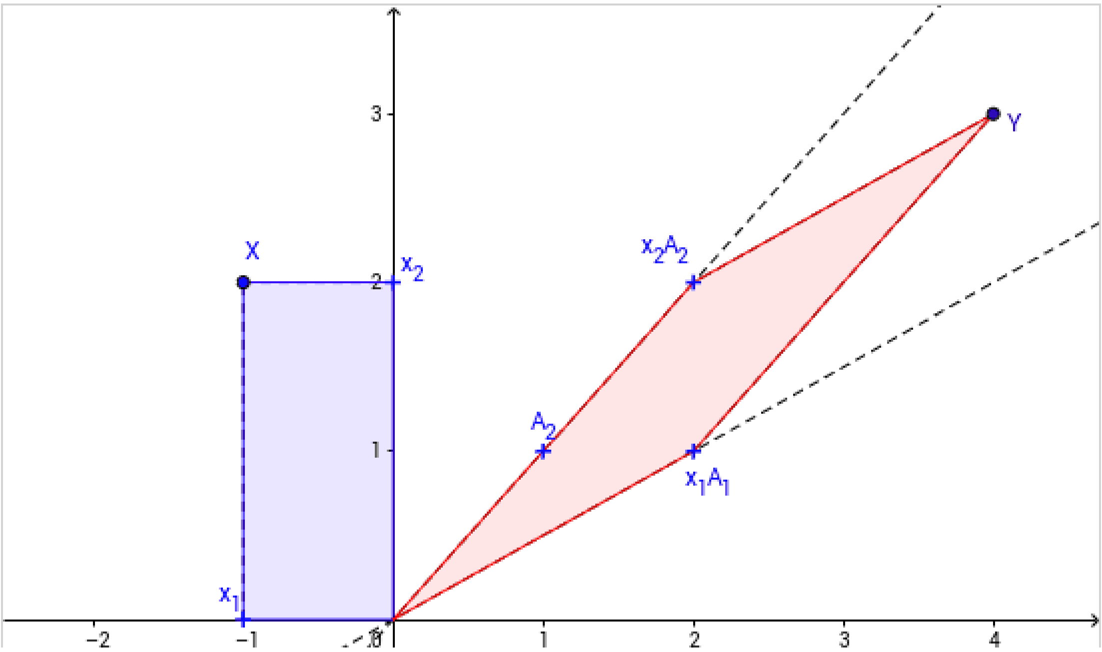
Chapitre Av2 - Complément d'algèbre linéaire



Problème

Un mât de télécommunication est installé au sommet d'un immeuble. On souhaite le placer de façon à optimiser la qualité des communications. Le toit est rectangulaire. Le mât est fixé avec des câbles rectilignes qui relient le sommet du mât aux quatre coins du toit. Deux câbles opposés mesuent 10 et 11 mètres, un autre 14 mètres. Quelle est la longueur du quatrième câble?

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Noyau et image

1. Définir les notions de **noyau** et d'**image** d'une application linéaire L.

2. Enoncer et illustrer la formule qui relie les **dimensions** de Ker(L) et Im(L).

3. Déterminer Ker(L) et Im(L) dans les cas suivants et illustrer graphiquement :

a. $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y\\x\end{pmatrix}$ **b.** $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\y-x\end{pmatrix}$

Voir la théorie 1 et les exercices 1 à 2

2 [Activité] Changement de base

1. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la **base canonique** $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi $B=(\vec{b}_1;\vec{b}_2)$ est aussi une base **base** de $\mathbb{R}^2$.

b. Ecrire $\vec{v}$ dans les deux bases et illustrer graphiquement.

c. Expliquer comment on peut utiliser une **matrice de changement de base** P pour passer de l'écriture de $\vec{v}$ dans la base C vers celle dans la base B, et son inverse P^{-1} réciproquement pour passer de l'écriture de $\vec{v}$ dans la base B vers celle dans la base C.

2. Soient $L:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice $M=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ dans la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, soit une autre **base** $B=(\vec{b}_1;\vec{b}_2)$ avec $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ et soit $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

a. Déterminer la matrice de changement de base P de B vers C, notée M_{CB} puis P^{-1} la matrice de changement de base de C vers B, notée M_{BC}.

b. Utiliser la matrice de changement de base pour déterminer les composantes de $\vec{v}$ dans la base B. Illustrer graphiquement.

c. Calculer $P^{-1}\cdot M\cdot P$ et $P\cdot M\cdot P^{-1}$. Interpréter et illustrer par un schéma en précisant les notations.

Notons $M=M_{CC}(L)=\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$ pour indiquer qu'on travaille à la source et au but avec la base canonique.

d. Calculer $M_{CC}(L)\cdot\vec{v}=M_{CC}(L)\cdot\vec{v}_C$ (dans la base canonique) et $M_{BB}(L)\cdot\vec{v}_B$.

e. Quel intérêt y a-t-il à utiliser $M_{BB}(L)$?

Voir la théorie 2 à 3 et les exercices 3 à 4

3 [Activité] Vecteurs propres et valeurs propres

1. Définir les notions de **valeur propre**, de **vecteur propre** et de **sous-espace propre** (associés à une valeur propre) pour une application linéaire L.

2. Illustrer avec L définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-y \\ y-x \end{pmatrix}$ et interpréter graphiquement.

3. Illustrer avec L de matrice $M_L=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et interpréter graphiquement.

4 [Activité] Polynôme caractéristique

1. Définir la notion de **polynôme caractéristique** d'une application linéaire L et expliquer la relation avec la recherche des valeurs propres de L.

2. Illustrer avec L de matrice $M_L=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 5 à 6

5 [Activité] Diagonalisation

1. Soient $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire de matrice $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, pour lequel nous avons déjà calculé les deux valeurs propres $\lambda=1$ et $\lambda=4$ et les deux vecteurs propres $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On considère la base $B=(\vec{v}_1\,;\vec{v}_2)$.

a. Déterminer la matrice de changement de base P de B vers C, puis P^{-1} la matrice de changement de base de C vers B.

b. Déterminer $M_{BB}(L)$.

c. Quelle forme a $M_{BB}(L)$? En quoi cela est-il intéressant ?

2. Définir ce qu'on entend par **matrice diagonalisable** et par **matrices semblables**.

3. Enoncer et démontrer le **théorème «Diagonalisation»** et le **théorème «Matrices semblables»**.

4. Soit $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Calculer M^2 , M^3 et M^n.

6. On considère l'application linéaire L : ℝ2 →ℝ2 définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y \\ -2x+6y \end{pmatrix}$

a. Déterminer Ker(L) et Im(L) et eb déduire une base propre de L.

b. Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier par un calcul, par un raisonnement ou par un contre-exemple :

i L n'admet pas de réciproque.

ii L n'est pas diagonalisable.

7. Soit S la symétrie par rapport à l'axe d'équation $y = 6x$.

a. Déterminer une base propre B de S.

b. Déterminer la matrice de S dans B.

c. En déduire la matrice de S dans la base canonique.

Voir la théorie 6 et les exercices 7 à 18

6 [Activité] Application

1. Deux magazines sportifs A et B sont vendus uniquement sur abonnement annuel. On observe que chacun des deux magazines est acheté par 50% des lecteurs.

La probabilité qu'un lecteur du magazine A continue à acheter le magazine A l'année suivante est de 0,8 et celle qu'il change de magazine est de 0,2.

