (la fonction f définie par) $f(x) = 3x^2$ telle que $F(1) = 2$ et interpréter graphiquement

Nous avons vu que toutes les primitives de de f

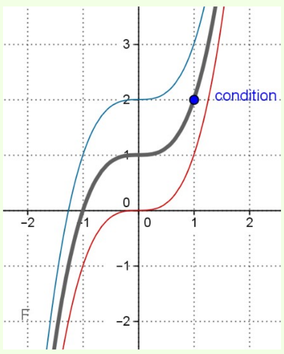
sont les fonctions de la forme $F(x)=x^3+C$

On veut que $F(1) = 2$, c'est-à-dire que $1^3+C = 2$,

d'où $C = 1$

la primitive recherchée est $F(x)=x^3+1$

Graphiquement, c'est celle dont la courbe représentative passe par le point (1;2)



Voir les exercices 15 à 17

10 [A savoir] Calculer des intégrales plus efficacement ?

Etape 1 : avec les propriétés des intégrales

Théorèmes «Propriétés des intégrales »

Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ et $g:[a;b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $[a;b]$. Alors on a :

[PrI1] kf est intégrable sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx,\ \forall k\in\mathbb{R}$

[PrI2] $(f+g)$ est intégrable. sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

[PrI3] $(f-g)$ est intégrable. sur $[a;b]$ et on a $\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

[PrI4] $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

Remarque : c'est aussi vrai si $a < b < c$ et f intégrable sur $[a;c]$!)

[PrI5] si $f(x)\geq 0,\ \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq 0$

[PrI6] si $f(x)\leq 0,\ \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq 0$

[PrI7] si $f(x)\geq g(x),\ \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque : grâce à ces propriétés, on peut calculer de nouvelles intégrales à partir de celles qui sont déjà connues.

Exemple : calculer $\int_0^2 2x^3-5\,dx$

$$\int_0^2 2x^3-5\,dx \overset{\text{PrI4}}{=} \int_0^2 2x^3\,dx - \int_0^2 5\,dx \overset{\text{PrI2}}{=} 2\int_0^2 x^3\,dx - \int_0^2 5\,dx \overset{\text{PrI1}}{=} 2\int_0^2 x^3\,dx - 5\cdot(2-0) \overset{\text{I4}}{=} 2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 10$$

$$\overset{\text{notation}}{=} 2\cdot\left(\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)-10 = 2\cdot\frac{16}{4}-10 = -2$$

Définition

Pour préserver ces propriétés dans différents cas, en particulier [PrI2] dans les cas où $b\in[a;c]$, on définit :

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur $[a;b]$. Alors :

- ☐ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- ☐ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Exemple : calculer $\int_3^3 x^2\,dx$ et $\int_3^1 x^2\,dx$

$$\int_3^3 x^2\,dx \overset{déf}{=} 0 \text{ et } \int_3^1 x^2\,dx \overset{déf}{=} -\int_1^3 x^2\,dx$$
$$=-\left(\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right),\text{ par } \int_a^b x^2\,dx=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$
$$=-8$$

11 [A savoir] Calculer des intégrales plus efficacement ?

Etape 2 : lien entre intégrales et primitives ...

Théorème de la moyenne

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$.

Alors il existe au moins un $c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\cdot(b-a)$

Définition

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a;b]$. et $x_0\in[a;b]$,

La fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\forall x\in[a;b]$ est appelée **fonction d'accumulation** de f.

Théorème fondamental I (du calcul différentiel et intégral) « relation entre intégrale et dérivée »

$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\forall x\in[a;b]$ Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a;b]$, et soit F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\forall x\in[a;b]$.

Alors, on a: F est dérivable et $F'(x)=f(x),\forall x\in]a;b[$

Notation

Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ intégrable sur $[a;b]$.

Alors on a : $f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$

Exemples : $x^3\Big|_0^2=2^3-0^3=8$, $\int_a^b x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$, $\int_a^b x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b$ et $\int_a^b x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_a^b$

Théorème fondamental II (du calcul différentiel et intégral) « Théorème de Newton-Leibnitz »

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $a\in I$, $b\in I$ et G une primitive de f sur I.

Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=G(x)\Big|_a^b=G(b)-G(a)$.

Remarque : ce théorème indique comment calculer beaucoup plus simplement une intégrale en utilisant la notion de primitive !

Exemple : calculer $\int_0^3 x^3 - x^2 - 6x \, \mathrm{d}x$.

Il suffit de trouver une primitive de la fonction qu'on intègre :

si $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$, on a : $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2}$

puis d'utiliser le thm NL :

$\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 = \left[\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 6\frac{3^2}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^3}{3} - 6\frac{0^2}{2}\right] = \frac{81}{4} - 9 - 27 = -\frac{63}{4}$, et ainsi

$$\int_0^3 x^3 - x^2 - 6x \, \mathrm{d}x = -\frac{63}{4}$$

Remarque : avec l'habitude, on écrit directement :

$$\int_0^3 x^3 - x^2 - 6x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3 = \left[\frac{3^4}{4} - \frac{3^3}{3} - 6\frac{3^2}{2}\right] = \frac{81}{4} - 9 - 27 = -\frac{63}{4}$$

Exemple : calculer $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x) \, \mathrm{d}x$ et interpréter graphiquement le résultat.

Il suffit de trouver une primitive de (la fonction f définie par) $f(x) = \cos(x)$:

c'est $\sin(x)$, d'où : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$= \sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1$

Graphiquement : comme la fonction est toujours négative sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$,l'intégrale calcule l'aire algébrique sous la courbe dans cet intervalle, soit l'aire rose mais avec un signe négatif !

Intégrale indéfinie

$\int f(x) \, dx$ représente la famille de <u>toutes</u> les primitives d'une fonction f donnée ; on parle aussi d'**intégrale indéfinie**.

Exemple : déterminer $\int 3x^2 \, dx$

$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c$

Voir les exercices 18 à 30

12 [A savoir] Aire entre deux fonctions

Méthode

Considérons une représentation graphique de deux fonctions continues f et g données et $A=(a;f(a))$ et $B=(b;f(b))$ deux points d'intersection de leurs courbes représentatives.
L'aire de la surface délimitée par ces deux courbes entre A et B est toujours donnée par $\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a;b]$ et par $\int_a^b g(x)-f(x)\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $g(x)\geq f(x), \forall x\in[a;b]$.
Il s'agit donc dans tous les cas de connaître les points d'intersection des deux courbes, de poser le(s) calcul(s) d'intégrale(s) et enfin de calculer cette (ces) intégrale(s),

Exemple : déterminer la valeur de l'aire de la surface délimitée par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

On commence par représenter graphiquement la situation ; pour cela, on doit calculer quelques paramètres :

$f(x) = x(x^2 - 5x + 6) = x(x-2)(x-3)$, d'où $Z_f = \{0;2;3\}$

Tableau de signes de f, polynomiale de degré 3 :

x		0		2		3	
x	–	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	–	–	0	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

remarque : on peut aussi utiliser la multiplicité des zéros pour éviter le tableau de signes.

