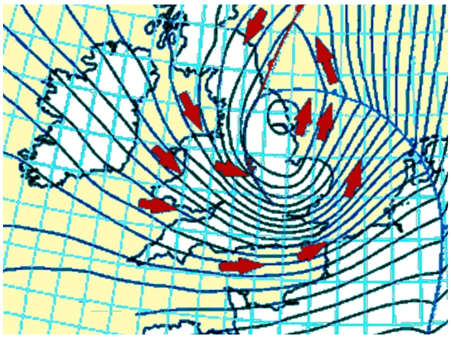
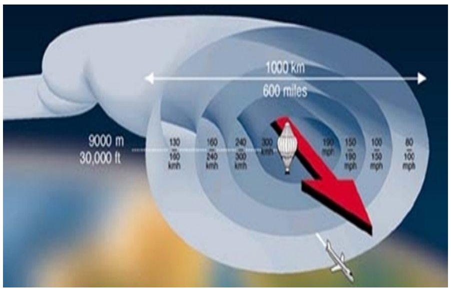
Ma3 - Ch6 : Géométrie vectorielle



Directions et sens du vent induit par le jet stream lors de la « grande tempête » du 16 octobre 1987.



Dimensions du jet stream avec un vecteur indiquant direction et sens.

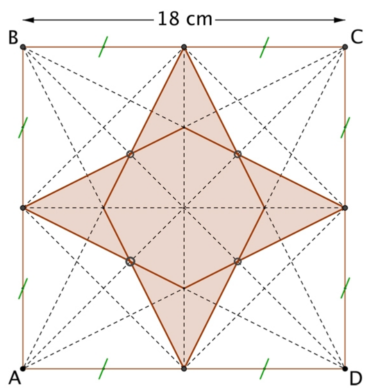
Le panache de neige sur l'Everest produit par le souffle du jet stream

La rose des vents

Cette rose des vents est inscrite dans un carré et tous les segments tracés joignent des points appartenant à l'ensemble des sommets et des milieux des côtés du carré.

Quelle est l'aire de la rose représentée en couleur sur la figure ?

Source : 1/4 finale 2013-2014 du concours FFJM



Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Toujours scalaire ?

1. Quelle différence y a-t-il entre une mesure de température et une mesure de force ?

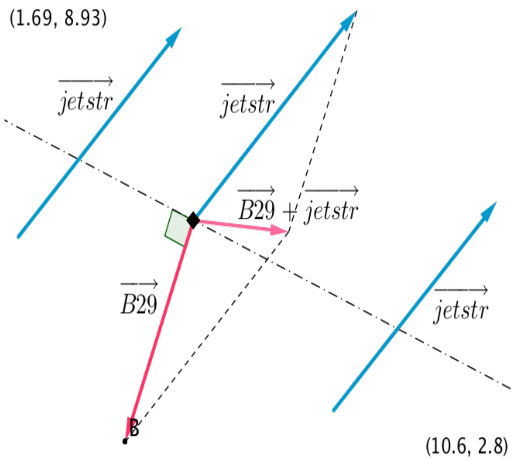
2. Reprenons l'exemple du jet-stream présenté en page-titre de ce chapitre.

Bien connu actuellement, le jet-stream a aidé Bertrand Piccard et Brian Jones lors de leur tour du monde en ballon en 1999 pour se laisser emporter par lui à chaque fois que leur route correspondait à celle de ce fort courant de vent d'haute altitude.

Toutefois la connaissance de ce jet-stream est récente. Au début de la deuxième guerre mondiale, les avions n'atteignaient pas encore des altitudes suffisantes pour le rencontrer et on ne connaissait alors pas son existence. Il fut découvert une première fois en 1942 dans des circonstances difficiles par un pilote anglais d'un nouvel avion, le bombardier B29, premier avion conçu pour voler à des hautes altitudes, au-dessus de 8000 m, pour être à l'abri des chasseurs japonais.

Un jour de cette année 1942, le pilote atteint l'altitude de 9000 m au-dessus du Japon, avec un cap sud-sud-ouest et une vitesse de 350 km/h. La station radar au sol leur annonçait un vent arrière de 220 km/h. Cette vitesse totale de 570 km/h semblait beaucoup trop élevée et le pilote pensa à une erreur d'instruments. Mais aucune manoeuvre ou nouvelle mesure ne changea la situation. Finalement le pilote décida d'amorcer sa descente et réalisa qu'il avait en fait volé à « reculons » pendant son vol à 9000 m et qu'il se retrouvait 20 km en arrière de sa cible prévue ! Il fallut se rendre à l'évidence, à la hauteur du Japon il existait un vent violent à la limite de la troposphère, avec une vitesse capable de dépasser les 300 km/h.

L'aventure de ce pilote pourrait être résumée par la représentation vectorielle ci-dessous :



La vitesse de l'avion était d'environ 350 km/h pour un cap sud-sud-ouest.

La vitesse du jet-stream devait être d'environ 400 km/h avec un cap nord-est.

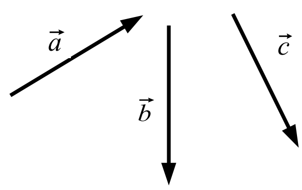
Le vent arrière de 220 km/h annoncé par la station au sol devait être un vent situé au-dessous de 8000 m...

Finalement les B29 qui furent conçus pour voler en haute altitude à l'abri des chasseurs ne purent jamais remplir leur mission et effectueront l'essentiel de leur mission à basse altitude !

Observer que sur la représentation, trois **vecteurs** $\overrightarrow{jetstr}$ ont été dessinés. Il s'agit de trois **représentants** du vecteur représentant la force, la direction et le sens du jet-stream à ce moment et cet endroit là, mais il va de soi qu'on peut imaginer une infinité de vecteurs représentants de ce jet-stream. Et on a choisi de placer spécialement le représentant central avec la même origine que le vecteur $\overrightarrow{B29}$ de façon à pouvoir construire le représentant de la somme $\overrightarrow{B29}+\overrightarrow{jetstr}$ grâce à la « règle du parallélogramme» qui permet d'obtenir la **somme de deux vecteurs**.

2 [Activité] Opérations avec des vecteurs

1. On considère les vecteurs suivants :



Les reporter sur feuille non quadrillée puis représenter les vecteurs suivants : $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{b}-2\vec{c}-2\vec{a}$.

2. $CLIN$ et $OEIL$ sont des parallélogrammes (il y a donc bien six points en tout ...). En utilisant les seuls points de la figure (que vous allez dessiner), écrire plus simplement : $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{EO}$

3 [Activité] Propriétés des vecteurs

Illustrer les propriétés suivantes des vecteurs :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs. Alors on a :

a. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ [**commutativité** de l'addition]

b. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ [**associativité** de l'addition]

c. $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ [$\vec{0}$ est **l'élément neutre** de l'addition]

d. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ [$-\vec{u}$ est **l'opposé** de $\vec{u}$]

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a :

e. $\lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v})=\lambda \cdot \vec{u}+\lambda \cdot \vec{v}$

f. $(\lambda+\mu) \cdot \vec{u}=\lambda \cdot \vec{u}+\mu \cdot \vec{u}$

g. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})=\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$

h. $1 \cdot \vec{u}=\vec{u}$

i. $(-1) \cdot \vec{u}=-\vec{u}$

j. $(-\lambda) \cdot \vec{u}=\lambda \cdot (-\vec{u})=-(\lambda \cdot \vec{u})$

k. $0 \cdot \vec{u}=\vec{0}$

l. $\lambda \cdot \vec{0}=\vec{0}$

Voir la théorie 1 à 9 et les exercices 1 à 5

4 [Activité] Colinéarité et combinaisons linéaires

1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un scalaire, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire α tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$. Illustrer avec des exemples dans le plan et dans l'espace.

2. On reprend les mêmes vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de l'activité précédente. Sont-ils colinéaires ?

3. Représenter un vecteur $\vec{d}$ colinéaire à $\vec{a}$ et deux vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{f}$ colinéaires à $\vec{b}$.