La probabilité qu'un lecteur du magazine B continue à acheter le magazine B l'année suivante est de 0,7 et celle qu'il change de magazine est de 0,3.

La matrice $T=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice de transition**.

a. Calculer la répartition des abonnements l'année suivante à l'aide d'un produit matriciel.

b. Calculer la répartition des abonnements après deux ans.

c. Comment calculer la répartition des abonnements après cinq ans ?

d. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

e. Diagonaliser la matrice T.

f. Utiliser l'écriture $T = P{\cdot}M{\cdot}P^{-1}$ du point précédent pour calculer T^n et $\lim_{n \to +\infty} T^n$. Interpréter les résultats.

Voir l'exercice 19

1 [A savoir] Noyau et image

Définition

Soit L : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire.

☐ Le **noyau** de L - noté Ker(L) - est l'ensemble des $a \in \mathbb{R}^2$ tels que $L(a)$ = 0.

☐ L'**image** de L - notée Im(L) - est l'ensemble des $b \in \mathbb{R}^2$ les qu'il existe au moins un vecteur $a \in \mathbb{R}^2$ avec $L(a) = b$.

Exemple : Soit P : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a projection orthogonale sur l'axe Ox. Déterminer Ker(P) et Im(P).

Ker(P) est la droite d'équation x = 0.
Im(P) est la droite d'équation y = 0.

Remarque : Ker(L) et Im(L) ne sont jamais vides.

Rappels

$B=(\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n)$ est une **base** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de façon unique comme **combinaison linéaire** de $\vec{v}_1;\vec{v}_2;\ldots;\vec{v}_n$, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_{1,}\ldots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ (un unique choix) tels que

$$\vec{v}=\alpha_1\cdot\vec{v}_1+\alpha_1\cdot\vec{v}_2+\ldots+\alpha_1\cdot\vec{v}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\vec{v}_i,\ \text{avec}\left(\alpha_{1,}\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}\right)$$

Théorème

Deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^2$.
Trois vecteurs non coplanaires de $\mathbb{R}^3$ forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : une matrice carrée 2x2 formée des vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^2$ est toujours inversible (car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

Définition

On note dim(Im(L)) – respectivement de Ker(L) - la dimension de l'image Im(L), c'est-à-dire le nombre de vecteurs d'une base de Im(L) – respectivement de Ker(L).

Exemple : Soit P : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur l'axe Ox. Déterminer dim(Ker(P)) et dim(Im(P)).

dim(Ker(P)) = dim(Im(P)) = 1

Théorème « Formule de la dimension » – sans démonstration

Soit L : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire.
Alors dim(Im(L)) + dim(Ker(L)) = dim($\mathbb{R}^2$) = 2

Remarque : ce théorème s'appelle le **théorème du rang**.

Voir les exercices 1 à 2

2 [A savoir] Changement de base

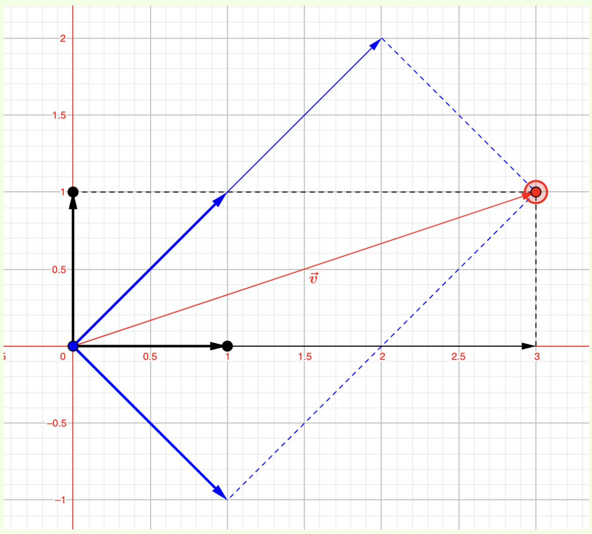
Jusqu'à présent $\mathbb{R}^2$ était implicitement muni de la **base canonique** $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, où $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, et $\mathbb{R}^3$ de la **base canonique** $C=(\vec{i}\,;\vec{j};\vec{k})$, où $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Nous nous limitons désormais à $\mathbb{R}^2$.

Lorsqu'on écrit $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, on fait implicitement référence à l'écriture unique de $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base canonique : $\vec{v}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}$. Mais on peut également écrire $\vec{v}$ dans une autre base $B=(\vec{x}\,;\vec{y})$, c'est-à-dire déterminer α et β (uniques) tels que $\vec{v}=\alpha\cdot\vec{x}+\beta\cdot\vec{y}$.

Exemple : on considère la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})=B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et une autre base $B=\left(\vec{b}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\vec{b}_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, ainsi que le vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$. Ecrire $\vec{v}$ dans la base B.

On cherche α et β tels que $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\alpha\,\vec{b}_1+\beta\,\vec{b}_2=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire résoudre le système $\begin{cases}\alpha+\beta & =3\\ \alpha-\beta & =1\end{cases}$. On trouve $\alpha=2$ et $\beta=1$, c'est-à-dire que $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=2\,\vec{b}_1+\vec{b}_2$



On note alors $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_B$ pour indiquer que l'écriture est donnée relativement à la base B.

Peut-on passer plus facilement d'une écriture à l'autre ? .

Connaissant l'écriture d'un vecteur $\vec{v}$ dans l'une des bases, il est possible de trouver directement son écriture dans l'autre base en utilisant une **matrice de changement de base**.

Méthode pour déterminer une matrice de changement de base

On considère deux bases et $B_1=\left(\vec{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)$ et $B_2=\left(\vec{x}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\vec{y}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$ de $\mathbb{R}^2$.

On cherche à déterminer l'écriture d'un vecteur $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ dans l'une des bases en connaissant celle dans l'autre base.

Si on connaît l'écriture de $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ dans B_1 :

- on détermine les composantes des vecteurs de la base B_1 dans la base B_2, soit $\vec{u}=\alpha_1\vec{x}+\alpha_2\vec{y}\overset{\text{not}}{=}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}_{B_2}$ et $\vec{v}=\beta_1\vec{x}+\beta_2\vec{y}\overset{\text{not}}{=}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix}_{B_2}$
- on construit la **matrice de changement de base** $P_{B_2B_1}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2&\beta_2\end{pmatrix}$ de B_1 vers B_2, aussi appelée **matrice de passage** (attention à la notation «à l'envers» dont le sens sera explicité plus tard – se rappeler que la multiplication des matrices correspond à la composition des applications linéaires). C'est la matrice dont les colonnes sont les composantes des vecteurs de la base B_1 dans la base B_2.
- $P_{B_2B_1}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2&\beta_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}_{B_1}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}_{B_2}$ donne l'écriture de $\vec{v}$ dans la base B_2.

Si on connaît l'écriture de $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ dans B_2 :

- avec l'inverse P^{-1} de cette matrice, on peut déterminer les composantes de $\vec{v}$ dans B_1 lorsqu'on connaît ses composantes dans B_2 :

$(P_{B_1B_2})^{-1}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\alpha_2&\beta_2\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}_{B_2}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}_{B_1}$ donne l'écriture de $\vec{v}$ dans la base B_1.