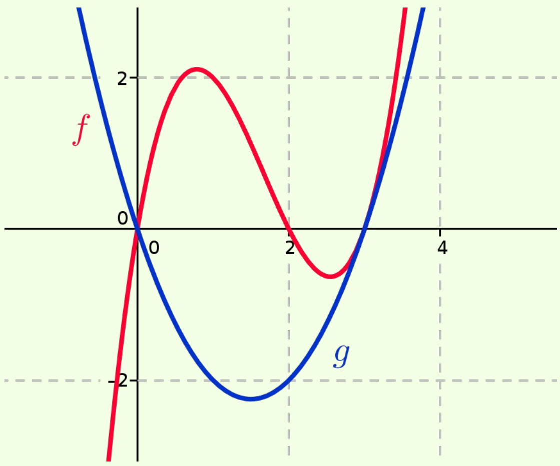
$g(x) = x(x-3)$, d'où $Z_g = \{0;3\}$; g polynomiale de degré 2 et $a>0$, donc représentée par une parabole convexe.

Il s'agit d'être certains que la courbe rouge est bien toujours au dessus de la courbe bleue (voir page suivante). Pour cela, il faut déterminer les points d'intersection :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = x^2 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)^2 = 0$

d'où on déduit qu'il n'y a bien que deux points d'intersection d'abscisses $x=0$ et $x= 3$ et que la courbe rouge est bien toujours au dessus de la courbe bleue !

On peut poser le calcul d'intégrale :



$$\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)-(x^2-3x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^3 x^3-6x^2+9x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\Big|_0^3$$
$$=\frac{3^4}{4}-6\cdot\frac{3^3}{3}+9\cdot\frac{3^2}{2}$$
$$=\frac{81}{4}-6\cdot 9+9\cdot\frac{9}{2}$$
$$=\frac{81-216+162}{4}=\frac{277}{4}=6{,}75$$

Remarque : si jamais le résultat est négatif, il y a bien sûr une faute quelque part ...

13 [A savoir] Volume de révolution

Définition

On appelle **corps de révolution** l'espace occupé par la rotation d'une surface plane autour d'un axe coplanaire extérieur (ou tangent) à cette surface et **volume de révolution** le volume d'un tel corps.

Remarque : chaque point de la surface engendrant un corps de révolution décrit un cercle en tournant autour de l'axe de rotation.

Théorème

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$. Alors le volume V du corps engendré par la rotation de la surface limitée par la courbe de , f l'axe des x et les verticales passant par a et b, autour de l'axe des x est donné par $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple : déterminer le volume de révolution engendré par la rotation de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$ autour de l'axe Ox (et délimité par les droites x=0 et x=3

$$V=\pi\int_0^3 (x^2-3x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^3 x^4-6x^3+9x^2\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-6\frac{x^4}{4}+9\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3$$
$$=\pi\left(\frac{3^5}{5}-6\cdot\frac{3^4}{4}+9\cdot\frac{3^3}{3}\right)=\pi\frac{81}{10}\simeq 25{,}4$$

Remarque : attention, lorsqu'on veut calculer le volume de révolution engendré par la surface comprise entre deux courbes, il faut bien calculer $V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x-\pi\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$

qui n'est pas égal à $V=\pi\int_a^b [f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x$!

14 [Aller plus loin] Longueurs

Théorème

Soit une fonction f telle que f' (sa dérivée!) soit continue sur $[a;b]$.
Alors la longueur L de la courbe du graphe de f entre les points $A = (a;f(a))$ et $B = (b;f(b))$ est donnée par $L=\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

Exemple : déterminer la longueur de la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x$ entre les points $A = (0;f(0))$ et $B = (3;f(3))$

$f'(x) = 2x - 1$, d'où : $L=\int_0^3 \sqrt{1+(2x-1)]^2}\,dx=\int_0^3 \sqrt{(2x)^2}\,dx \overset{\text{non négatif sur } [0;3]}{=} \int_0^3 2x\,dx=x^2\Big|_0^3=9$

Voir les exercices 31 à 42

15 [Aller plus loin] Intégration par parties

Théorème « Intégration par parties »

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a;b]$, telles que f' et g' soient continues sur $[a;b]$.
Alors on a :

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x \quad (+C) \text{ et}$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Remarque :

- C'est la version « intégrale » de la formule de dérivation du produit !
- Cette méthode est à essayer lorsqu'on a affaire à une intégrale (ou à une recherche de primitive) qui contient un produit de deux fonctions et que les autres méthodes connues ne fonctionnent pas.
- La difficulté consiste à faire le bon choix pour décider qui joue le rôle de $f'(x)$ et de $g(x)$ dans le produit qu'on doit intégrer ; pour décider, il faut comprendre que l'intégration par parties consiste à remplacer un calcul d'intégrale par un autre - qu'on espère plus simple - dans lequel on remplace $f'(x)$ par $f(x)$ et $g(x)$ par $g'(x)$. L'une des deux facteurs est remplacé par sa dérivée, l'autre par une primitive. Il faut donc opérer le choix qui permet d'obtenir dans ce nouveau produit quelque chose de plus facile à intégrer ...

Exemple : calculer $\int_0^\pi x\sin(x)\mathrm{d}x$

On choisit de poser : $f'(x)=\sin(x)$ et $g(x)=x$, ainsi on a : $f(x)=-\cos(x)$ et $g'(x)=1$ d'où

$$\int x\sin(x)\mathrm{d}x=-\cos(x)\cdot x-\int 1\cdot(-\cos(x))\mathrm{d}x=-x\cos(x)+\int\cos(x)\mathrm{d}x=-x\cos(x)+\sin(x)$$

remarque : on vérifie bien que $[-x\cos(x)+\sin(x)]'=[-x\cos(x)]'+[\sin(x)]'$
$=[(-1)\cdot\cos(x)+(-x)\cdot(-\sin(x))]+[\cos(x)]$
$=-\cos(x)+x\sin(x)+\cos(x)=x\sin(x)$

et enfin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\mathrm{d}x = -x\cos(x)+\sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-0=1$

Remarque : il est parfois nécessaire de procéder à plusieurs intégrations par parties successives …

Exemple : déterminer $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x$

On choisit de poser : $f'(x)=\cos(x)$ et $g(x)=x^2$, ainsi on a : $f(x)=\sin(x)$ et $g'(x)=2x$

d'où $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x=\sin(x)\cdot x^2-\int 2x\cdot\sin(x)\mathrm{d}x=x^2\sin(x)-2\int x\sin(x)\mathrm{d}x$

or on a dans l'exemple précédent déjà obtenu, également par parties, que :

$\int x\sin(x)\mathrm{d}x=-x\cos(x)+\sin(x)$

donc : $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x=x^2\sin(x)-2(-x\cos(x)+\sin(x))=x^2\sin(x)+2x\cos(x)+\sin(x)$

16 [Aller plus loin] Intégration par changement de variable

Théorème « Intégration par changement de variable »

Soit f et g' deux fonctions continues sur [a;b]. Alors on a :

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\mathrm{d}x = F(g(x))\Big|_a^b = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\mathrm{d}t$$

Exemple : calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$

On choisit de poser $t=3x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{t-1}{3}$, d'où on obtient $dx=\dfrac{1}{3}dt$, $x=0\Leftrightarrow t=1$ et $x=1\Leftrightarrow t=4$; ainsi :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x &= \int_1^4 \frac{\frac{t-1}{3}}{\sqrt{t}}\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int_1^4\frac{t-1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\int_1^4\frac{t}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\ &=\frac{1}{9}\int_1^4 t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}^3-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)\Big|_1^4\\ &=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{3}{2}\sqrt{4}^3-\frac{1}{2}\sqrt{4}\right)-\left(\frac{3}{2}\sqrt{1}^3-\frac{1}{2}\sqrt{1}\right)\right)\\ &=\frac{1}{9}\left(\left(\frac{3}{2}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 2\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{9}(11-1)=\frac{10}{9}\end{aligned}$$