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Une **combinaison linéaire** de δ et $\vec{w}$ est un élément de la forme $\mu\vec{v}+\lambda\vec{w}$, avec μ et λ dans $\mathbb{R}$.

4. Représenter $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et donner approximativement les valeurs de μ et λ tels que $\vec{c}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

5. Représenter $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$ et donner approximativement les valeurs de μ et λ tels que $\vec{b}=\mu\vec{a}+\lambda\vec{c}$.

5 [Aller plus loin] Base

Discuter la notion de **base** du plan ou de l'espace.

Voir la théorie 10 et les exercices 6 à 12

6 [Activité] Le calcul vectoriel comme outil de démonstration

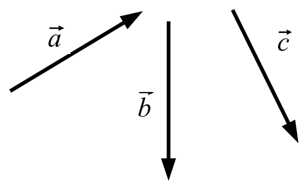
Démontrer que dans un parallélogramme $ABCD$ les diagonales se coupent en leur milieu.

Voir la théorie 11 et les exercices 13 à 16

7 [Activité] Coordonnées, composantes

1. Considérons les vecteurs ci-contre.
Comment peut-on faire pour les « décrire numériquement » ?

Remarque : on aimerait pouvoir le faire aussi bien pour des vecteurs du plan que de l'espace !



2. Effectuer les opérations suivantes en **composantes** : $2\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{c}$, puis calculer $\|\vec{a}\|$, toujours à l'aide des composantes.

3. Dans le plan , considérons les points A(-2;3) , B(3;4) et C(0;7) .

a. Calculer les composantes de $\overrightarrow{AB}$, le **vecteur entre les deux points** A et B.

b. Calculer les coordonnées du point situé au quart (à partir de A) du segment [AB].

c. Déterminer D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

d. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ? Comment cela se manifeste-t-il algébriquement via un calcul avec les composantes ?

e. Ecrire $\overrightarrow{AD}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, géométriquement, puis algébriquement.

4. On considère maintenant un repère orthonormé de l'espace :

a. Représenter les points A(-1;0;2) , B(3;0;1) , C(4;1;1) et D(2;5;-2)

b. Déterminer $2\,\overrightarrow{AB}+3\,\overrightarrow{AC}$

c. Calculer $\|\overrightarrow{CD}\|$.

5. On considère le parallélépipède rectangle dont l'un des sommets est l'origine et le sommet opposé est le point $P(a;\,b;\,c)$.Déterminer les coordonnées de tous les sommets du parallélépipède.

6. Soit $\vec{a}\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a. Le vecteur $\vec{c}$ peut-il s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres ?

b. Le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de ces trois vecteurs ?

8 [Aller plus loin] Propriétés de la norme

Enoncer et démontrer les principales **propriétés de la norme**.

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 17 à 28

9 [Activité] Equations vectorielles

1. Droite du plan

a. Déterminer une **équation vectorielle** puis le **système d'équations paramétriques**, et enfin une **équation cartésienne** de la droite d du plan contenant le point $A(-2\,;1)$ et de **vecteur directeur** $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

b. Déterminer une équation vectorielle puis cartésienne de la droite droite d passant par les points $A(-2\,;1)$ et $B(1\,;3)$.

c. Soit d la droite d'équation $2x + 4y = -1$. Déterminer 4 points et un vecteur directeur de d.

2. Plan de l'espace

a. Déterminer une **équation vectorielle** puis le **système d'équations paramétriques**, et enfin une **équation cartésienne** du plan π contenant $A(1\,;1\,;1)$ et de **vecteurs directeurs** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$.

b. Déterminer une équation vectorielle puis cartésienne du plan π passant par

$A(2;1;1), B(0;-2;3)$ et $C(6;-1;-1)$.

c. Déterminer des équations cartésiennes des plans suivants : le « sol », les « deux murs ».

d. Soit π le plan d'équation $2x + 4y - 5z - 2 = 0$. Déterminer 4 points et deux vecteurs directeurs non colinéaires de d, puis deux vecteurs directeurs colinéaires de d.

e. Quelle valeur doit-on attribuer au paramètre k afin que le point $P(1;2;k)$ appartienne au plan d'équation $2x+3y+4z=12$?

3. Déterminer une **équation vectorielle** puis le **système d'équations paramétriques**, et enfin les **équations cartésiennes** de la **droite de l'espace** contenant par $A(2;1;1), B(0;-2;3)$

Voir la théorie 14 et les exercices 29 à 37

10 [Activité] Produit scalaire

1. Jusqu'à présent, nous avons défini deux opérations entre vecteurs et une opération qui consiste à multiplier un vecteur par un scalaire. Les résultats étaient toujours à nouveau un vecteur.

Nous allons maintenant définir une nouvelle opération: la « multiplication » de deux vecteurs entre eux ; le résultat ne sera plus un vecteur mais un nombre (un scalaire)! On appellera donc cette opération « **produit scalaire** ». Elle permettra d'explorer des notions de géométrie euclidienne traditionnelle: les longueurs, les angles, l'orthogonalité, les aires ...

Définition : Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (du plan ou de l'espace) est défini par $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\alpha)$, où α est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Illustrer avec des exemples dans le plan et dans l'espace.

2. Interpréter géométriquement le produit scalaire.

3. **Propriétés du produit scalaire**

a. Théorème : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace) et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a:

i $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$

ii $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

iii $\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})=(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$

iv $\vec{v}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\vec{v}=\vec{0}$

v $\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$

b. Illustrer et démontrer.

4. **Produit scalaire en composantes**

Illustrer et démontrer le théorème suivant :

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. Alors on a $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$

5. Calculer $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1{,}5\\4\end{pmatrix}$.

6. Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ des vecteurs. Parmi les expressions suivantes, déterminer celles qui ont un sens et celles qui n'en ont pas. Justifier.

a. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$

b. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$

c. $\|\vec{a}\|\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

d. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

e. $(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{c}$

f. $\|\vec{a}\|\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

g. $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}}$

h. $\dfrac{\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$

7. Soit $\vec{a}$ un vecteur. On a: $\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}$ Vrai ou faux? Justifier.

Voir la théorie 15 et les exercices 38 à 40

11 [Activité] Applications du produit scalaire dans le plan

1. Calculer les **angles** et les côtés du triangle ΔABC dans chacun des cas suivants :

a. $A(0;0), B(5;1), C(3;4)$

b. $A(-2;-1), B(2;3), C(8;-3)$

2. Calculer l'angle entre les droites d'équations $3x + 2y = 1$ et $4x - y = 5$.

3. Les vecteurs suivants sont-ils **orthogonaux** ?

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}201\\403\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-0.1\\0.3\end{pmatrix}$

4. Soit $B(5;2)$ et $C(3;4)$. Déterminer A pour que le triangle ΔABC soit rectangle en A.

5. **Vecteur normal**

a. Déterminer un **vecteur normal** à la droite d passant par $B(5;2)$ et $C(3;4)$.

b. Soit d la droite d'équation $2x + 3y = 1$. Déterminer un vecteur directeur et un vecteur normal de d.

6. Les droites d_1 et d_2 d'équations $2x + 3y = 1$ et $4x - 6y = -2$ sont-elles **parallèles** ? **Perpendiculaires** ?

7. Equations

a. Utiliser le calcul vectoriel pour déterminer une **équation cartésienne de la droite** d passant par le point $A(-1;3)$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

b. Soit $A(1;1)$ et $B(5;2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Déterminer l'équation de la médiatrice du segment $[AB]$.

8. Projection

a. Définir et illustrer la notion de **vecteur projection** (orthogonale) d'un vecteur sur un autre.

b. Enoncer et démontrer un théorème qui permet d'obtenir le vecteur projection.

c. Calculer l'aire du triangle ΔABC dans chacun des cas suivants :

i $A(0;0), B(5;1), C(3;4)$

ii $A(-2;-1), B(2;3), C(8;-3)$

9. Démontrer le **théorème du cosinus** à l'aide du calcul vectoriel.

Voir la théorie 16 et les exercices 41 à 49

12 [Activité] Distances dans le plan

1. Définir et illustrer les notions de **distance** du point P à la droite d et de distance entre deux droites parallèles.