Remarques :

- B_1 est souvent la base canonique ;
- si nécessaire, on écrit $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}_{B_1}$ pour préciser dans quelle base on travaille ;
- lorsqu'on écrit rien, cela signifie implicitement qu'on est dans la base canonique (ou que le contexte est suffisamment clair pour ne pas avoir besoin de le préciser) ;
- si on est suffisamment au clair avec le processus, on note souvent plus simplement P.

Exemple : on considère la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})=B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et une autre base $B=\left(\vec{b}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\vec{b}_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$, ainsi que le vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$. Déterminer P_{CB} la matrice de passage de B à C puis son inverse et l'utiliser pour écrire $\vec{v}$ dans la base B.

On écrit les vecteurs de B dans la base canonique : $\vec{b}_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ (c'est donné dans l'énoncé!), et on écrit $P_{BC}=P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$. Puis on calcule $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

et enfin $P^{-1}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}_B$ qui est l'écriture de $\vec{v}$ dans la base B.

Vérification : $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\end{pmatrix}_B=\frac{1}{2}\cdot\vec{b}_1-\frac{5}{2}\cdot\vec{b}_2=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

3 [A savoir] Différentes bases avec une application linéaire

Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Jusque-là, nous avons défini la matrice M_L de L (relativement à la base canonique). Cela signifiait que nous considérions (implicitement) la base canonique à la source et au but ; M_L était définie comme la matrice dont les colonnes étaient les images des vecteurs de la base canonique par L.

Il est aussi possible de travailler avec d'autres bases (à la source et/ou au but), on obtient alors une autre matrice pour L et on note alors $M_{B_2 B_1}(L)$ pour indiquer qu'on considère la base B_1 à la source et la base B_2 au but [attention à l'ordre inversé dans la notation !].

Méthode pour déterminer la matrice d'une AL relativement à une base

On considère une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et deux bases $B_1=\left(\vec{x}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix};\vec{y}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$ à la source et $B_2=\left(\vec{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix};\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)$ au but. La matrice $M_{B_2 B_1}(L)$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base au but B_2 des images par L des vecteurs de la base à la source B_1.

Exemple 1 : on considère la projection $Pr : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $y = x$, ainsi que la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})=B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et une autre base $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Déterminer $M_{CC}(Pr)$, $M_{CB}(Pr)$, $M_{BC}(Pr)$ et $M_{BB}(Pr)$

Pour $M_{CC}(Pr)$: on considère la base canonique à la source et au but ; c'est ainsi que nous avons travaillé jusque-là. On écrit les images par Pr des vecteurs de la base canonique :

$Pr\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}_C$ dans la base canonique C, et

$Pr\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ également. Ainsi $M_{CC}(Pr)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$: c'est la matrice déjà connue pour cette projection (dans la base canonique).

Pour $M_{CB}(Pr)$: on considère toujours la base canonique au but mais on change de base à la source en choisissant la base B [attention à l'ordre dans la notation!]. On écrit donc les images par Pr des vecteurs de B dans la base C: $Pr\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_C$ et $Pr\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_C$,

ce qui signifie que $M_{CB}(Pr)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$.

Pour $M_{BC}(Pr)$: on considère cette fois la base canonique à la source et la base B au but. On écrit donc les images par Pr des vecteurs de C dans la base B :

$$Pr\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } Pr\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\gamma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\delta\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

en résolvant le système, on a: $\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=0$, et $\gamma=\delta=0$ c'est-à-dire que

$$Pr\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}_B \text{ et } Pr\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_B \text{, ce qui signifie que } M_{BC}(Pr)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Pour $M_{BB}(Pr)$: on considère la base B à la source et au but. On écrit donc les images par Pr des vecteurs de B dans la base B :

$$Pr\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_C=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B \text{ et } Pr\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_C=0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_B$$, ce qui signifie que $M_{BB}(Pr)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Exemple 2 : On considère la projection $Pr:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $y=x$, la rotation $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de $\frac{\pi}{4}$ dans le sens trigonométrique et la symétrie $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y=x$, ainsi que la base canonique $C=(\vec{i};\vec{j})$ et la base $B=(R(\vec{i});R(\vec{j}))$.

Déterminer $M_{BB}(Pr)$, $M_{BC}(R)$ et $M_{BB}(S)$.

On a : $B=(R(\vec{i});R(\vec{j}))=\left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right)$

Pour $M_{BB}(Pr)$:

$$Pr\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$, donc $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B$ dans la base B.

de même, $Pr\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}_B$ dans la base B.

On a donc finalement $M_{BB}(Pr)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Pour $M_{BC}(R)$: $R\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B$ dans la base B

et $R\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}_B$ dans la base B. Donc $M_{BC}(R)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pour $M_{BB}(S)$: $S\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B$ dans B.

de même, $S\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ s'écrit $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}_B$ dans la base B. On a donc finalement $M_{BB}(S)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

4 [A savoir] Changement de base

On peut donc associer à une même application linéaire des matrices différentes (tout dépend du choix des bases). Ces matrices sont liées par une formule.

Théorème « Matrices de changement de base »

Soit B_1 et B_2 deux bases de $\mathbb{R}^2$ et soit $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une application linéaire.
Alors on a : $M_{B_1B_1}(L)=P\cdot M_{B_2B_2}(L)\cdot P^{-1}$, où $P=M_{B_1B_2}$ et $P^{-1}=M_{B_2B_1}$

Remarque : on a aussi $M_{B_2B_2}(L)=P^{-1}\cdot M_{B_1B_1}(L)\cdot P$

Définition

Deux matrices $M_{B_1B_1}(L)$ et $M_{B_2B_2}(L)$ associées à la même application linéaire dans des base différentes sont dites **semblables**.

Remarque : cette formule est particulièrement utile lorsque la matrice par rapport à la base canonique est difficile à déterminer.

Exemple 1 : on considère la projection $Pr:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ sur la droite d'équation $y=x$, ainsi que la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})=B=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et une autre base $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Déterminer la matrice de passage $P=M_{CB}$ et son inverse $P^{-1}=M_{BC}(Pr)$. Reprendre les matrices $M_{CC}(Pr)$ et $M_{BB}(Pr)$ déterminées précédemment pour illustrer $M_{CC}(L)=P\cdot M_{BB}(L)\cdot P^{-1}$ et $M_{BB}(L)=P^{-1}\cdot M_{CC}(L)\cdot P$.

On a trouvé précédemment que $M_{CC}(Pr)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $M_{BB}(Pr)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Pour $P=M_{CB}$: on exprime les vecteurs de B dans la base C et on obtient $P=M_{CB}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ (c'est «direct» depuis l'énoncé !)

Puis on calcule $P^{-1}=M_{BC}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

Enfin : $P\cdot M_{BB}(L)\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=M_{CC}(L)$

et $P^{-1}\cdot M_{CC}(L)\cdot P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=M_{BB}(L)$

Exemple 2 : On considère $Pr:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur une droite passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe Ox, ainsi que la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$. Montrer qu'en considérant la base $B=(R(\vec{i});R(\vec{j}))$, où $R:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle θ autour de l'origine et les matrices de changement de base, on peut déterminer $M_{CC}(Pr)$.

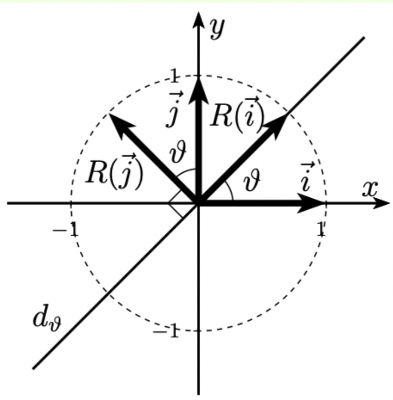
Déterminer directement $M_{CC}(Pr)$, c'est pouvoir maîtriser $Pr(\vec{i})$ et $Pr(\vec{j})$, ce qui n'est pas simple.