Exemple : calculer $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

On choisit de poser $x=3\sin(t)$, d'où on obtient $dx=3\cos(t)dt$, $x=0 \Leftrightarrow t=0$ et $x=3 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{2}$; ainsi :

$$\int_0^1 \sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9-(3\sin(t))^2}\,3\cos(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9(1-\sin^2(x))}\,3\cos(t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\cos^2(x)}\,3\cos(t)\,dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dt \overset{\text{déjà vu par parties}}{=} 9(x+\sin(x)\cos(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=9\left(\frac{\pi}{2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-0\right)=9\frac{\pi}{2}$$

Voir les exercices 43 à 48

17 [Aller plus loin] Réciproques des fonctions trigonométriques

Définition

Soit la fonction *sin* définie de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans [-1;1] ; elle est alors bijective et admet une réciproque, appelée *arcsin* . On a ainsi : *arcsin* :[-1;1]→ $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $\sin(\arcsin(x))=x, \forall x\in[-1;1]$ et $\arcsin(\sin(x))=x, \forall x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Soit la fonction *cos* définie de $[0;\pi]$ dans [-1;1] ; elle est alors bijective et admet une réciproque, appelée *arccos* . On a ainsi : *arccos* :[-1;1]→ $[0;\pi]$ et $\cos(\arccos(x))=x, \forall x\in[-1;1]$ et $\arccos(\cos(x))=x, \forall x\in[0;\pi]$.

Soit la fonction *tan* définie de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ dans ℝ ; elle est alors bijective et admet une réciproque, appelée *arctan* . On a ainsi : *arctan* : ℝ → $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $\tan(\arctan(x))=x, \forall x\in\mathbb{R}$ et $\arctan(\tan(x))=x, \forall x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Théorème [dérivées des fonctions arcsin, arccos et arctan]

$$\arcsin'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad \arccos'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} , \quad \arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Théorème [primitives des fonctions arcsin, arccos et arctan]

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin(x)+cte \;,\; \int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arccos(x)+cte \;,\; \int \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan(x)+cte$$

Voir l'exercice 49

Aires, sommes, approximations

1 Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer géométriquement la valeur de l'aire de la surface délimitée par l'axe 0x, les droites $x = a$ et $x = b$ et la courbe $y = f(x)$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=4$

d. $f(x)=x+2, a=0, b=4$

e. $f(x)=-5, a=-2, b=2$

f. $f(x)=2x, a=-2, b=2$

g. $f(x)=|2x|, a=-2, b=2$

h. $f(x)=|x-2|, a=0, b=4$

i. $f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=-2, b=2$

j. $f(x)=-\sqrt{16-x^2}, a=-4, b=0$

k. $f(x)=\sqrt{4-(x-3)^2}+5, a=1, b=3$

2 Expliciter les notations suivantes :

a. $\sum_{i=1}^{5} i$

b. $\sum_{i=7}^{12} i$

c. $\sum_{i=4}^{10} \frac{1}{i}$

d. $\sum_{i=0}^{6} (-1)^i \cdot i$

e. $\sum_{i=1}^{7} (-1)^{i+1} \cdot 2i$

f. $\sum_{i=3}^{8} i^2$

3 Ecrire à l'aide de la notation pour les sommes suivantes :

a. 1 + 2 + 3 + ... + 100

b. 7 + 8 + 9 + ... + 999999

c. 12 + 14 + 16 + ... + 1000

d. les nombres impairs positifs inférieurs ou égaux à 50

e. $-1+4-9+16+...-169$

f. $3-6+9-...-63$

4 Expliciter les notations suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{6} f(x_i)$

b. $\sum_{i=11}^{16} f(x_i)$

c. $\sum_{i=1}^{5} i \cdot f(x_i)$

5 Ecrire à l'aide de la notation pour les sommes suivantes :

a. $a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5-6a_6$

b. $f(x_1)(x_1-x_0)+f(x_2)(x_2-x_1)+f(x_3)(x_3-x_2)$

6 Calculer avec la calculatrice

a. $\sum_{i=1}^{100} 2i$

b. $\sum_{i=32}^{100} 2i+1$

7 En travaillant avec des partages de l'intervalle [a;b] en 4 segments équidistants, approximer l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites $x=a$ et $x=b$ et la courbe $y=f(x)$ donnée par :

a. $y=8x-1$; $a=1$; $b=4$

b. $y=x^2$; $a=0$; $b=3$

8 Utiliser la calculatrice pour approximer l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites $x=1$ et $x=4$ et la courbe $y=x^2$ en travaillant avec un partage de l'intervalle en 8 segments équidistants, puis en 16,

Voir la théorie 1 à 3

Intégrale de Riemann

9 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

Déterminer à l'aide de grandes et petites sommes de Riemann l'aire A sous la courbe de f délimitée par l'axe 0x, x=0 et x=3.

10 Déterminer la valeur de l'aire A délimitée par l'axe 0x, les droites x=0 et x=1 et la courbe représentative de $y = x^3$ en utilisant la définition de l'intégrale.

Indication : utiliser la formule

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a. Même question avec x=0 et x=3.

b. Même question avec x=0, x=b et $b\geq 0$

c. Même question avec x=a, x=b et :

i $0\leq a\leq b$ ii $a\leq b\leq 0$ iii $a\leq 0\leq b$

11 Qui était Riemann? Quand et où a-t-il vécu?

12 Soit $\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx=0$. Que peut-on en déduire quant à a ?

Exercices d'entraînement

13 Pour chacune des fonctions f et des a et b ci-dessous, déterminer la valeur de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

a. $f(x)=x, a=0, b=4$

b. $f(x)=x, a=-2, b=2$

c. $f(x)=x, a=-2, b=4$

d. $f(x)=x+2, a=0, b=4$

e. $f(x)=-5, a=-2, b=2$

f. $f(x)=2x, a=-2, b=2$

g. $f(x)=|2x|, a=-2, b=2$

h. $f(x)=|x-2|, a=0, b=4$

i. $f(x)=\sqrt{4-x^2}, a=-2, b=2$

j. $f(x)=-\sqrt{16-x^2}, a=-4, b=0$

k. $f(x)=\sqrt{4-(x-3)^2}+5, a=1, b=3$

l. $f(x)=\sin(x), a=-\pi, b=pi$

14 On considère la fonction $f(x)=\begin{cases}2, \text{si } x\in]0;3]\\4, \text{si } x=0\end{cases}$ et $[a;b]$ = [0;3].

a. Représenter graphiquement f.

b. Déterminer $\Delta x, x_0, x_1, x_2, x_{n-1}$ et x_n

c. Calculer $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ de façon détaillée à l'aide des petites et grandes sommes de Riemann.