2. Enoncer et démontrer un **théorème** pour calculer la **distance point-droite dans le plan**.

3. Soit d la droite contenant $A(-3;2)$ et $B(5;1)$. Calculer la distance entre d et le point $P(0;1)$.

4. Calculer la **distance entre les droites** d_1 et d_2 d'équations $2x + 3y = 1$ et $4x + 6y = -2$.

Voir la théorie 17 et les exercices 50 à 51

13 [Activité] Produit vectoriel

Considérons trois problèmes dans l'espace :

- Comment calculer rapidement l'aire du parallélogramme défini par deux vecteurs ?
- Comment obtenir facilement un vecteur normal à deux vecteurs non colinéaires ?
- Comment obtenir plus rapidement une équation de plan ?

1. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, noté $\vec{u}\times\vec{v}$, est un vecteur :

- de direction perpendiculaire à celle de de $\vec{u}$ et à celle de $\vec{v}$;
- de sens donné par la "**règle du tire-bouchon**" (ou « **règle de la main droite** ») ;
- de norme (longueur) égale à $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\alpha)$, où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ce qu'on peut aussi écrire $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\alpha)$.

Illustrer avec des exemples.

2. Soit les vecteurs $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ de la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$

Déterminer les produits vectoriels $\vec{i}\times\vec{j},\vec{i}\times\vec{k},\vec{j}\times\vec{k},\vec{j}\times\vec{i},\vec{k}\times\vec{i},\vec{k}\times\vec{j}$.

3. On considère le **théorème « Produit vectoriel en composantes »** :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Alors on a: $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}u_2v_3-u_3v_2\\-(u_1v_3-u_3v_1)\\u_1v_2-u_2v_1\end{pmatrix}$

a. L'utiliser pour déterminer le produit vectoriel $\vec{a}\times\vec{b}$ des vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, puis vérifier que $\vec{a}\times\vec{b}$ est bien orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b. Démontrer ce théorème.

Voir la théorie 18 et les exercices 52 à 55

14 [Activité] Applications des produits dans l'espace

1. Calculer l'angle entre vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

2. Déterminer k pour que $\vec{c}\begin{pmatrix}1\\k\\5\end{pmatrix}$ soit orthogonal à $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$.

Prérequis et activités de découverte

3. Soit les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$:

a. Déterminer un vecteur **orthogonal** à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

b. Déterminer un **vecteur unité** orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

c. Déterminer un vecteur de longueur 10 orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

4. Déterminer si les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ sont **coplanaires** ou non.

5. **Théorème « Vecteur normal et équation de plan »**

- Si Π est un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π .
- Si Π est un plan contenant le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à Π , alors une équation vectorielle de Π est donnée par $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ où $P(x;y;z)$ est un point quelconque du plan ; en effectuant le produit scalaire, on obtient directement une équation cartésienne de Π : $ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0$

a. Déterminer un **vecteur normal** au plan Π passant par les trois points

$A(2;1;1), B(0;-2;3), C(6;-1;-1)$.

b. Déterminer l'équation d'un **plan** Π_2 **parallèle** au plan Π_1 d'équation $2x - y- + z = 3$

c. Déterminer une **équation vectorielle puis cartésienne du plan** passant par $A(1;1;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$.

d. Démontrer ce théorème.

6. **Théorème « Aire du parallélogramme »**

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace. Alors on a $\|\vec{u}\times\vec{v}\|$ = aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Déterminer l'**aire du parallélogramme** engendré par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

b. Démontrer ce théorème.

Voir la théorie 19 et les exercices 56 à 68

15 [Activité] Distances dans l'espace

1. Définir et illustrer dans l'espace les notions de **distance d'un point à un plan**, **distance entre deux plans**, **distance entre un point et un droite**.

2. Enoncer et démontrer un **théorème** pour calculer la **distance point-plan**.

3. Calculer la distance entre le point $A(2;1;0)$ et le plan $\pi:-2x+y-z=1$.

4. On considère les plans $\pi_1:-2x+y-z=1$ et $\pi_2:4x-2y+2z-4=0$.

a. Montrer qu'ils sont parallèles (non confondus).

b. Calculer la distance entre les deux plans.

5. Enoncer et démontrer un **théorème** pour calculer la **distance point-droite dans l'espace**.

6. Calculer la distance entre le point $A(2;1;0)$ et la droite $d:\begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Voir la théorie 20 et les exercices 69 à 74

16 [Activité] Intersections

1. Discuter les différentes situations possibles d'**intersection entre une droite et un plan dans l'espace**.

2. Déterminer l'intersection entre la droite d donnée par l'équation $\begin{pmatrix}x+2\\y+1\\z-4\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et le plan d'équation $\pi:x+2y-5z+9=0$.

3. Discuter les différentes situations possibles d'**intersection entre deux plans**.

4. Déterminer l'intersection des plans $\pi_1:3x-2y-z=4$ et $\pi_2:5x-y+2z=4$.

17 [Aller plus loin] Intersections de trois plans

1. Etudier les différentes situations possibles d'**intersections de trois plans**.

2. Déterminer l'intersection des plans suivants $\pi_1:3x-2y-z=4,\pi_2:5x-y+2z=4$ et $\pi_3:-2x+y-\frac{z}{3}=3$

Voir la théorie 21 à 23 et les exercices 75 à 77

Prérequis et activités de découverte

18 [Aller plus loin] Produit mixte

1. Calculer le volume du **tétraèdre** $PQRS$, où P(19;19;15), Q(1;−5;−9), R(3;−2;-5) et S(0;-7;-11).

2. Définir le **produit mixte** de trois vecteurs de l'espace.

3. Démontrer les propriétés suivantes : Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs non nuls de l'espace. Alors a:

a. $|(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{w}|$ est égal au volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

b. $|(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{w}|=0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont **coplanaires**.

4. Soient les point A(-1;0;1), B(0;2;1), C(-2;-2;1) et D(2;1;0). Calculer $\delta(\pi_{BCD} ; A)$ et $\delta(\pi_{ABC} ; D)$.

19 [Aller plus loin] Position relative de deux droites de l'espace

1. Etudier les différentes situations possibles concernant la **position relative de deux droites de l'espace**.

2. Calculer la distance entre les droites $d_1 : -2x+y-z=1$ et $x+z=2$ et $d_2 : \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-3}$

3. On considère les deux droites telles que d_1 contient les points A(2;1;1), B(-3;-2;1) et d_2 est donnée par l'équation $\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+4 \end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que leur distance est nulle.

b. Déterminer leur point d'intersection.

Voir la théorie 24 à 25 et les exercices 78 à 82

20 [Souvenirs] Cercles dans le plan

Rappeler la définition d'un **cercle dans le plan** et donner son équation.

21 [Activité] Sphères

1. Donner la définition d'une **sphère dans l'espace** et donner son équation.

2. Déterminer l'équation du plan tangent à la sphère Σ de centre C(2 ;-1;5) et de rayon 3 au point T(-3 ;-2;4).

Voir la théorie 26 à 27 et les exercices 83 à 92

1 [Souvenirs] Points, droites et angles

Notions connues

- ☐ le point, le plan, le demi-plan, l'espace ; la distance de deux points ;
- ☐ la droite, le segment de droite, la demi-droite, le milieu d'un segment ; les droites sécantes, concourantes, parallèles, perpendiculaires ;
- ☐ les triangles, les quadrilatères, les polygones en général ;
- ☐ les droites remarquables du triangle : bissectrices, médiatrices, médianes et hauteurs ;
- ☐ l'angle, la mesure d'un angle ; l'angle droit, l'angle plat ;
- ☐ angles opposés, complémentaires, supplémentaires, correspondants, alternes-internes ;
- ☐ le cercle et l'arc de cercle.