Idée : on va « changer de repère » en considérant une nouvelle base dans laquelle il est plus facile de « manier » Pr, soit la base $B=(R(\vec{i});R(\vec{j}))$, car on voit alors que les projections $Pr(R(\vec{i}))$ et $Pr(R(\vec{j}))$ sont « simples » !

En effet, on a $Pr(R(\vec{i}))=R(\vec{i})$ et $Pr(R(\vec{j}))=\vec{0}$

c'est-à-dire que $M_{BB}(Pr)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

Il s'agit maintenant de s'intéresser aux matrices de changement de base :



soit P la matrice de changement de base de B vers C ; pour la déterminer, il faut écrire les vecteurs de B dans la base C :

$R(\vec{i})=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{j}$ s'écrit donc $R(\vec{i})=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$ dans la base C.

$R(\vec{j})=-\sin(\theta)\vec{i}+\cos(\theta)\vec{j}$ s'écrit donc $R(\vec{j})=\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}$ dans la base C.

d'où : $P=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

On détermine ensuite P^{-1} la matrice de changement de base de C vers B :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Remarquons qu'on aurait aussi pu obtenir P^{-1} ainsi :

$\vec{i}=\cos(-\theta)\vec{i}+\sin(-\theta)\vec{j}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix}\cos(-\theta)\\ \sin(-\theta)\end{pmatrix}_B$ dans la base B.

$\vec{j}=-\sin(-\theta)\vec{i}+\cos(-\theta)\vec{j}$ s'écrit donc $\begin{pmatrix}-\sin(-\theta)\\ \cos(-\theta)\end{pmatrix}_B$ dans la base B.

d'où : $P^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta) & -\sin(-\theta)\\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$.

On peut conclure :

$$M_{CC}(R)=P\cdot M_{BB}(R)\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)\end{pmatrix}$$

On retrouve bien la matrice de la projection orthogonale sur une droite passant par l'origine et faisant un angle θ avec l'axe Ox

Voir les exercices 3 à 4

5 [A savoir] Vecteurs propres et valeurs propres

Définition

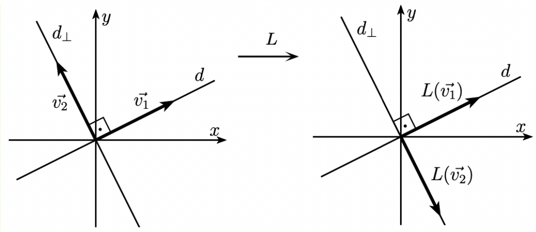
Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et M_L. Une **valeur propre** de L (ou de sa matrice associée M_L) est un nombre $\lambda\in\mathbb{R}$ tel qu'il existe un vecteur non nul $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$, appelé **vecteur propre**, pour lequel $L(\vec{v})=\lambda\cdot\vec{v}$ (ou $M_L\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$).
Une base formée de vecteurs propres est appelée **base propre**.

Remarque : cela revient à rechercher (si ils existent) ce qu'on appelle des **sous-espaces invariants**, c'est-à-dire des ensembles dont l'image par L est égale à elle-même.

Exemple : Soit $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la symétrie par rapport à une droite d qui passe par l'origine. Déterminer vecteurs et valeurs propres.

On note $d_\perp$ la droite orthogonale à d.

et $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ comme sur le schéma ci-contre. On voit que $S(\vec{v}_1)=1\cdot\vec{v}_1$ et $S(\vec{v}_2)=(-1)\cdot\vec{v}_2$.



Cela signifie que λ=-1 et $\lambda=1$ sont des valeurs propres, et que $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont des vecteurs propres.

On dit que les droites d et $d_\perp$ sont **invariantes** par S (càd que $S(d)= d$ et $S(d_\perp)= d_\perp$

Remarque : Un vecteur propre est donc un vecteur dont la direction n'est pas modifiée par l'application linéaire. En effet, tout vecteur propre est envoyé sur un multiple de lui même (il est dilaté si $\lambda>1$ et contracté si $\lambda<1$). C'est ce facteur d'agrandissement λ qui est appelé **valeur propre**.

Exemple : Soit $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur l'axe Ox. Déterminer vecteurs et valeurs propres.

On note $d_\perp$ la droite orthogonale à d.

On a : $P(\vec{vi})=\vec{i}=1\cdot\vec{i}$ et $P(\vec{j})=\vec{0}=0\cdot\vec{j}$, c'est-à-dire que $\lambda=1$ et $\lambda=0$ sont des valeurs propres, et $\vec{i}, \vec{j}$ des vecteurs propres.

P possède donc les valeurs propres 1 et 0 et les espaces invariants sont d et $d_\perp$.

Exemple : Soit $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ (non multiple de π) autour de l'origine. Déterminer vecteurs et valeurs propres.

Il n'y a aucun $\vec{v}$ tel que $R(\vec{v})=\vec{v}$; R ne possède aucune valeur propre réelle.

6 [A savoir] Polynôme caractéristique

Il s'agit de trouver une méthode efficace pour déterminer les valeurs propres.

Définition

Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et M_L sa matrice associée.

$p_L(\lambda)=det(\lambda\cdot I-M_L)$ est le **polynôme caractéristique** de M_L, où $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ est la matrice identité et $det\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right)\overset{not}{=}\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}\overset{thm}{=}ad-bc$ est le déterminant de $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$

Théorème « Polynôme caractéristique »

Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire et M_L sa matrice associée, alors les valeurs propres de M_L sont les racines du polynôme caractéristique.

Exemple : Soit M_L la projection orthogonale sur la droite d'équation $y=x$. Déterminer vecteurs et valeurs propres.

On sait que $M_L=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et on a :

$$p_L(\lambda)=det(\lambda\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix})=det\begin{pmatrix}\lambda-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\lambda^2-\lambda$$

d'où $p_L(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-1)=0$

et donc $\lambda=1$ et $\lambda=0$ sont les valeurs propres de M_L.

Pour déterminer les vecteurs propres correspondants, on doit résoudre $M_L\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$

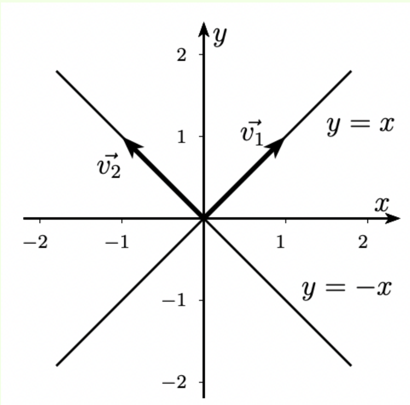
c'est-à-dire, en posant $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

pour $\lambda=1$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=x\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=y\end{cases}\Leftrightarrow x=y$

$y=x$ est donc une droite invariante et comme vecteur propre on peut par exemple choisir $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

pour $\lambda=0$: $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-y$

y = - x est donc une droite invariante et comme vecteur propre on peut par exemple choisir $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$



Voir les exercices 5 à 6

7 [A savoir] Diagonalisation

Existe-t-il une base "privilégiée", telle que la matrice d'une application linéaire L par rapport à cette base soit "simple", par exemple une matrice diagonale ?