Voir la théorie 4 à 7

Primitives

15 Calculer les dérivées des fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=3x^4+x^2$

b. $f(x)=\sqrt{x}$

c. $f(x)=x^3-2x^2+x$

d. $f(x)=\sin(x)\cos(x)$

e. $f(x)=\sqrt{x}\sin(x)$

f. $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x^3+2x}$

g. $f(x)=\dfrac{1}{\cos(x)}$

h. $f(x)=\sqrt{-2x}$

i. $f(x)=\sin(3x)$

j. $f(x)=\sqrt{8x^2-2x+3}$

16 Déterminer une primitive pour chacune des fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=2x-1$

b. $f(x)=x^3-5x^2+3x-2$

c. $f(x)=\dfrac{5}{3}x^4-\dfrac{3}{4}x^2+1$

d. $f(x)=(2x)^3$

e. $f(x)=(x+1)^2$

f. $f(x)=(2x+1)^3$

g. $f(x)=(2-x)^{12}$

h. $f(x)=(4x-2)^5$

i. $f(x)=6x(3x^2+1)^2$

j. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

k. $f(x)=6x(1-x^2)^3$

l. $f(x)=(1-2x)^2$

m. $f(x)=2x+1-\dfrac{1}{x^2}$

n. $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$

o. $f(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$

p. $f(x)=4+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^5}$

q. $f(x)=-\dfrac{4}{x^4}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^5}$

r. $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^2}$

s. $f(x)=\dfrac{x^3-3}{x^2}$

t. $f(x)=\dfrac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

u. $f(x)= \frac{2}{x}^3+\frac{1}{2x^2}$

v. $f(x)= (3x+2)^6$

w. $f(x)= (4x^2-5x)^2(16x-10)$

x. $f(x)= \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$

y. $f(x)= x\sqrt{x}$

z. $f(x)= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

aa. $f(x)= x\sqrt{x^2+1}$

ab. $f(x)= \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

ac. $f(x)= \sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

ad. $f(x)= \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

ae. $f(x)= \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$

af. $f(x)= \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}}$

ag. $f(x)= \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}$

ah. $f(x)= (3x^2+1)\sqrt{x^3+x+2}$

ai. $f(x)= 2\sqrt{x}+\sqrt{2x}$

aj. $f(x)= 2x+\sqrt[3]{x}$

ak. $f(x)= 2x-\frac{1}{\sqrt{x}}$

al. $f(x)= \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$

am. $f(x)= (x+2\sqrt{x})^2$

an. $f(x)= (2x-5)\sqrt{x^2-5x+6}$

ao. $f(x)= \cos(x)\sqrt{\sin(x)}$

ap. $f(x)= \sin(3x)$

aq. $f(x)= 1+tg^2(2x)$

ar. $f(x)= 2\sin(x)+3\cos(x)$

as. $f(x)= tg^2(x)$

at. $f(x)= \frac{1}{2}\cos(4x)$

au. $f(x)= \sin^5(x)\cos(x)$

av. $f(x)= \sin(x)\cos^4(x)$

aw. $f(x)= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

ax. $f(x)= \sin(x)(1-\cos(x))$

ay. $f(x)= \frac{\sin(x)}{(1+\cos(x))^2}$

az. $f(x)= \cos(x)-\sin^2(x)\cos(x)$

ba. $f(x)= \frac{\cos(x)}{(4\sin(x)-1)^3}$

17 On considère la fonction f définie par $f(x)=5x^2+14$

a. Déterminer une primitive F de f.

b. Déterminer toutes les primitives de f

c. Parmi les primitives de f, y en a-t-il une (ou plusieurs) dont la courbe représentative contient le point $(0;2)$?

Voir la théorie 8 à 9

Accélérer

18 Déterminer :

a. $\int_2^2 x^3\,dx$

b. $\int_{2\pi}^0 \sin(x)\,dx$

c. $\int_2^0 x^2\,dx$

d. $\int_{-2}^{-4} x^2\,dx$

19 Déterminer, en justifiant chaque étape, les intégrales ci-dessous :

a. $\int_2^3 (x^3+x)\,dx$

b. $\int_{-2}^1 (-3x-1)\,dx$

c. $\int_{-2}^1 \frac{2x^3-x^2+3x}{5}\,dx$

20 Exprimer en une seule intégrale :

a. $\int_5^1 f(x)\,dx+\int_{-3}^5 f(x)\,dx$

b. $\int_c^d f(x)\,dx+\int_e^c f(x)\,dx$

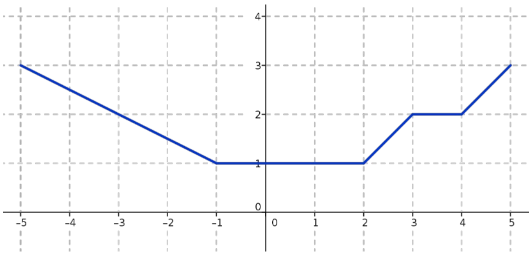
c. $\int_c^{c+h} f(t)\,dt - \int_c^h f(t)\,dt$

d. $\int_c^m f(x)\,dx - \int_d^m f(x)\,dx$

21 Quel est le nombre c qui satisfait la conclusion du théorème de la moyenne pour la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{2}+1$ sur l'intervalle $[0;2]$?

Interpréter graphiquement.

22 Calculer la valeur moyenne sur l'intervalle [-5;5] de la fonction f ci-dessous :



23 Un réservoir se vide avec un débit $f(t)=100-t-\frac{t^2}{5}$ qui diminue en fonction du temps, car la pression diminue au fur et à mesure que le réservoir se vide (par exemple, au temps t=10 [s], le débit est de 70 [litres/s]).

a. Quel est le débit moyen entre t=0 et t=20 ?

b. Si le réservoir était plein à l'instant initial t=0 et s'est vidé en 20 secondes, combien contenait-il (en litres) quand il était plein ?

24 On considère deux fonctions f et g intégrables sur ℝ .Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $f(x)=-3\cdot g(x), \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx=-3\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

b. Si $\int_a^b f(x)\,dx=-3\cdot\int_a^b g(x)\,dx$, alors $f(x)=-3\cdot g(x), \forall x\in[a;b]$

c. Si $f(x)\leq 2, \forall x\in[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq 2$

d. L'aire du domaine compris entre les courbes d'équations $f_1(x)=ax\,(a>0)$ et $g(x)=x^2$ est le double de celle comprise entre les courbes d'équations $f_2(x)=\frac{ax}{2}\,(a>0)$ et $g(x)=x^2$

e. Si $\int_1^4 f(x)\,dx=6$ et $\int_4^5 f(x)\,dx=2$, alors $\int_5^1 -2\cdot f(x)\,dx=16$

25 Déterminer :

a. $\int(4x+3)dx$ **b.** $\int(4t+3)dx$

26 Déterminer :

a. $\left.\frac{3x}{x-1}\right|_{-1}^{2}$ **c.** $\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b$

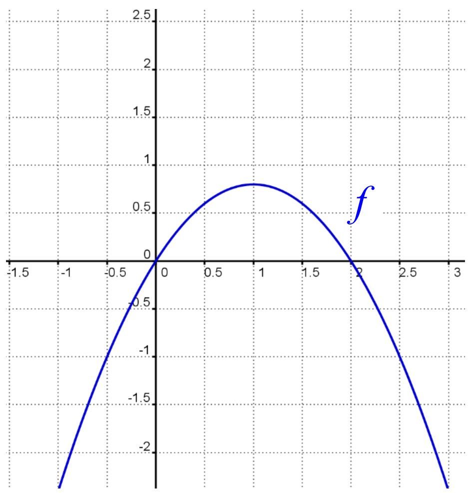
b. $\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b$