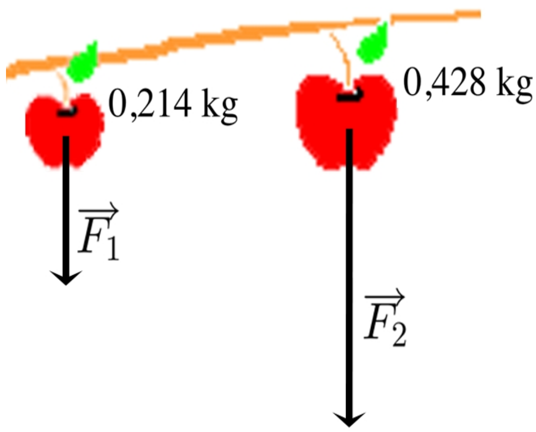
Conventions de notations

$A, B, C, \ldots$	points
$a, b, c, \ldots$	droites
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	angles ou mesures d'angles
(AB)	la droite passant par A et B
$\delta(AB)$ ou $\overline{AB}$	la distance de A à B
$[AB]$ ou AB	le segment d'extrémités A et B
$[AB)$	la demi-droite d'origine A, passant par B
$\widehat{AOB}$	angle des demi-droites $[OA)$ et $[OB)$

2 [A savoir] Notion de vecteur

Certaines grandeurs physiques peuvent être caractérisées par une unique grandeur (taille, aire, masse, longeur, température, temps, …) ; elles sont appelées **(grandeurs) scalaires**.

Pour d'autres, la représentation par une unique grandeur est insuffisante car l'information liée à cette grandeur physique ne peut être résumée uniquement par une grandeur. C'est le cas, pour l'exemple sans doute le plus célèbre, de la force agissant sur la pomme de Newton. Cette force, représentée ici par des « flèches », contient plusieurs informations pour chacune des pommes :



la **direction** des flèches (direction verticale) représente la direction sur laquelle la force d'attraction terrestre s'applique ;

le **sens** des flèches (dans le sens haut vers bas) indique que les pommes sont attirées vers la Terre ;

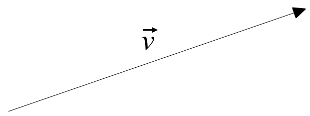
la **longueur** des flèches représente l'intensité de la force (on a $f = \mathrm{m} \cdot a$, $a \cong 9,81\, m/s^2$; et la masse d'une des pommes est double de l'autre donc la force pour la grande pomme est représentée par une flèche deux fois plus longue que l'autre).

Remarque : cette notion est aussi bien valable dans le plan que dans l'espace. Elle peut également être en mathématiques étendue à d'autres types d'espaces …

Définition «Vecteur»

Un **vecteur** est la donnée de :

- une **direction** ;
- un **sens** ;
- une **longueur**, aussi appelée **norme** et notée $\|\vec{v}\|$.



On représente un vecteur avec une flèche .

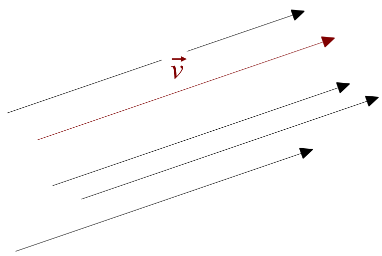
Le vecteur qui a une longueur nulle est appelé **vecteur nul** et est noté $\vec{0}$, qui n'a ni direction, ni sens, et dont la norme est égale à 0.

Remarques :

- à ce stade, on peut considérer des vecteurs aussi bien dans le plan que dans l'espace ;

- la direction est la notion la plus complexe à comprendre ; on peut se la représenter comme un faisceau de droites parallèles ;

- un vecteur n'est donc à priori pas positionné dans le plan ou dans l'espace de façon univoque ; lorsqu'on choisit de représenter un des vecteurs parmi l'infinité de ceux qui ont même direction, sens et norme, on dit qu'on a choisi un **représentant** de ce vecteur.



3 [A savoir] Origines

L'Irlandais Sir William Hamilton (1805-1865) fut l'un des premiers à utiliser les vecteurs et il est probablement l'inventeur du mot (mot venant du latin vehere, qui signifie « porter »). L'Allemand Hermann Grassman (1809-1877) introduit la notation vectorielle pour des problèmes de physique. L'Américain Gibbs (1839-1903) et l'Anglais Heaviside (1850-1925), disciples de Hamilton, donnent au calcul vectoriel sa forme quasi définitive, mais ce type de « calcul » met assez de temps à s'introduire en France. Michel Chasles (1793-1880) avait déjà pressenti l'importance du sens sur un axe sans aller jusqu'à la notion de vecteur.

William Rowan Hamilton (1805-1865)

À l'origine, un vecteur est un objet de la **géométrie euclidienne**. À deux points, Euclide associe leur distance. Or, un couple de points porte une charge d'information plus grande: ils définissent aussi une direction et un sens. Le vecteur synthétise ces informations. La notion de vecteur peut être définie en dimension deux (le plan) ou trois (l'espace euclidien usuel). Elle se généralise à des espaces de dimension quelconque.

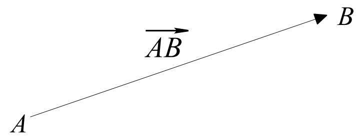
Cette notion, devenue abstraite et introduite par un système d'axiomes, est le fondement d'une branche des mathématiques appelée algèbre linéaire. Le vecteur permet, en physique, de modéliser des grandeurs qui ne peuvent être complètement définies par un nombre ou une fonction numérique seuls. Par exemple, pour préciser un déplacement, une vitesse, une force ou un champ électrique, la direction et le sens sont indispensables. Les vecteurs s'opposent aux **grandeurs scalaires** décrites par un simple nombre, comme la masse, la température, etc.

Source: http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/GEOME/GEOME3.PDF

4 [A savoir] Vecteur entre deux points

Définition «Vecteur entre deux points»

Soient A et B sont deux points (du plan, de l'espace) et d_{AB} la droite passant par A et B.



$\overrightarrow{AB}$ est le vecteur dont

- ☐ la direction est donnée par d_{AB} (aussi appelée le **support** de $\overrightarrow{AB}$)
- ☐ le sens est obtenu en considérant A comme **origine** et B comme **extrémité** du vecteur
- ☐ la norme est égale à celle du segment $[AB]$.

5 [A savoir] Egalité de deux vecteurs

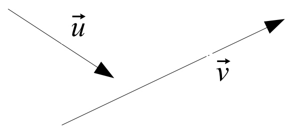
Définition «Egalité entre deux vecteurs»

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont considérés comme égaux si et seulement si ils ont même direction (supports confondus ou parallèles), même sens et même norme.

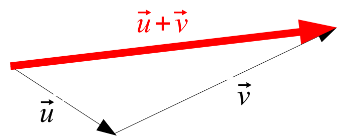
6 [A savoir] Somme de deux vecteurs

Définition «Somme de deux vecteurs»

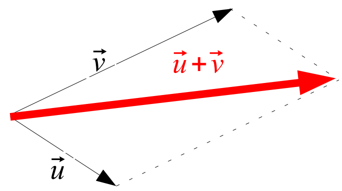
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :



Méthode 1 [**relation de Chasles**]



Méthode 2 : [parallélogramme]



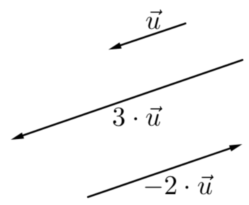
Remarques : la somme de deux vecteurs modélise la notion de **force résultante**.

7 [A savoir] Multiplication d'un vecteur par un scalaire

On a vu que **scalaire** fait référence à un nombre réel, pour bien marquer la différence entre <u>nombre</u> réel et <u>vecteur</u>.

Définition «Multiplication d'un vecteur par un scalaire»

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, et soit λ un nombre réel.
Le produit $\lambda \cdot \vec{u}$ est le vecteur :
- ☐ qui a même direction que le vecteur $\vec{u}$;
- ☐ dont la norme est $|\lambda|$ fois la norme du vecteur $\vec{u}$;
- ☐ dont sens est celui de $\vec{u}$ si λ est positif et de sens opposé à celui de $\vec{u}$ si λ est négatif.