Propriété

Si une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admet deux valeurs propres distinctes, alors les vecteurs propres associés $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, et $B(\vec{v}_1 ; \vec{v}_2)$ est une base (propre) de $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et M_L sa matrice associée. On dit que L – ou M_L - est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base telle que la matrice de L par rapport à cette base est diagonale.
On dit dans ce cas que L – ou M_L - est **diagonalisable**.

Théorème « Diagonalisation »

Soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire.
☐ Si il existe deux valeurs propres distinctes, alors la matrice dans une base propre formée de deux vecteurs propres (relativement à chacune des valeurs propres) est diagonale, et les valeurs propres sont les éléments de la diagonale.
☐ Si il existe une unique valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 2, alors la matrice dans une base propre formée de deux vecteurs propres non colinéaires est diagonale, et la valeur propre est répétée sur la diagonale.
☐ Si il existe une unique valeur propre et que le sous-espace propre associé est de dimension 1, alors la matrice n'est pas diagonalisable.
☐ Si il n'existe pas de valeur propre, alors la matrice n'est pas diagonalisable.

Exemple : On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to V^2$ définie par $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+6y \\ -2x+5y \end{pmatrix}$ et on note M_L la matrice $M_{CC}(L)$ où $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$ est la base canonique. Déterminer une base propre B puis $M_{BB}(L)$ et vérifier qu'elle est bien diagonale.

On a $M(L)=\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et donc $p_L(\lambda)=det\begin{pmatrix} \lambda+2 & -6 \\ 2 & \lambda-5 \end{pmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2)$

d'où $\lambda=1$ et $\lambda=2$ sont les valeurs propres.

Pour déterminer des vecteurs propres correspondants :

pour $\lambda=1$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y=x \\ -2x+5y=y \end{cases} \Leftrightarrow x=2y$ c'est-à-dire que

$\{\vec{v} | \vec{v}=t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\}$ est une droite invariante et comme vecteur propre on peut par exemple choisir $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

pour $\lambda=2$: $\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6y=2x \\ -2x+5y=2y \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}y$

c'est-à-dire que e $\left\{\vec{v} \middle| \vec{v}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$ st une droite invariante et comme vecteur propre on peut par exemple choisir $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Une base propre est donc $B=(\vec{v}_1;\vec{v}_2)=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$.

Afin de déterminer la matrice $M_{BB}(L)$, on calcule $L\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot2+6\cdot1\\-2\cdot2+5\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=1\cdot\vec{v}_1+0\cdot\vec{v}_2$ qui s'écrit donc $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}_B$ dans la base B, puis $L\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot3+6\cdot2\\-2\cdot3+5\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}=0\cdot\vec{v}_1+2\cdot\vec{v}_2$ qui s'écrit $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_B$ dans la base B. On a donc $M_{BB}(L)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, qui est bien une matrice diagonale.

Exemple : On considère l'application linéaire $L:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ et sa matrice associée $M_L=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ?

$p_L(\lambda)=det\begin{pmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2+1$ n'a pas de solution, donc L ne possède pas de valeurs propres ni de vecteurs propres ; elle n'est donc pas diagonalisable.

Théorème « Matrices semblables »

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres (mais pas les mêmes vecteurs propres).

Exemple : Si on reprend l'application linéaire $L:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^2$ définie par $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+6y\\-2x+5y\end{pmatrix}$, ainsi que la base canonique $B_1=(\vec{i};\vec{j})$ et $B_2=(\vec{v}_1;\vec{v}_2)=\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$ une base propre (voir calculs précédents). Montrer que $M_{B_2B_2}(L)$ est diagonale avec les valeurs propres sur la diagonale.

On a : $M_{B_1B_1}(L)=\begin{pmatrix}-2&6\\-2&5\end{pmatrix}$;

$P=M_{B_1B_2}(Id)=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$, qui est est une matrice dont les colonnes sont formées par des vecteurs propres de L ;

$P^{-1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$;

et donc, puisque $M_{B_1B_1}(L)=P\cdot M_{B_2B_2}(L)\cdot P^{-1}$, on a aussi :

$$M_{B_2B_2}(L)=P^{-1}\cdot M_{B_1B_1}(L)\cdot P=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&6\\-2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&6\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

qui est bien une matrice diagonale, avec les valeurs propres $\lambda=1$ et $\lambda=2$ sur la diagonale.

Remarque : Cette formule est particulièrement utile lorsque la matrice par rapport à la base canonique est difficile à déterminer En effet, après avoir calculé les valeurs et les vecteurs propres, $P=M_{B_1B_2}(Id)$ et $M_{B_2B_2}(L)$ sont faciles à trouver.

Exemple : Déterminer la matrice de la symétrie S d'axe y=-2x

On pourrait identifier l'angle concerné et utilisé la formule connue pour la matrice d'une symétrie, mais passons par la diagonalisation :

on identifie facilement (par une approche graphique) que $\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_1=1$et que $\vec{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_2=-1$. Donc $B=(\vec{v}_1;\vec{v}_2)=\left(\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base propre et $P_{CB}(S)=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}$ la matrice de changement de base ; on a aussi : $P_{BC}(S)=(P_{CB}(S))^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

Par ailleurs, on a aussi $M_{BB}(S)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, et donc enfin :

$$M_S=M_{CC}(S)=P_{CB}M_{BB}(S)P_{BC}=\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\2&1\end{pmatrix}=\ldots=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

Remarque : cette formule est aussi utile pour calculer M^k avec $k\in\mathbb{N}^*$ "grand".

Exemple : On considère les matrices $M_{B_1B_1}(L)=\begin{pmatrix}2&6\\-2&5\end{pmatrix}=M$ et $M_{B_2B_2}(L)=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=M'$ de l'exemple précédent. Déterminer $M^k, k\in\mathbb{N}^*$

On a :

$$\begin{aligned}M^k&=M\cdot M\cdot\ldots\cdot M=(P\cdot M'\cdot P^{-1})\cdot(P\cdot M'\cdot P^{-1})\cdot\ldots\cdot(P\cdot M'\cdot P^{-1})\\&=P\cdot M'\cdot P^{-1}\cdot P\cdot M'\cdot P^{-1}\cdot\ldots\cdot P^{-1}\cdot P\cdot M'\cdot P^{-1}\\&=P\cdot M'\cdot M'\cdot\ldots\cdot M'\cdot P^{-1}=P\cdot(M')^k\cdot P^{-1}=P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^k\cdot P^{-1}=P\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2^k\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\end{aligned}$$

remarque : $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^k$ est facile à calculer puisque M' est une matrice diagonale.

Par exemple : $M^{10}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2^{10}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}$

Comme $\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\cdot2-1\cdot3}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$, on obtient $M^{10}\overset{calc}{=}\begin{pmatrix}-3068&6138\\-2046&4093\end{pmatrix}$

Voir l'exercice 7 à 18

Exercices d'entraînement

Noyau et image

1 On considère l'application linéaire. $L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+4y\\x+2y\end{pmatrix}$

a. Montrer que le vecteur $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ ainsi que tous ses multiples appartiennent à Ker(L).

b. Déterminer Ker(L).

c. En utilisant la linéarité de L, montrer que l'image par L d'un vecteur quelconque $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est multiple du vecteur $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et en déduire Im(L).

d. Calculer toutes les préimages du vecteur $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$.

e. Représenter graphiquement Ker(L) et Im(L).

f. Vérifier le théorème de la dimension dans ce cas.