27 Calculer :

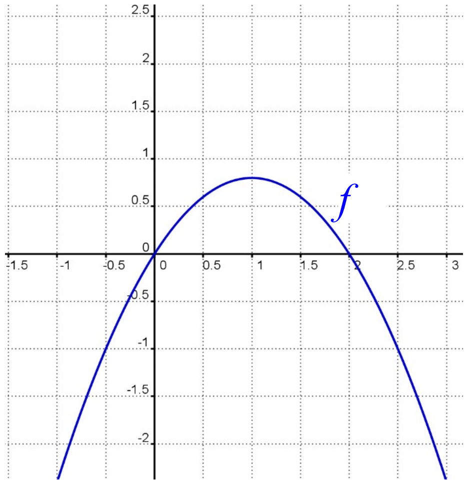
a. $I=\int_1^4 5x\sqrt{x}\,dx$ **b.** $I=\int_0^1 \frac{3x}{(3x^2+2)^2}\,dx$

28 On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les trois cas. Dans les 3 cas ci-dessous, on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés.

a. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f :

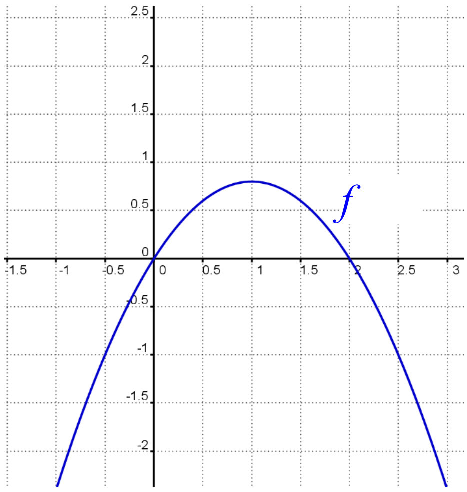


b. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive F de f définie par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$:



c. Quelle relation y a-t-il entre la tangente à F en 2 et $f(2)$?

d. Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive G de f définie par $G(x)=\int_2^x f(t)dt$:



29 Vrai ou faux ?

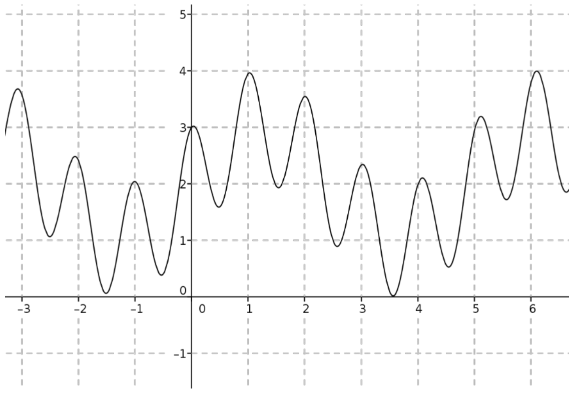
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse et justifier précisément votre réponse en vous appuyant sur un contre-exemple détaillé ou en vous basant explicitement sur les résultats vus au cours.

a. Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, et si s_n et S_n sont les petites et grandes sommes de Riemann de f sur $[a;b]$, alors $s_n<S_n$.

b. Si $f(x)>0$ pour tout x réel, alors $\int_0^x f(t)dt>0$ pour tout x réel.

c. La fonction f définie par $f(x)=\sin(x^2)$ possède une primitive.

30 On considère la fonction « aire sous la courbe » A définie par $A(x)=\int_0^x f(t)\,\text{dt}$ où f est la fonction représentée ci-dessous :



Répondre par vrai ou faux et justifier :

a. $A(0)=1$

b. A est croissante sur $[1;3]$

c. $A(1)=4$

Voir la théorie 10 à 11

Applications

31 Calculer les aires des surfaces délimitées par les deux courbes données :

a. $y=1+4x-x^2$ et $y=1+x^2$

b. $y=x^3-x^2-2x+2$ et $y=2$

c. $y=x^2$ et $y=x^3$

d. $y=x^3$ et $y=3x+2$

32 Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x)=2x^3$ et $g(x)=2x-3x^2$.

33 On considère la surface délimitée dans le premier quadrant par les axes de coordonnées et les courbes des fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ et $g(x)=1$.

a. Représenter graphiquement cette surface.

b. Où placer une verticale pour partager cette surface en deux parties de même aire ?

Exercices d'entraînement

34 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe définie par la fonction f sur l'intervalle donné :

a. $f(x)=2$, de 0 à 2 **b.** $f(x)=2x^2$, de 0 à 5

35 Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la courbe d'équation $4x^2+9y^2=36$.

36 On fait tourner autour de Ox la région comprise entre les deux courbes données. Calculer le volume du solide obtenu :

a. $y=x^2$ et $y=2x$ **b.** $y=\sqrt{x}$ et $y=x^3$

37 On considère le domaine D du plan limité par la courbe $y=\sqrt[3]{x}$, l'axe Ox et la droite $x=8$. On considère d'autre part le solide de révolution S engendré par la rotation autour de l'axe Ox du domaine D.

a. Représenter le domaine D sur un repère orthonormé.

b. Esquisser une représentation en perspective du solide S.

c. Calculer le volume exact du solide S.

On assimile le solide S à un récipient en le plaçant "debout" : axe de rotation en position verticale, ouverture vers le haut.

d. Déterminer la hauteur exacte à laquelle il faut remplir ce récipient pour qu'il soit à moitié plein.

38 Soient $A(2;2)$, $B(6;2)$, $C(6;4)$ et $D(2;4)$. Un corps est engendré par la rotation du rectangle $ABCD$ autour de :

a. la droite $x = 9$; **c.** la droite $x + y = 0$.

b. la droite $y = -5$;

Déterminer dans chacun de ces cas le volume de ce corps.

39 Calculer la longueur de la courbe définie par la fonction f définie par $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ entre $x=0$ et $x=5$.

Voir la théorie 12 à 14

Autres méthodes d'intégration

40 Déterminer en utilisant l'intégration par parties :

a. $\int x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ **b.** $\int x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$

41 Calculer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x$

d. $\int_0^{\pi} (3t^2-4)\cos(t)\,\mathrm{d}t$

e. $\int_0^{1} x(1-x)^n\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$

42 Déterminer l'aire de la surface comprise entre le graphe de $f(x)=\sin^2(x)$, les axes 0x et 0y et la droite $x = 3$.

43 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant l'intégration par parties :

a. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

b. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\mathrm{d}x$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

g. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

h. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2\cos^3(x)\,\mathrm{d}x$

44 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes en utilisant l'intégration par substitution :

a. $\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \sqrt{1-3x^2}\,\mathrm{d}x$

b. $\int_0^{2} \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,\mathrm{d}x$

c. $\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$

d. $\int_0^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$

45 Déterminer les valeurs des intégrales suivantes :

a. $\int_0^{\pi}(x-1)\cos(x)\,dx$

b. $\int_0^{2}\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$

c. $\int_0^{\pi}3\sin(3x)\,dx$

d. $\int_0^{\pi}3x\sin(3x)\,dx$

e. $\int_0^{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx\ (a>0)$

f. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(x)\,dx$

g. $\int_0^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx\ (a>0)$

h. $\int_0^{3}x\sqrt{1+x}\,dx\ (a>0)$

Voir la théorie 15 à 16

Arc sin, arccos, arctan

46 Déterminer une primitive :

a. $\int\frac{-3}{\sqrt{4-4x^2}}\,dx$

c. $\int\frac{-3}{\sqrt{4-4x^2}\,dx}$

b. $\int\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}\,dx}$

d. $\int\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$

47 On considère le cercle de centre (0;0) et de rayon 2. Calculer le volume du solide S engendré par sa rotation autour l'axe x=3.