Définition «Opposé d'un vecteur»

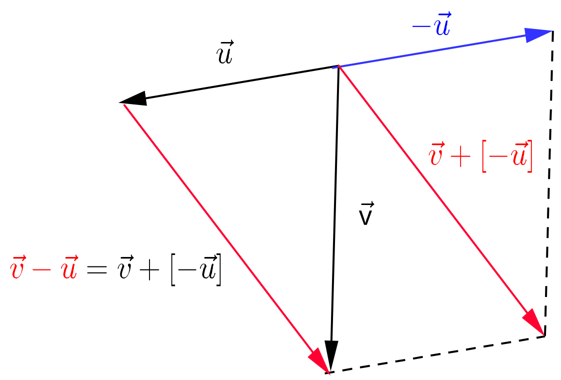
L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $(-1)\cdot\vec{u}$. On le note $-\vec{u}$.

Remarque : $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AB}$. Ne pas confondre direction et sens : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction et même norme mais sont de sens opposés !

8 [A savoir] Différence de deux vecteurs

Définition «Différence de deux vecteurs»

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, alors $\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}+(-1)\cdot\vec{u}$
« Soustraire, c'est additionner l'opposé » reste valable pour les vecteurs



Remarque : $\vec{v}-\vec{u}$ est le vecteur qui relie les extrémités de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (dans cet ordre) lorsque leurs origines coïncident .

9 [A savoir] Propriétés des vecteurs

Théorème «Propriété des vecteurs»

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs. Alors on a :

1 $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ [**commutativité** de l'addition]
2 $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ [**associativité** de l'addition]
3 $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ [$\vec{0}$ est l'**élément neutre** de l'addition]
4 $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ [$-\vec{u}$ l'**opposé** de $\vec{u}$]

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ des vecteurs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors on a :

5 $\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\cdot\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$
6 $(\lambda+\mu)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$
7 $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$
8 $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$
9 $(-1)\cdot\vec{u}=-\vec{u}$
10 $(-\lambda)\cdot\vec{u}=\lambda\cdot(-\vec{u})=-(\lambda\cdot\vec{u})$
11 $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$
12 $\lambda\cdot\vec{0}=\vec{0}$

Voir les exercices 1 à 5

10 [A savoir] Colinéarité et combinaison linéaire

Définition «Colinéaire»

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un scalaire, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire α tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

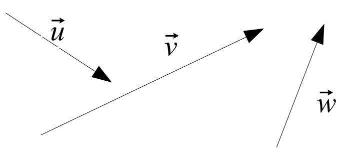
Remarque : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Définition «Combinaison linéaire»

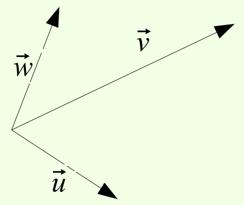
Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs. Une **combinaison linéaire** (de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$) est un élément de la forme $\mu\vec{v}+\lambda\vec{w}$, avec μ et $\lambda\in\mathbb{R}$

Une **combinaison linéaire** (de n vecteurs $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \dots, \vec{v_n}$) est un élément de la forme , $\lambda_1\vec{v_1}+\lambda_2\vec{v_2}+\lambda_3\vec{v_3}+\dots+\lambda_n\vec{v_n}$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n \in\mathbb{R}$.

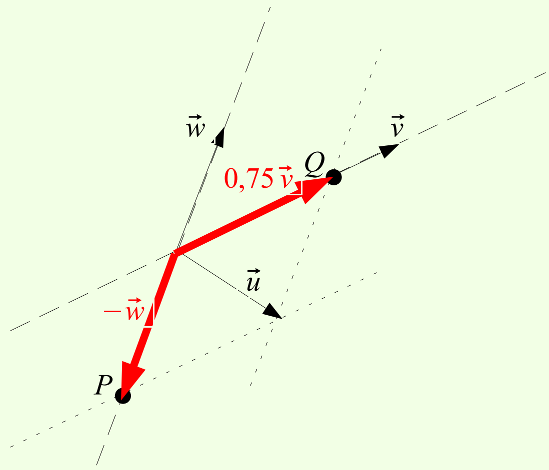
Exemple : soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ donnés ci-dessous ; estimer par une approche géométrique comment on peut écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$



On commence par représenter tous les vecteurs issus d'une même origine :



On ajoute 4 droites : les deux directions de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ainsi que les deux droites parallèles à ces deux directions et qui passent par l'extrémité de $\vec{u}$, puis on identifie les points d'intersection P et Q, qui permettent de déterminer approximativement les deux multiples recherchés de $\vec{v}$ et $\vec{w}$:



Ainsi on obtient : $\vec{u} \simeq 0{,}75 \cdot \vec{v} + (-1) \cdot \vec{w}$

Définition «Base du plan»

Des vecteurs forment une **base** du plan (respectivement de l'espace) si et seulement si tout vecteur du plan (respectivement de l'espace) peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs (de base).

Théorème «Base du plan»

Toute base du plan est formée de deux vecteurs non colinéaires et toute paire de vecteurs non colinéaires forme une base du plan.

Définition «Coplanaire»

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits **coplanaires** si et seulement si l'un au moins d'eux est combinaison linéaire des deux autres.

Théorème «Base de l'espace»

Une base de l'espace est formée de trois vecteurs non coplanaires et tout triplet de vecteurs non coplanaires forme une base de l'espace

Remarque : $\vec{0}$ et $\vec{v}$ sont toujours colinéaires, car $\vec{0}=0\cdot\vec{v}$; de même, $\vec{0}$ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont toujours coplanaires, car $\vec{0}=0\cdot\vec{v}+0\cdot\vec{w}$. $\vec{0}$ n'appartient donc jamais à une base du plan ou de l'espace.

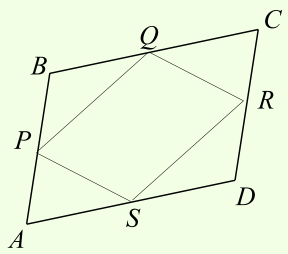
Voir les exercices 6 à 12

11 [A savoir] Les vecteurs pour démontrer

Le calcul vectoriel est un outil très utile pour démontrer des propriétés géométriques.

Exemple : soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque ; démontrer que les points milieux des quatre côtés de $ABCD$ forment un parallélogramme.

Soient S, P, Q et R les milieux respectifs de $[DA]$, $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$:



On a : $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AP}$ (par définition de l'addition des vecteurs)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (car les points sont au mileu des segments)

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)$ (mise en évidence)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$ (par définition de l'addition des vecteurs)

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)$ (par définition de l'addition des vecteurs)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (distributivité)

$= \overrightarrow{RC}+\overrightarrow{CQ}$ (car les points sont au mileu des segments)

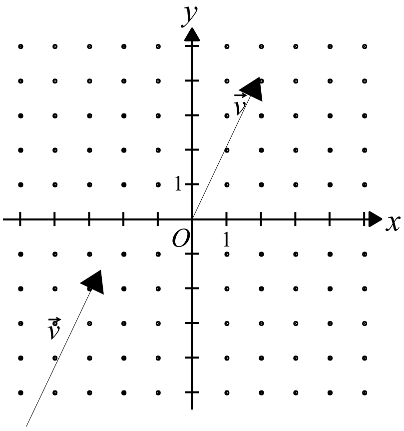
$= \overrightarrow{RQ}$ (par définition de l'addition des vecteurs)

De même : $\overrightarrow{SR}=\overrightarrow{PQ}$, d'où $SPQR$ est un parallélogramme.

Voir les exercices 13 à 16

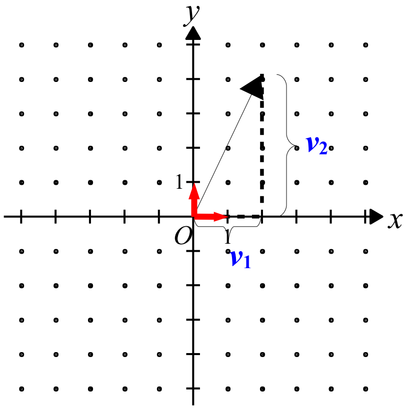
12 [A savoir] Coordonnées d'un vecteur

Vecteur du plan dans un repère orthonormé



Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan, et soit ce même plan muni d'un **repère orthonormé** d'**origine** $O(0;0)$ et d'axes Ox (axe des **abcisses**) et Oy (axe des **ordonnées**), ordonnés dans ce sens.