2 Soit $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

a. Déterminer Ker(L) et Im(L).

b. Vérifier le théorème de la dimension dans ce cas.

Voir la théorie 1

Changer de base

3 Soit L l'application linéaire de matrice $M_L=\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}$ dans la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, les vecteurs $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{w}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ et les bases $B_1=(\vec{j}\,;\vec{i})$, $B_2=(\vec{i}+\vec{j}\,;3\vec{j})$ et $B_3=(\vec{u}\,;\vec{v})$.

a. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans chacune de ces bases.

b. Déterminer la matrice de L relativement à chacune de ces bases.

4 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $C=(\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère quatre vecteurs :

$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}_1=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

a. Après avoir vérifié que $B_1=(\vec{a}_1\,;\vec{a}_2)$ et $B_2=(\vec{b}_1\,;\vec{b}_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$, établir les matrices de passage :

- **i.** de la base B_1 à la base C
- **ii.** de la base B_2 à la base C
- **iii.** de la base C à la base B_1
- **iv.** de la base C à la base B_2
- **v.** de la base B_1 à la base B_2
- **vi.** de la base B_2 à la base B_1

b. Exprimer le vecteur $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ dans les trois bases et utiliser ces trois vecteurs pour vérifier que les matrices de passage sont exactes.

Voir la théorie 2 à 3

Valeurs et vecteurs propres, polynôme caractéristique

5 Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes.

a. $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix}1&-2\\4&5\end{pmatrix}$

c. $C=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix}$

d. $D=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\end{pmatrix}$

e. $E=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$

f. $F=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

6 Soit M_L la matrice d'une application linéaire L qui possède une réciproque et soit λ une valeur propre associée.

a. Montrer que λ ne peut pas être nul.

b. Montrer que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de l'application réciproque.

Voir la théorie 4 à 5

Diagonalisation

7 On considère à nouveau les matrices suivantes. Les applications linéaires associées sont-elles diagonalisables ?

a. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

b. $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

c. $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$

d. $D=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

e. $E=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

f. $F=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

8 On considère l'application linéaire $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de matrice $M_L=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 6\end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.

a. Vérifier que $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs propres de L.

b. Quelles sont les valeurs propres associées ?

c. Écrire la matrice de passage P de la base des vecteurs propres à la base canonique. Calculez P^{-1}.

d. On note D la matrice de L relativement à la base des vecteurs propres. Écrivez D et vérifiez que $M_L = P^{-1}\cdot D\cdot P$.

e. Vérifier l'égalité $M_L{}^2 = P^{-1}\cdot D^2\cdot P$.

f. Calculer $M_L{}^5$.

9 On considère la matrice $M_L=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ d'une application linéaire L dans la base canonique.

a. Déterminer $L\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

b. Calculer le déterminant de M_L.

c. L'application L possède-t-elle une réciproque? Si oui, calculer L^{-1}.

d. Calculer le noyau Ker(L).

e. Calculer l'image Im(L).

f. Représenter Ker(L) et Im(L) sur un même graphique.

g. Calculer le polynôme caractéristique $p_L(\lambda)$.

h. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de M_L.

i. Déterminer la matrice $M_{BB}(L)$ de L dans la base propre.

10 Dans la base canonique C, une application linéaire $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est définie par la matrice $M_{CC}(L)=\begin{pmatrix}2 & 8\\ -3 & -12\end{pmatrix}$.

a. Calculer et représenter graphiquement le noyau Ker(L) et l'image Im(L).

b. Déterminer une base propre.

11 Soit $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que $L\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\end{pmatrix}$

a. Déterminer la matrice $M_{CC}(L)$ associée L (dans la base canonique C).

b. Déterminer valeurs propres, vecteurs propres et matrice en base propre de cette application.

12 On considère l'application linéaire $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $L\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\ 2x+2y\end{pmatrix}$ et l'application linéaire $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par sa matrice $M_{CC}(F)=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$, par rapport la base canonique C.

a. Déterminer Ker($L\circ L$) et Ker($F\circ L$).

b. Déterminer une base propre de $L\circ L$ et de $F\circ L$.$

13 Soit $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ Calculer M^n.

14 On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ d'une application linéaire L dans la base

canonique. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $N^3 = M$.

15 On considère l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par la composition d'une symétrie S par rapport à la droite d d'équation $y = 4x$ suivie d'une rotation R de 45°(soit $L = R \circ S$).

a. Déterminer valeurs propres, vecteurs propres et matrice en base propre $M_{BB}(S)$ de cette application.

b. Déterminer la matrice $M_{CC}(L)$ associée à L (dans la base canonique C). Attention : on désire le résultat sous forme de fraction (et non en écriture décimale), sans fonctions trigonométriques.

Voir la théorie 6

Modélisation

16 Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade.

- Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90% le seront encore le lendemain.
- Parmi les enfants malades, 30% le seront encore le lendemain.

Le 2 mars, 85% des enfants sont en bonne santé et 15% sont malades.

a. Déterminer la matrice de transition T.

b. Quelle est la proportion d'enfants malades le 3 mars? Et le 4 mars?

c. Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

1 *Évolution de populations*

Dans beaucoup de domaines comme l'écologie, l'économie et les sciences appliquées, on établit des modèles mathématiques de phénomènes dynamiques qui évoluent dans le temps. Les mesures d'un certain nombre de caractéristiques du système sont prises à des intervalles de temps réguliers, fournissant ainsi une suite de vecteurs x_0, x_1, x_2,.... Les composantes de x_k rendent compte de l'état du système au moment de la k-ème mesure.

S'il existe une matrice A telle que $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$ et, en général :

$$x_{k+1} = Ax_k \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \ldots \ (*)$$

alors (*) est appelé une **équation de récurrence linéaire** (ou **équation aux différences finies**).

Les démographes s'intéressent aux déplacements de populations ou de groupes de personnes d'un endroit vers une autre. Nous exposons ici un modèle simple qui rend compte des va-et-vient d'une population entre une certaine ville et ses faubourgs immédiats durant un certain nombre d'années.

On choisit une année initiale, disons 2000, et on désigne les populations de la ville et des faubourgs de cette année-là par v_0 et f_0 respectivement. Soit x_0 le vecteur population $x_0=\begin{pmatrix} v_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ en 2000, $x_1=\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$ la population en 2001, etc.

Des études démographiques ont montré que chaque année environ 5 % des habitants des villes émigrent vers les faubourgs (95 % restent en ville) tandis que 3 % quittent les faubourgs (et 97 % restent dans les faubourgs) pour s'installer en ville.

Calculer la population en 2001 et en 2002 de la région dont il vient d'être question, sachant qu'en 2000 elle se montait à 600'000 citadins et 400'000 habitants des faubourgs.

2 *Le système proie-prédateur*

Au fond des forêts de séquoias californiennes, les rats des bois aux pattes foncées fournissent jusqu'à 80 % de la nourriture des chouettes, le principal prédateur de ce rongeur. Cet exercice propose un système dynamique linéaire pour modéliser le système des chouettes et des rats. Le modèle n'est pas réaliste à divers égards, mais il a le mérite de constituer un premier modèle abordable. On désigne les populations de chouettes et de rats au moment k par $x_k=\begin{pmatrix} C_k \\ R_0 \end{pmatrix}$, où k est le temps en mois, C_k le nombre de chouettes dans la région étudiée et R_k le nombre de rats (en milliers). On suppose que

$$\begin{cases} C_{k+1} &= 0.5\,C_k + 0.4\,R_k \\ R_{k+1} &= -p\,c_k + 1.1\,R_k \end{cases}$$

où p est un paramètre positif à spécifier.