Voir la théorie 17

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

48 Expliciter les notations et calculer quand c'est possible les sommes suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{5}i$

d. $\sum_{j=1}^{4}(j^2+1)$

b. $\sum_{k=2}^{4}k^2$

e. $\sum_{k=0}^{5}k(k-1)$

c. $\sum_{i=0}^{6}2i$

f. $\sum_{j=1}^{4}(2^j+1)$

g. $\sum_{n=1}^{4}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)$

j. $\sum_{k=3}^{6}f(x_i)$

h. $\sum_{k=1}^{1000}2$

k. $\sum_{k=10}^{n}k$

i. $\sum_{i=1}^{6}f(x_i)$

49 Écrire à l'aide de la notation Σ :

a. $5+6+7+8+9+...+999$

b. $1+3+5+7+9+...+73$

c. $1^2+2^2+3^2+.....+n^2$

d. $0^2+1^2+2^2+.....+(n-1)^2$

50 Exprimer les sommes suivantes à l'aide d'une formule en fonction de n (sans Σ).

a. $\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+5)$

b. $\sum_{j=1}^{m}(3j^2-2j+1)$

51 Soit A l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre les droites $x=a$ et $x=b$. Pour chacune des fonctions f données ci-dessous, calculer des approximations de A en divisant l'intervalle $[a;b]$ en 4 sous-intervalles de même longueur :

a. $f(x)=3-x$, a=-2 et b=2.

b. $f(x)=x^2+1$, a=1 et b=3.

52 Déterminer l'aire délimitée par l'axe Ox, les droites $x=0$ et $x=3$ et la courbe $y=\frac{x^2}{2}$ en utilisant les sommes de Riemann.

53 Soit A l'aire sous la courbe représentative de la fonction f entre les droites $x=a$ et $x=b$. Pour chacune des fonctions f données ci-dessous, calculer l'intégrale de Riemann avec la définition :

a. $f(x)=2x+3$, a=0 et b=4

b. $f(x)=8-3x$, a=0 et b=2

c. $f(x)=9-x^2$, a=0 et b=3

d. $f(x)=x^3+1$, a=0 et b=2

54 Déterminer une primitive pour toutes les fonctions f définies ci-dessous :

a. $f(x)=\frac{5}{3}x^4-\frac{3}{4}x^2+1$

b. $f(x)=\frac{7x^3-x}{3}$

c. $f(x)=(2-x)^{12}$

d. $f(x)=(34x-2)^5$

e. $f(x)=6x(3x^2+1)^2$

f. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+1)^5$

g. $f(x)=6x(1-x^2)^3$

h. $f(x)=2x+1-\frac{1}{x^2}$

i. $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$

j. $f(x)=-\frac{4}{x^4}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^5}$

k. $f(x)=\frac{x^3-3}{x^2}$

l. $f(x)=\frac{3x^2}{(1+2x^3)^2}$

m. $f(x)=x\sqrt{x}$

n. $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3x^2}$

o. $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

p. $f(x)=\sin(3x)$

q. $f(x)=\cos(x)\sqrt{\sin(x)}$

r. $f(x)=1+\tan^2(2x)$

s. $f(x)=\frac{1}{2}\cos(4x)$

t. $f(x)=\sin^5(x)\cos(x)$

u. $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

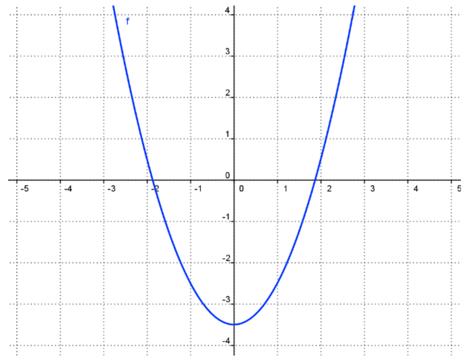
55 Déterminer la primitive F de la fonction f qui contient le point donné :

a. $f(x)=4x^3-2x+3$ telle que $F(1)=4$

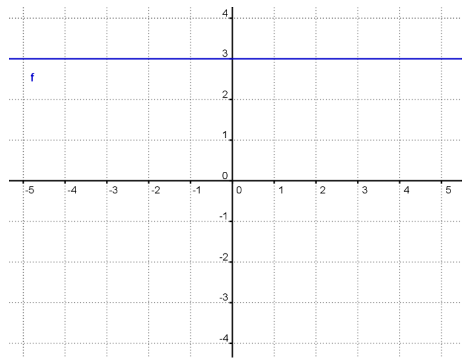
b. $f(x)=\sin(x)+\cos(2x)$ telle que $F(\frac{\pi}{2})=2$

56 Tracer sur les graphiques suivants une fonction F dont la dérivée est chaque fois la fonction f représentée :

a.

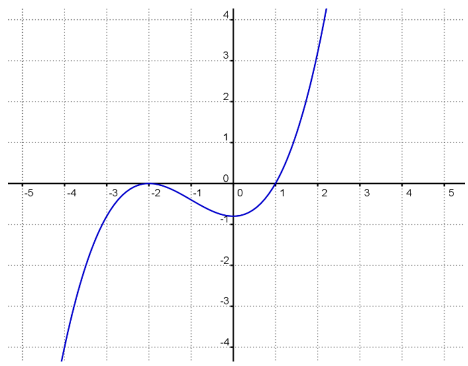


b.

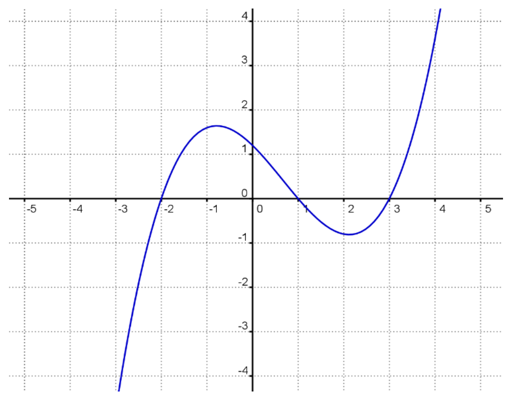


57 Tracer sur les graphiques suivants une fonction F dont la dérivée est chaque fois la fonction f représentée :

a.



b.



58 À l'aide des propriétés des intégrales, calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_1^4 (3x^2+5)\,dx$ **c.** $\int_0^1 (2-9x-4x^2)\,dx$

b. $\int_1^4 (6x^2-1)\,dx$ **d.** $\int_{-1}^0 (3x+2)^2\,dx$

59 Déterminer le(s) nombre(s) c qui satisfont la conclusion du théorème de la moyenne pour l'intégrale donnée, et quelle est la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$?

a. $\int_0^3 3x^2\,dx$ **b.** $\int_{-4}^{-1} \frac{3}{x^2}\,dx$

60 Calculer les intégrales indéfinies suivantes :

a. $\int \left(\frac{1}{z^3}-\frac{3}{z^2}\right)dz$ **b.** $\int \frac{3}{4}\cos(u)\,du$

61 Calculer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y=3x-x^2$ et l'axe Ox.

62 Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions sin et cos entre 0 et 2π .

63 Calculer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y=\frac{1}{3}x^2-2x+3$ et les droites d'équations $y=-\frac{1}{3}x+\frac{23}{3}$ et $y=2x+3$

64 On considère la fonction f définie par $f(x)=4x-x^2$ et la verticale d'équation $x=c$, avec $c\in]0;4[$

a. Calculer l'aire du domaine ombré si c = 1.

b. Trouver la valeur de $c\in]0;4[$ pour laquelle l'aire du domaine ombré vaut 9.

c. Pour quelle(s) valeur(s) de c l'aire du domaine ombré vaut c^2 ?

d. Pour quelle valeur de c la verticale $x = c$ partage le domaine délimité par le graphe de f et l'axe Ox en deux parties égales ?