On peut décider que l'origine de $\vec{v}$ coïncide avec l'origine O du repère.



Soient les points $I(1;0)$ et $J(0;1)$ et les vecteurs $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

On peut écrire $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$; dans notre exemple, on a : $\vec{v}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}$

De façon générale, on aura $\vec{v}=v_1\,\vec{i}+v_2\,\vec{j}$, où v_1 et v_2 sont appelés les **composantes** de $\vec{v}$.

On note aussi : $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, et plus généralement $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

Remarques :

□ on note indistinctement $A(-2;4)$ ou $A=(-2;4)$ pour les points et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ ou $\vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ pour les vecteurs, selon le contexte, de ; attention de ne pas confondre les notations en ligne pour les points - on parle de **coordonnées** - avec celles en colonnes pour les vecteurs - on parle de **composantes**. Par exemple, $A(-2;4)$ est un point du plan, alors que $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur du plan, -2 et 4 sont les coordonnées de A, alors que -2 et 4 sont les composantes de $\vec{v}$;

□ comme $\vec{i}=1\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}$ et $\vec{j}=0\cdot\vec{i}+1\cdot\vec{j}$ les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ s'écrivent $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Vecteur de l'espace dans un repère orthonormé

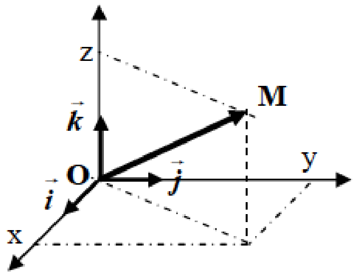
De la même façon que dans le plan, nous pouvons dans l'espace choisir un repère d'origine O, muni de trois axes ordonnés Ox, Oy et Oz (z est appelée la **côte**).

On considère les trois points $I(1;0;0)$, $J(0;1;0)$ et $K(0;0;1)$ et les vecteurs $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

Tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace s'écrit alors comme combinaison linéaire de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ainsi : $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, et on note $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

On a bien sûr : $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque : il est plus difficile – mais pas impossible – de représenter les points et les vecteurs dans l'espace que dans le plan ! Dans ce cas, on utiliser la convention ci-contre :



Remarques importantes :

□ les composantes d'un vecteur sont bien sûr relatives au choix des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ (dans le plan) et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (dans l'espace) ! On aurait pu travailler de façon similaire dans le plan avec n'importe quelle autre paire de vecteurs non colinéaires, et dans l'espace avec tout autre choix de trois vecteurs non coplanaires. Tout tel choix s'appelle une **base** (du plan ou de l'espace) ;

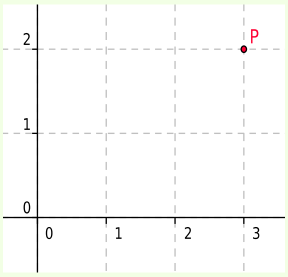
□ on peut démontrer que pour de tels choix, on peut toujours écrire tout vecteur comme combinaison linéaire de $\vec{i}, \vec{j}$ (dans le plan) et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (dans l'espace), et ceci de façon unique. avec lesquels nous travaillerons dans ce cours constituent le choix le plus « naturel » ; on les appelle **base canonique**.

Bijection entre points et vecteurs

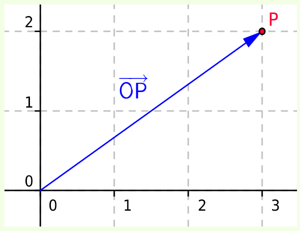
A tout point $P(x_1 ; x_2)$ du plan correspond un unique vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; réciproquement, à tout vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ du plan correspond un unique point $P(v_1 ; v_2)$	A tout point $P(x_1 ; x_2 ; x_3)$ de l'espace correspond un unique vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; réciproquement, à tout vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ correspond un unique point $P(v_1 ; v_2 ; v_3)$
On note $\mathbb{R}^2$ autant pour l'ensemble de tous les points du plan que pour l'ensemble de tous les vecteurs du plan.	On note $\mathbb{R}^3$ autant pour l'ensemble de tous les triplets de l'espace que pour l'ensemble de tous les vecteurs de l'espace.

Exemples

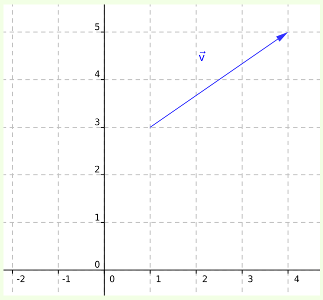
Au point $P=(3;2)$:



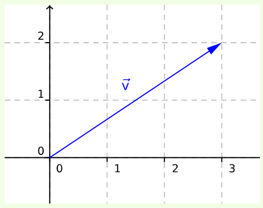
on associe de façon unique le vecteur $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$:



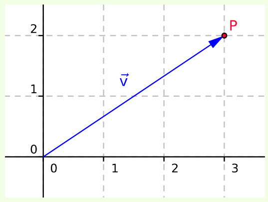
Au vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$



on associe de façon unique le **représentant** dont l'origine est O



puis à ce représentant son extrémité $P=(3;2)$



13 [A savoir] Travailler avec les vecteurs en composantes

Théorème «Egalité et opérations en composantes»

Soient $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$:

1 $\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1=w_1\\v_2=w_2\end{cases}$

2 $\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix}$

3 $\lambda\vec{v}=\begin{pmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\end{pmatrix}$

4 $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1-w_1\\v_2-w_2\end{pmatrix}$

Soient $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$:

1 $\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1=w_1\\v_2=w_2\\v_3=w_3\end{cases}$

2 $\vec{v}=\vec{w}\Leftrightarrow\begin{cases}v_1=w_1\\v_2=w_2\\v_3=w_3\end{cases}$

3 $\lambda\vec{v}=\begin{pmatrix}\lambda v_1\\\lambda v_2\\\lambda v_3\end{pmatrix}$

4 $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}v_1-w_1\\v_2-w_2\\v_3-w_3\end{pmatrix}$

Théorème «Vecteur entre deux points»

Soit $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$	Soit $A(a_1\,;a_2\,;a_3)$ et $B(b_1\,;b_2\,;b_3)$ dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$

Théorème «Norme»

1 Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$	Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

2 $\|\vec{v}\| \geq 0$

3 $\|\vec{v}\|=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

4 $\|\lambda \cdot \vec{v}\|=|\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$

5 $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Définition «Vecteur unité»

Un **vecteur unité** est un vecteur de norme 1.

Remarque : $\dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ est un vecteur unité de même direction et sens que $\vec{v}$

Exemple : déterminer un vecteur unité colinéaire à $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$, donc le vecteur $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ aura une norme cinq fois plus petite que $\vec{v}$, c'est-à-dire une norme égale à 1. $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$ est un vecteur unité.

Voir les exercices 17 à 28

14 [A savoir] Equations vectorielles

Définition «Vecteur directeur d'une droite»

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur dont la direction est donnée par d.

Méthode «Déterminer un vecteur directeur d'une droite»

Pour déterminer un vecteur directeur d'une droite d, il suffit de connaître deux points de d

Exemple : déterminer un vecteur directeur de la droite d d'équation $2x - y = -5$

$A(-1;3)$ appartient à d, car $2\cdot(-1)-3=-5$; $B(-2;1)$ appartient à d, car $2\cdot(-2)-1=-5$

donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2-(-1)\\1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

Equations vectorielle, paramétrique et cartésienne d'une droite du plan

Une **équation vectorielle de la droite *d*** passant par le point $A(x_0\,;y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ est une équation de la forme $\overrightarrow{AP}=\lambda\,\vec{v}$

où $P(x;y)$ est un point quelconque de la droite et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Si on récrit l'équation $\overrightarrow{AP}=\lambda\,\vec{v}$ ainsi : $\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x - x_0 = \lambda v_1\\ y - y_0 = \lambda v_2\end{cases}$

on obtient un **système d'équations paramétriques de *d***

En éliminant λ , on obtient enfin une **équation cartésienne de *d*** , de la forme

$ax+by+c=0$, où x et y sont des variables et a,b et c des constantes.