Le terme $0.5C_k$ dans la première équation traduit le fait qu'en l'absence de rats pour se nourrir, seule la moitié des chouettes survivraient chaque mois.

Le terme $1.1R_k$ dans la deuxième équation signifie qu'en l'absence des chouettes comme prédateurs, le nombre de rats augmenterait de 10 % par mois.

Si les rats sont abondants, le $0.4R_k$ tend à faire croître la population des chouettes tandis que le terme négatif $-pC_k$ rend compte du nombre de rats disparus, mangés par les chouettes. (En effet, 1000 p est le nombre moyen de rats qu'une chouette mange chaque mois.)

a. Déterminer l'évolution de ce système quand le paramètre p est fixé à 0.104.

Remarque : c'est dans les valeurs propres et les vecteurs propres que se trouve la clef pour comprendre le comportement à long terme ou évolution d'un système dynamique décrit par une équation de récurrence $x_{k+1} = Ax_k$.

Nous supposons que A est diagonalisable et possède n vecteurs propres linéairement indépendants $v_1,\ldots, v_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Il est commode de supposer que les vecteurs propres sont ordonnés de façon que $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|$

Comme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur initial x_0 peut être écrit, de façon unique toutefois, sous la forme

$$x_0 = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n$$

Cette décomposition en vecteurs propres de x_0 détermine entièrement le comportement de la suite $\{x_k\}$. Puisque les v_i sont des vecteurs propres, on a :

$$x_1 = Ax_0 = c_1Av_1 + \ldots\ c_nAv_n = c_1\lambda_1v_1 + \ldots + c_n\,\lambda_n\,v_n$$

En général, $x_k = c_1(\lambda_1)^k\ v\ + \ldots + c_n(\lambda_n)^k v_n$, (k = 0, 1, 2, ...).

b. Déterminer l'évolution du système dynamique de l'exemple quand le paramètre de prédation p vaut :

i. 0.2

ii. 0.125

Donner une expression de x_k.

Comment évoluent dans le temps les populations de chouettes et de rats ?

3 *Modèle de Leslie*

En démographie, on étudie l'évolution d'une population à partir des taux de fécondité et de mortalité. Pour présenter un modèle simple, on exclut d'autres caractéristiques telles que la migration et on suppose que la population dispose de ressources illimitées. Comme seules les femelles donnent la vie, il suffit de considérer les classes d'âge des femelles de la population.

Considérons une population de rongeurs dont le cycle de reproduction est de 3 ans. Chaque femelle donne en moyenne naissance à 6 femelles durant sa deuxième année et à 10 femelles durant sa troisième année. Cependant, seule une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et seules 40% de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année. Si l'on écrit sous forme vectorielle (x_1 ; x_2 ; x_3) les effectifs x_i des femelles à l'âge i, l'année suivante, la répartition de cette population est donnée par le vecteur y ci-dessous, qui peut s'écrire sous forme matricielle $y = Lx$:

$$\begin{pmatrix} 6x_2+10x_3 \\ 0.5x_3 \\ 0.4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 10 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $y = Lx$ fournit les effectifs des femelles de chaque classe d'âge après une année. Pour (10 ; 0 ; 0) par exemple, on trouve successivement :

an	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
x_1	10	0	30	20	90	120	310	540	1170	...
x_2	0	5	0	15	10	45	60	155	270	...
x_3	0	0	2	0	6	4	18	24	62	...

La matrice L possède deux valeurs propres 2 et -1.

On vérifie immédiatement que (20 ; 5 ; 1) est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

Si une population est répartie en classes d'âge dans les rapports 20 : 5 : 1, alors ses effectifs sont doublés chaque année. Le vecteur propre (10 ; -5 ; 2) associé à la valeur propre -1 n'a pas de signification en termes d'effectifs. Plus généralement, on appelle matrice de Leslie, une matrice carrée de la forme :

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} & f_n \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

qui modélise la dynamique d'une population structurée en n classes d'âge. La première ligne contient les coefficients (positifs) de fertilité f_i de la classe d'âge i et les éléments p_i sous la diagonale indiquent les probabilités (ou taux) de survie de la classe d'âge i à la suivante.

a. Une population de scarabées présente quatre classes d'âge d'une année chacune avec des taux de survie de respectivement 10 %, 50 % et 50 % et une reproduction uniquement durant la quatrième année de p descendants par individu. Écrire la matrice de Leslie qui modélise la dynamique de cette population. Quelle est la valeur minimale de p qui assure la survie de l'espèce ?

b. Un modèle de Leslie est proposé pour représenter la dynamique de la population d'un pays. Ne prenant en compte que les individus de sexe féminin, on a choisi dix classes d'âge d'une durée de 5 ans chacune. Les éléments de la première ligne de la matrice de Leslie sont :

0.000 0.000 0.001 0.012 0.376 0.438 0.383 0.046 0.007 0.002

et les éléments situés sous la diagonale sont

0.996 0.998 0.997 0.996 0.996 0.994 0.992 0.990 0.983

i. Comment expliquer que les éléments de la première ligne sont croissants puis décroissants ? Un tel élément peut-il être supérieur à 1 ?

ii. Pourquoi le premier coefficient de la deuxième liste est-il inférieur au suivant ?

iii. Pourquoi le modèle ne tient-il pas compte des individus de plus de 50 ans ?

c. On considère un modèle de Leslie de matrice $L=\begin{pmatrix}0.25 & 1\\ 0.75 & 0\end{pmatrix}$

i. Donner une interprétation des éléments non nuls de la matrice L par rapport à la population que l'on modélise.

ii. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L. Donner une interprétation des résultats.

iii. Diagonaliser la matrice L et calculer L^n. En déduire le comportement asymptotique de la dynamique de cette population.

d. Même exercice que le précédent avec la matrice $L=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 0.25 & 0\end{pmatrix}$

e. On considère une population de saumons. En moyenne, deux neuvièmes meurent la première année. Durant la deuxième année, ils donnent naissance en moyenne à un juvénile par individu, puis les six septièmes meurent. Chaque poisson qui survit la troisième année donne encore naissance en moyenne à deux juvéniles avant de mourir.

i. Écrire la matrice de Leslie L modélisant l'évolution de cette population.

ii. Avec une population initiale de respectivement 1200, 1400 et 500 saumons dans chaque classe d'âge, calculez les populations au début des quatre années suivantes.

iii. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de L.

iv. En écrivant le vecteur de la population initiale en combinaison linéaire de trois vecteurs propres, prédire l'évolution à long terme de la population.

4 *Modèle de Leontief*

Vers la fin des années quarante, Wassily Leontief, chercheur de l'université de Harvard, subdivisa l'économie américaine en 500 secteurs, comme ceux de l'industrie de l'automobile, du charbon, des services, etc. Il établit pour chacun une équation linéaire qui décrit comment sa production est redistribuée vers les autres secteurs et énonça un certain nombre de résultats fondamentaux sur les systèmes d'équations de même type. Il ouvrit une nouvelle ère dans la modélisation mathématique de l'économie et reçut le prix Nobel d'économie pour ses travaux en 1973.