65 On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x)=2x$ et $g(x)=x^2$.

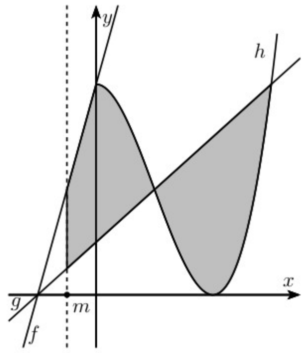
a. Calculer l'aire du domaine compris entre les graphes de f et g.

On considère une fonction h définie par $h(x)=cx$ où c est une constante.

b. Déterminez le nombre c tel que l'aire du domaine compris entre les graphes de g et de h soit 4 fois plus petite que l'aire du domaine compris entre les graphes de f et g calculé en **a**.

66 On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x)=4x+4$, $g(x)=x+1$ et $h(x)=x^3-3x^2+4$.

On considère le domaine D suivant :



et la droite d'équation $x=m$.

Déterminer m>-1 tel que l'aire A de D soit égale à 55/8.

67 On fait tourner autour de Ox la région comprise entre les deux courbes d'équations $y=\frac{x^3}{8}$ et $y=x^2$. Calculer le volume du solide obtenu.

68 Calculer le volume de révolution obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la surface comprise entre le graphe de la fonction f définie par $f(x)=x^2$, les verticales $x=0$ et $x=2$ et l'axe Ox .

69 Calculer le volume de révolution obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la surface comprise entre les graphes des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2+3$ et $g(x)=\frac{1}{2}x+2$ et les verticales $x=0$ et $x=1$.

70 Calculer le volume de révolution obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la surface comprise entre les graphes des fonctions f et g définies par $f(x)=-x^2+5$ et $g(x)=x+3$.

71 Calculer le volume de révolution obtenu par rotation autour de l'axe Ox de la surface comprise entre les graphes des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2$ et $g(x)=4-x^2$.

72 Calculer la longueur de la courbe définie par la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^4+3}{6x}$ sur l'intervalle [1;2].

73 Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

a. $f(x)=2\cos(x)-3\sin(x)$

b. $f(x)=\sin(2x)$

c. $f(x)=\frac{3}{\sqrt{5x+1}}$

d. $f(x)=(2x+1)^2$

e. $f(x)=\sqrt{3}x+\sqrt{3x}+\frac{5}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$

f. $f(x)=\cos(3x+\frac{\pi}{3})$

g. $f(x)=\cos^2(3x+\frac{\pi}{3})$

h. $f(x)=\cos(x)\sin^4(x)$

i. $f(x)=3x\sqrt{1+x^2}$

j. $f(x)=(3x-1)(3x^2-2x+3)^3$

k. $f(x)=\frac{1-x^2}{(x^3-3x+1)^3}$

l. $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}$

m. $f(x)=\cos(\sqrt{x})$

n. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}$

o. $f(x)=\frac{-4}{\sqrt{1-x^2}}$

p. $f(x)=\frac{\pi}{1+x^2}+x^2$

q. $f(x)=\frac{x^3+5x^2-4}{x^2}$

r. $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

74 Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

a. $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$ **b.** $\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{dt}$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{dx}$ **f.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\mathrm{dx}$

d. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{dx}$ **g.** $\int_4^5 \frac{x+2}{\sqrt{(x-1)^3}}\,\mathrm{dx}$

e. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{dx}$ **h.** $\int_2^3 t^2\sqrt{3-t}\,\mathrm{dx}$

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

48 Expliciter les notations et calculer quand c'est possible les sommes suivantes :

a. $\sum_{i=0}^{5} i=0+1+2+3+4+5=15$

b. $\sum_{k=2}^{4} k^2=2^2+3^2+4^2=29$

c. $\sum_{i=0}^{6} 2i=0+2+4+6+...+12=42$

d. $\sum_{j=1}^{4} (j^2+1)=1^2+1+2^2+1+3^2+1+4^2+1=35$

e. $\sum_{k=0}^{5} k(k-1)=0\cdot(-1)+1\cdot0+2\cdot1+...+5\cdot4=40$

f. $\sum_{j=1}^{4} (2^j+1)=2^1+1+2^2+1+...2^4+1=35$

g. $\sum_{n=1}^{4} (-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)=-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{7}{12}$

h. $\sum_{k=1}^{1000} 2=1+2+...+1000=\frac{1000\cdot1001}{2}=500500$

i. $\sum_{i=1}^{6} f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_6)$

j. $\sum_{k=3}^{6} f(x_i)=f(x_i)+f(x_i)+f(x_i)+f(x_i)=4f(x_i)$

k. $\sum_{k=10}^{n} k=n\frac{(n+1)}{2}-45$

49 Écrire à l'aide de la notation Σ :

a. $\sum_{i=5}^{999} i$

b. $\sum_{i=1}^{37}(2i-1)=\sum_{i=0}^{36}(2i+1)$

c. $\sum_{i=1}^{n} i^2$

d. $\sum_{i=0}^{n-1} i^2$

50 Exprimer les sommes suivantes à l'aide d'une formule en fonction de n (sans Σ).

a. $\dfrac{n(n+1)(2n+1)+6n(n+1)+30n}{6}$

b. $\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+\dfrac{m(m+1)(2m+1)}{3}-\dfrac{m(m+1)}{2}+4m$

51

a. $10<A<14$ **a.** $8{,}75<A<10{,}25$

52 $A=4{,}5$

53

a. $A=28$ **c.** $A=18$

b. $A=28$ **d.** $A=6$

54

a. $F(x)=\dfrac{1}{3}x^5-\dfrac{1}{4}x^3+x$

b. $F(x)=\dfrac{7}{12}x^4-\dfrac{1}{6}x^2$

c. $F(x)=-\dfrac{1}{13}(2-x)^{13}$

d. $F(x)=\dfrac{1}{204}(34x-2)^6$

e. $F(x)=\dfrac{1}{3}(3x^2+1)^3$

f. $F(x)=\dfrac{1}{6}(x^2-3x+1)^6$

g. $F(x)=-\dfrac{3}{4}(1-x^2)^4$ I

h. $F(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}$

i. $F(x)=\dfrac{1}{1-x}$

j. $F(x)=\dfrac{4}{3x^3}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{4x^4}$

k. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3}{x}$

l. $F(x)=-\dfrac{1}{2(1+2x^3)}$

m. $F(x)=\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5}$

n. $F(x)=3\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{1}{3x}$

o. $F(x)=2\sqrt{x^2+x+1}$

p. $F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos(3x)$

q. $F(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)}$

r. $F(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2x)$

s. $F(x)=\dfrac{1}{8}\sin(4x)$

t. $F(x)=\dfrac{1}{6}\sin^6(x)$

u. $F(x)=-\dfrac{2}{3}\cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)$

55

a. $f(x)=4x^3-2x+3$

b. $f(x)=-\cos(x)+\dfrac{1}{2}\sin(2x)+2$

56

57

58

a. $A=78$ **c.** $A=21$

b. $A=123$ **d.** $A=1$

59

a. $c=\pm\sqrt{3}\ \ /\ 9$ **b.** $c=\pm 2\ \ /\ 0{,}75$

60

a. $-\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{3}{z}$ **b.** $\dfrac{3}{4}\sin(u)[+cte]$