Remarque : on peut aussi écrire l'équation vectorielle comme $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}$.

Méthode «Déterminer une équation de droite du plan»

☐ pour déterminer une équation vectorielle de d, il suffit de connaître un point A de d et un vecteur directeur de d, puis de considérer un point $P(x;y)$ inconnu sur d et l'équation $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}$

☐ si on connaît deux points de d, on peut facilement trouver un vecteur directeur et donc déterminer les différentes équations de d

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par $A(1;-3)$et de vecteur directeur $\vec{v}\%\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

$P=(x\,;y)\in d\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\,\vec{v}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, équation vectorielle

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=-3\lambda\\y+3=4\lambda\end{cases}$, système d'équations paramétriques

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=-12\lambda \\ 3y+9=12\lambda \end{cases}$ [on amplifie pour pouvoir éliminer λ]

d'où $4x+3y+5=0$ [on additionne] et on obtient une équation cartésienne

Définition «Vecteur directeur du plan»

Un **vecteur directeur** d'un plan π est un vecteur dont la direction est parallèle au plan π

Equations vectorielle, paramétrique et cartésienne d'un plan dans l'espace

Une **équation vectorielle du plan** Π contenant le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteurs directeurs <u>non colinéaires</u> $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ est une équation de la forme $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$

où $P(x; y; z)$ est un point quelconque du plan et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Si on récrit l'équation $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}$ ainsi

: $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x - x_0 = \lambda v_1+\mu w_1 \\ y - y_0 = \lambda v_2+\mu w_2 \\ z - z_0 = \lambda v_3+\mu w_3 \end{cases}$

on obtient un **système d'équations paramétriques** de Π .
En éliminant λ et μ , on obtient une **équation cartésienne** de Π , de la forme

$$ax+by+cz+d=0$$

où x,y et z sont des variables et a,b,c et d des constantes.

Remarque : on peut aussi écrire l'équation vectorielle comme $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}$.

Méthode «Déterminer une équation de plan»

☐ pour déterminer une équation vectorielle de π , il suffit de connaître un point A de π et deux vecteur directeurs de π non colinéaires.

☐ si on connaît trois points non alignés de π , on peut facilement trouver un vecteur directeur et donc déterminer les différentes équations de π

Exemple : déterminer une équation cartésienne du plan π passant par A(1;-3;0)et de vecteurs directeurs $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

remarque : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires, donc

$P=(x; y; z)\in\Pi\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ [équation vectorielle]

$\Leftrightarrow\begin{cases} x-1=-3\lambda \\ y+3=4\lambda+\mu \\ z=-\mu \end{cases}$ [système d'équations paramétriques] on additionne la 2e et la 3e équation pour éliminer μ et on garde telle quelle la 1re :

$\begin{cases} x-1=-3\lambda \\ y+3+z=4\lambda \end{cases}$ on a maintenant un système 2x2 à résoudre :

on amplifie les deux équations pour pouvoir éliminer λ : $\begin{cases} 4x-4=-12\lambda \\ 3y+9+3z=12\lambda \end{cases}$

on additionne les deux équations et on obtient $4x+3y+3z+5=0$ [équation cartésienne]

Equation vectorielle et <u>équations</u> cartésiennes d'une droite dans l'espace

Une **équation vectorielle de la droite d** passant par le point $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est une équation de la forme $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}$

où $P(x;y;z)$ est un point quelconque de la droite et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Lorsqu'on écrit $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v}$ ainsi : $\begin{cases} x-x_0 &= \lambda v_1 \\ y-y_0 &= \lambda v_2 \\ z-z_0 &= \lambda v_3 \end{cases}$

on obtient un **système d'équations paramétriques** de d.

En posant $\lambda=\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3}$, on obtient $\dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3}$

<u>les</u> équations cartésiennes de d, qu'on écrit aussi souvent $\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} \\ \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3} \end{cases}$

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A(1;-3;0)et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$P=(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-0 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ [équation vectorielle]

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-3\lambda \\ y+3=4\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ [système d'équations paramétriques]

on isole λ dans les 3 équations :

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{-3}=\lambda \\ \dfrac{y+3}{4}=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ on a maintenant un système 2x2 à résoudre ;

on obtient : $\lambda=\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4}=z$

et ainsi : $\begin{cases} \dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{4} \\ \dfrac{y+3}{4}=z \end{cases}$ [un système de deux équations cartésiennes]

Remarques : une droite dans l'espace ne peut donc pas être décrite par une unique équation cartésienne linéaire (ce serait alors un plan!). On ne peut la décrire que par deux équations. En fait, comme chacune de ces deux équations est celle d'un plan, la droite est décrite de façon cartésienne comme une intersection de deux plans !

Voir les exercices 29 à 37

15 [A savoir] Produit scalaire

On construit un outil qui à partir de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés dépend des longueurs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et qui serait d'autant plus grand que les directions de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont semblables, et qui serait nul si les vecteurs sont perpendiculaires. Cet outil s'appelle le **produit scalaire**.

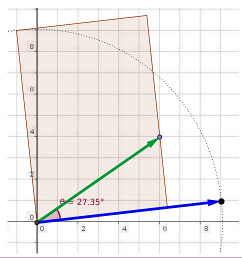
Définition «Produit scalaire»

Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ défini par
$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$, où α est l'angle aigü entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Interprétation géométrique du produit scalaire

Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est égal à l'aire du rectangle dont la base est la norme du vecteur projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et la hauteur est la norme de $\vec{v}$.

Si l'angle entre de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est compris entre 90° et 180°, alors le produit scalaire est négatif et égal à l'opposé de l'aire de ce rectangle.



Propriétés du produit scalaire

Soients $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace) et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a:

1 $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$ [**commutativité** du produit scalaire]

2 $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})=(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$

$\vec{v}\cdot\vec{v}\geq 0$

$\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \vec{v}=\vec{0}$

$\vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$

Remarque: toute ce qui précède est valable aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Théorème «Produit scalaire en composantes»

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, alors on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, alors on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$.

Voir les exercices 38 à 40

16 [A savoir] Applications du produit scalaire dans le plan

Méthode «Déterminer l'angle entre deux vecteurs»

L'angle α entre deux vecteurs est donné par $\cos(\alpha)=\dfrac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{\|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|}$

Définition «Vecteurs orthogonaux»

Deux vecteurs sont **orthogonaux** si et seulement si leurs directions sont perpendiculaires.

Théorème «Produit scalaire et orthogonalité»

Soient $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a :
$\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$

Méthode «Tester l'orthogonalité de deux vecteurs»

Pour déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ou non, on calcule leur produit scalaire ; si celui-ci est nul, les vecteurs sont orthogonaux, sinon ils ne le sont pas.

Vecteur normal à une droite du plan

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur dont la direction est perpendiculaire à d.

Théorème «Vecteur normal et directeur d'une droite du plan»

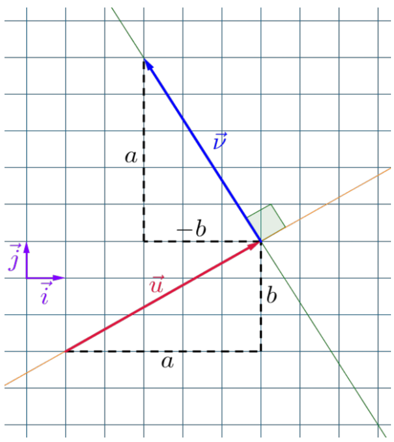
Soit d une droite du plan.