Le modèle fermé de Leontief des années quarante comportait 500 inconnues pour 500 équations. Nous considérerons ici un modèle beaucoup plus simple.

Un modèle économique se divise en trois secteurs : Charbon (C), Électricité (E) et Acier (A). Le tableau montre la production et les achats de chaque secteur en proportion. Montrons qu'il existe des revenus qui équilibrent les coûts de chacun.

		Produit par		
		C	E	A
Acheté par	C	0.0	0.4	0.6
	E	0.7	0.2	0.2
	A	0.3	0.4	0.2

Dans cet exemple, la troisième colonne indique que 60 % de la production du secteur Acier va au secteur Charbon, 20 % à celui de l'Électricité, 20 % à celui de l'Acier. Toutes les productions étant prises en compte, la somme d'une colonne est égale à 1. La troisième ligne indique que le secteur Acier a acheté 30 % de la production du secteur Charbon, 40 % de celui de l'Électricité, 20 % de celui de l'Acier.

Notons par r_C, r_E et r_A les revenus respectifs des secteurs Charbon, Électricité et Acier. Leurs dépenses sont alors respectivement égales à :

0.4rE + 0.6rA [charbon, 1re ligne]
0.7rC + 0.2rE + 0.2rA [électricité, 2e ligne]
0.3rC + 0.4rE + 0.2rA [acier, 3e ligne]

L'**équilibre économique** entre secteurs a lieu lorsque les dépenses sont égales aux revenus :

$$\begin{cases} 0.4r_E+0.6r_A = r_C\\ 0.7r_C+0.2r_E+0.2r_A = r_E\\ 0.3r_C+0.4r_E+0.2r_A = r_A\end{cases}$$

On peut évidemment aussi écrire ce système sous forme matricielle en posant :

$M=\begin{pmatrix}0 & 0.4 & 0.6\\ 0.7 & 0.2 & 0.2\\ 0.3 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$ et $\vec{r}=\begin{pmatrix}r_C\\ r_E\\ r_A\end{pmatrix}$, et on a :

$M\cdot\vec{r}=\vec{r}$ ou $(M-I)\cdot\vec{r}=\vec{0}$

Résoudre ce système revient donc à trouver un vecteur propre de M correspondant à la

Exercices d'approfondissement

valeur propre λ=1. On trouve $\vec{r}=\begin{pmatrix}0.9\\1\\0.93\end{pmatrix}$ Cela signifie que si le secteur Électricité produit l'équivalent d'un milliard de francs, alors le secteur Charbon doit produire l'équivalent de 900 millions de francs et le secteur Acier l'équivalent de 830 millions de francs pour obtenir l'équilibre entre les dépenses et les revenus.

a. Une économie fermée comprend deux secteurs, les biens et les services. Le secteur des biens vend 75 % des biens au secteur des services et garde le reste. Le secteur des services fournit 60 % de ses prestations au secteur des biens et garde le complément pour lui.

Déterminer les prix d'équilibre afin que les recettes compensent les dépenses.

b. Un grand domaine d'une économie fermée est divisée en trois secteurs : la chimie, l'énergie, l'industrie. La chimie vend 25 % de sa production à l'énergie, 55 % à l'industrie et garde le reste. L'énergie vend 75 % de sa production à la chimie, 10 % à l'industrie et garde le reste. L'industrie vend 40 % à la chimie, 40 % à l'énergie et garde le reste.

Écrire la matrice des échanges et déterminer les prix d'équilibre qui permettent aux dépenses d'être compensées par les recettes.

5 *Matrices de transition*

Une **matrice de transition** T est une matrice carrée dont les éléments sont tous positifs ou nuls, de plus la somme des éléments de chaque colonne est égale à 1. L'élément tij d'une telle matrice peut être considéré comme la probabilité de passer de l'état j à l'état i. Une matrice-colonne E dont les éléments sont positifs et dont la somme des éléments est 1 est appelée **vecteur d'état**.

Un vecteur d'état E qui vérifie l'égalité T·E = E est appelé **vecteur d'état stationnaire**. Dans ce cas, le vecteur d'état E est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Les matrices de transition servent de modèle mathématique dans de nombreux domaines (biologie, chimie, économie,...).

Propriétés

☐ Si T est une matrice de transition et n est un entier naturel, alors T n est une matrice de transition.

☐ Toute matrice de transition admet la valeur propre 1.

☐ Toute matrice de transition admet un vecteur d'état stationnaire.

a. On considère la matrice de transition $L=\begin{pmatrix}0.6 & 0.3\\0.4 & 0.7\end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur d'état stationnaire.

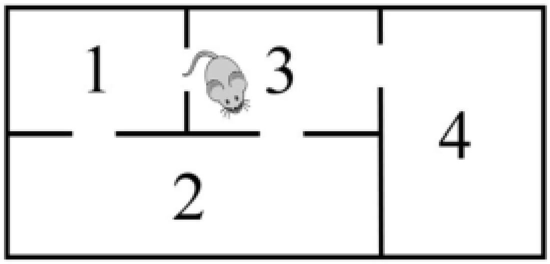
b. Dans une crèche, un enfant est déclaré en bonne santé ou malade. Parmi les enfants en bonne santé un jour donné, 90 % le seront encore le lendemain. Parmi les enfants malades, 30 % le seront encore le lendemain. Le 2 mars, 15 % des enfants sont malades.

i. Trouver la matrice de transition.

ii. Quel est le vecteur d'état au 2 mars, au 3 mars, au 4 mars ?

iii. Quelle est la proportion d'enfants malades à long terme ?

c. Une souris est placée dans un labyrinthe. Chaque fois qu'elle entend un coup de sifflet, elle panique et change de compartiment, en choisissant au hasard une des portes.



Déterminer la matrice de transition associée à cette situation.

i. La souris se trouvait dans le compartiment 3 au départ. Écrire le vecteur correspondant à sa position après un coup de sifflet.

ii. Et après un deuxième coup de sifflet ?

iii. Quel est le vecteur d'état stationnaire ? ? Interpréter ce résultat.

Source de ces exercices d'approfondissement : Madimu [Didier Muller] *https://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/INDEX.HTM*

« La Matrice est universelle. Elle est omniprésente. Elle est avec nous ici, en ce moment même. Tu la vois chaque fois que tu regardes par la fenêtre, ou lorsque tu allumes la télévision. Tu ressens sa présence, quand tu pars au travail, quand tu vas à l'église, ou quand tu paies tes factures. Elle est le monde, qu'on superpose à ton regard pour t'empêcher de voir la vérité.»

Cité dans le film Matrix (1999), écrit par Andy et Lana Wachowski »

A savoir en fin de chapitre

Noyau et image

✔ déterminer noyau et image d'une application linéaire ;

Voir la théorie 1 et les exercices 1 à 2

Changer de base

✔ bases ;

✔ déterminer la matrice de changement de base ;

Voir la théorie 2 à 3 et les exercices 3 à 4

Valeurs et vecteurs propres

✔ déterminer les valeurs propres d'une application linéaire ;

✔ déterminer des vecteurs propres d'une application linéaire ;

✔ utiliser le polynôme caractéristique pour déterminer les valeurs propres ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 5 à 6

Diagonalisation

✔ diagonaliser des matrices lorsque cela est possible ;

Voir la théorie 6 et les exercices 7 à 18

Application

✔ résoudre des problèmes en utilisant le calcul matriciel.

Voir l'exercice 19