61 $A=4{,}5$

62 $A=4\sqrt{2}$

63 $A=40.5$

64

a. $A=\frac{5}{3}$

b. $c=0$ ou $c=3$

c. $c=3$

d. $c=2$

65

a. $A=\frac{4}{3}$

b. $c=\sqrt[3]{2}$

66 $m=0{,}5$

67 $\frac{65536}{35}\pi$

68 . $\frac{32}{5}\pi$

69 $\frac{367}{60}\pi$

70 $\frac{153}{5}\pi$

71 $\frac{64\sqrt{2}}{3}\pi$

72 $\frac{7}{12}$

73

a. $F(x)=2\sin(x)+3\cos(x)$

b. $F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$

c. $F(x)=\frac{6}{5\sqrt{5x+1}}$

d. $F(x)=\frac{1}{6}(2x+1)^3$

e. $F(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{x^3}+10\sqrt{x}+\frac{2}{2}-\frac{1}{x^2}$

f. $F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x+\frac{\pi}{3})$

g. $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{-\sin(6x)+\sqrt{3}\cos(6x)}{24}$

h. $F(x)=\frac{1}{5}\sin^5(x)$

i. $F(x)=\sqrt{(1+x^2)^3}$

j. $F(x)=\frac{1}{8}(3x^2-2x+3)^4$

k. $F(x)=\frac{1}{6}\frac{1}{(x^3-3x+1)^2}$

l. $F(x)=\sqrt{x^2-2x}$

m. $F(x)=2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})+2\cos(\sqrt{x})$

n. $F(x)=\frac{1}{3}\sqrt[4]{(x^3+2)^3}$

o. $F(x)=-4\arccos(x)$

p. $F(x)=\pi\arctan(x)+\frac{x^3}{3}$

q. $F(x)=\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}$

r. $F(x)=x+\frac{1}{x+1}$

74

a. -1

b. $\frac{\pi}{2}$

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{116}{15}$

e. $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

f. $-\frac{3\pi}{8}+\frac{9}{8}\sqrt{3}$

g. 1

h. $t^2\sqrt{3-t}$

Exercices d'approfondissement

1 *[exercice à faire avec GeoGebra]* On considère le domaine D délimité par l'axe Ox et la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=4x-x^2$. La droite d'équation $g(x)=\frac{x}{2}$ partage le domaine D en deux surfaces.

a. Calculer leurs aires.

b. Pour quelle valeur de m la droite d'équation $g_m(x)=mx$ coupe-t-elle D en deux surfaces dont les aires sont égales ?

c. Illustrer le résultat avec un graphique.

d. Généraliser aux fonctions du type $f(x)=x(k-x)$, avec $k>0$.

2 *[exercice à faire avec avec GeoGebra]* Soit f définie par $f(x)=2x^3+3x^2-36x+12$ et le point P(-2;80).

a. Déterminer l'équation de la droite t tangente au graphe de f au point P.

b. Cette droite t coupe le graphe de f en un unique autre point que P, qu'on note Q. Cette affirmation est vraie si P n'est pas un point particulier du graphe de f : lequel?

c. Soit M le point d'inflexion de f. Déterminer l'équation de la droite g passant par Q et M.

d. Représenter graphiquement les objets des questions précédentes.

On considère la surface S_1 (délimitée par le graphe de f et la droite t) et la surface S_2 (délimitée par le graphe de f et la droite g).

e. Calculer le rapport des aires de S_1 et de S_2.

f. Est-ce que ce rapport dépend du point P choisi initialement ? Pour répondre, refaire l'exercice avec un point P quelconque d'abscisse k.

3 *[exercice à faire avec avec GeoGebra].* On considère une parabole concave qui croise l'axe Ox aux points (1;0) et (3;0). On désigne par r l'ordonnée du sommet de cette parabole, par D le domaine du plan délimité par cette parabole et l'axe Ox et par S le solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe Ox .

a. Calculer le volume de S en fonction de r.

b. Pour quelle(s) valeur(s) de r le volume de S est-il égal à 15π ?

Soit d_m la droite de pente $m>0$ passant par le point (1;0) et soit D_m le domaine du plan délimité par la parabole et par d_m . La rotation de D_m autour de l'axe Ox engendre un solide de révolution.

c. Exprimer le volume de ce solide en fonction de r et de m.

On pose r = 2.

d. Déterminer les valeurs à attribuer au paramètre m afin que le volume soit égal à 10.

e. Illustrer chaque réponse par un schéma.

4 Etudier la relation entre « f est continue », « f est intégrable » et « f admet une primitive ».

Existe-t-il des fonctions intégrables qui n'admettent pas de primitive ?

Existe-t-il des fonctions non continues qui admettent une primitive ? SI oui, celle-ci est-elle forcément continue ? Dérivable ?

Existe-t-il des fonctions non continues qui n'admettent pas de primitive ?

Quelles sont les fonctions continues qui admettent une primitive ?

5 Une « Histoire ancienne de l'intégration »

https://www.math.u-bordeaux.fr/~echarpen/integra/drouin1.ps

«... l'art de vivre ... consiste dans l'expérience intégrale du présent. »
Emil Cioran, philosophe et écrivain roumain (1911-1995)

A savoir en fin de chapitre

Aires et sommes

- ✔ calculs d'aires exactes pour des figures « simples » délimitées par des fonctions connues ;
- ✔ notations $\sum\limits_{...}^{...} ...$;
- ✔ approximations d'aires par calculs d'aires de rectangles ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 8

Intégrale de Riemann

- ✔ petites et grandes sommes de Riemann ;
- ✔ intégrale de Riemann ;
- ✔ relation entre aire et intégrale ;
- ✔ fonctions non intégrables
- ✔ fonctions non continues mais intégrables ;
- ✔ critère d'intégrabilité ;
- ✔ relation intégrabilité-dérivabilité-continuité ;

Voir la théorie 4 à 7 et les exercices 9 à 14

Primitives

- ✔ notion de primitive ;
- ✔ primitive avec condition initiale ;
- ✔ méthodes de calcul de primitives ;
- ✔ interprétation géométrique de la notion de primitive ;
- ✔ représenter graphiquement la dérivée et une primitive d'une fonction donnée graphiquement ;

Voir la théorie 8 à 9 et l'exercice 15 à 17

Accélérer

- ✔ propriétés de l'intégrale et calculs d'aires avec les propriétés ;
- ✔ théorème de la moyenne et théorème fondamental I ;
- ✔ relation entre toutes les primitives d'une fonction donnée ;
- ✔ théorème fondamental II ;
- ✔ calcul d'intégrales ;
- ✔ intégrale indéfinie ;

Voir la théorie 10 à 11 et les exercices 18 à 30

Applications

- ✔ calcul d'aires avec des intégrales ;
- ✔ volumes de révolution : théorème et calculs ;
- ✔ calcul de longueurs d'arc ;

Voir la théorie 12 à 14 et les exercices 31 à 42

Autres méthodes d’intégration

- ✔ calculs d'intégrales et recherche de primitives par parties ;
- ✔ calculs d'intégrales et recherche de primitives par changement de variable ;

Voir la théorie 15 à 16 et les exercices 43 à 48

Réciproques de sin, cos et tan

- ✔ définition de arcsin, arccos et arctan ;
- ✔ dérivées de arcsin, arccos et arctan ;
- ✔ utilisation de arcsin, arccos et arctan pour déterminer des primitives.

Voir la théorie 17 et l’exercice 49

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...
https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/4e/complements/ch01