Alors on a:

$\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

$\Leftrightarrow$

$\vec{n}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d



Méthode «Tester parallélisme/perpendicularité de deux droites du plan»

☐ $d_1 \| d_2 \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{n_1} = \lambda\, \vec{n_2}$
☐ $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = 0$

Théorème «Vecteur normal et équation de droite dans le plan»

☐ Si d est une droite d'équation (cartésienne) $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, est un vecteur normal à d.

☐ Si d est une droite du plan passant par $A(x_0 ; y_0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à d, alors une **équation vectorielle** de d est donnée par $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$

où $P(x ; y)$ est un point quelconque du plan ; en effectuant le produit scalaire, on obtient directement une **équation cartésienne** de d : $a\,x + b\,y + (-a\,x_0 - b\,y_0) = 0$

Méthode «Déterminer une équation de droite du plan»

Pour déterminer une équation cartésienne de d, il suffit de connaître un point A de d et un vecteur normal de d, puis de considérer un point $P(x;y)$ inconnu sur d et l'équation $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0$.

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par A(-2;5)et de vecteur directeur $\vec{n}\%\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$

$$P \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-5\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} = 0 \quad \text{[équation vectorielle]}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot 1 + (y-5) \cdot (-3) = 0 \quad \text{[on effectue le produit scalaire]}$$

$$\Leftrightarrow x - 3\,y + 17 = 0 \quad \text{[équation cartésienne]}$$

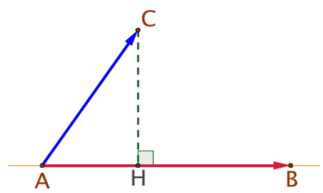
Méthode «Calculer l'angle entre deux droites du plan»

L'angle α entre les deux droites est donné par $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\|\vec{n_1}\| \|\vec{n_2}\|}$

Définition «projection orthogonale»

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Alors le **vecteur projection (orthogonale)** de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est le vecteur $\overrightarrow{AH}$



Remarque : le vecteur projection est toujours de direction égale à celle de $\vec{w}$, mais peut être de sens opposé si l'angle est obtus.

Théorème « Vecteur projection dans le plan »

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a:

☐ le vecteur projection (orthogonale) de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est $\overrightarrow{proj_w v}=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}$

☐ $\|\overrightarrow{proj_w v}\|=\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$, où α est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$

Voir les exercices 41 à 49

17 [A savoir] Distance point-droite dans le plan

Définitions «Distance point-droite et droite-droite»

☐ La **distance du point *P* à la droite *d*** est la distance de P à sa projection orthogonale P' sur d.

☐ La **distance de deux droites parallèles** est la distance d'un point de l'une de ces droites à l'autre.

Théorème « Distance entre un point et une droite du plan »

Si d est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax + by + c = 0$, $A(x_0; y_0)$ un point quelconque et δ la distance entre A et d, alors on a : $\delta=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Voir les exercices 50 à 51

18 [A savoir] Produit vectoriel

Définition

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

Le **produit vectoriel** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dans cet ordre, noté $\vec{u}\times\vec{v}$, est un vecteur :

☐ de direction perpendiculaire à celle de de $\vec{u}$ et à celle de $\vec{v}$;

☐ de sens donné par la "règle du tire-bouchon" (aussi appelée « règle de la main droite » ou « règle du tournevis ») ;

☐ de norme (longueur) égale à $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\alpha)$, où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ce qu'on peut aussi écrire
$\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\alpha)$.

Remarque : le produit vectoriel est une opération qui à deux vecteurs de l'espace associe un troisième vecteur de l'espace alors que le produit scalaire associe à deux vecteurs du plan ou de l'espace un nombre réel (scalaire).

Le produit vectoriel est utilisé en électro-magnétisme (une antenne émet une onde électro-magnétique qui transporte de l'énergie selon un vecteur qui à une constante près est égal au produit vectoriel du champ électrique et du champ magnétique, le moteur électrique d'une voiture fonctionne grâce à la force magnétique qui est donnée par un produit vectoriel), en géométrie (le produit vectoriel intervient dans le calcul de l'aire du parallélogramme et dans celui du volume du parallélépipède), en physique des fluides (le vecteur tourbillon est donné par un produit vectoriel), en physique mécanique (un moment de force est donné par un produit vectoriel), ... C'est donc une notion très importante en physique. Nous nous contenterons ici d'en parler du point de vue de la géométrie vectorielle.

Propriétés du produit vectoriel

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a:

1 $\vec{v} \, x \, \vec{w} = -(\vec{w} \, x \, \vec{v})$

2 $\vec{u} \, x \, (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \, x \, \vec{v}) + (\vec{u} \, x \, \vec{w})$

3 $\lambda (\vec{v} \, x \, \vec{w}) = (\lambda \vec{v}) \, x \, \vec{w} = \vec{v} \, x \, (\lambda \vec{w})$

4 $\vec{v} \, x \, \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \lambda \vec{w}$

Théorème « Produit vectoriel en composantes»

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Alors on a: $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ -(u_1 v_3 - u_3 v_1) \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$

Exemple : calculer le produit vectoriel de $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 - (-7) \cdot (-2) \\ -[4 \cdot 3 - (-7) \cdot 1] \\ 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -19 \\ -13 \end{pmatrix}$$

Voir les exercices 52 à 55

19 [A savoir] Applications des produits dans l'espace

Théorème «Aire du parallélogramme»

Soit $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs de l'espace. Alors on a:

$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ = aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Remarque : on peut ainsi facilement calculer l'aire du triangle formé par trois points A, B et C ; c'est la moitié de l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Méthode «Tester la coplanéarité de trois vecteurs»

Pour déterminer si trois vecteurs de l'espace sont coplanaires ou non, on commence par vérifier qu'aucun ne sont colinéaires. Ensuite, on calcule le produit vectoriel de deux d'entre-eux, puis le produit scalaire de ce résultat avec le 3^e vecteur; si ce dernier produit est nul, les trois vecteurs sont coplanaires, sinon ils ne le sont pas

Remarque : cette notion sera formalisée plus loin avec le produit mixte)

Vecteur projection dans l'espace

La définition et le théorème « Vecteur projection » restent valables dans l'espace.

Théorème «Vecteur normal et équation de plan»

☐ Si Π est un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π .

☐ Si Π est un plan contenant le point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à Π , alors une **équation vectorielle** de Π est donnée par $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$, où $P(x ; y ; z)$ est un point quelconque du plan ; en effectuant le produit scalaire, on obtient directement une **équation cartésienne** de Π : $ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0$

Méthode «Déterminer une équation cartésienne d'un plan avec un vecteur normal»

Déterminer l'équation cartésienne d'un plan de l'espace est donc simple si on dispose d'un point du plan et d'un vecteur normal au plan ; celui-ci peut être le produit vectoriel de deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

Exemple : déterminer une équation cartésienne du plan Π passant par A(1;-3;0)et de vecteurs directeurs $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

remarque : $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires ; on calcule $\vec{v}\times\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$P=(x ; y ; z)\in\Pi\Leftrightarrow\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+3\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=0$, équation vectorielle

$\Leftrightarrow(x-1)\cdot1+(y+3)\cdot(-1)+z\cdot1=0$ [on effectue le produit scalaire]

$\Leftrightarrow x-y+z-4=0$, équation cartésienne

Voir les exercices 56 à 68

20 [A savoir] Distances dans l'espace

Définitions «Distances dans l'espace»

☐ La **distance du point *P* à un plan** Π est la distance de P à sa projection orthogonale P' sur Π .

☐ La **distance entre deux plans parallèles** est la distance d'un point de l'un de ces plans à l'autre.

Théorème «Distance entre un point et un plan de l'espace»

Si Π est un plan de l'espace, $\vec{n}$ un vecteur normal à Π, B un point de Π et A un point quelconque, alors δ la distance entre A et Π, alors on a :

$$\delta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}|}{\|\vec{n}\|}$$

Si Π est un plan de l'espace d'équation (cartésienne) $ax+by+cz+d=0$, $A(x_0;y_0;z_0)$ un point quelconque de Π et δ la distance entre A et Π, alors on a :

$$\delta=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Méthode «Distance entre deux plans (parallèles)»

Pour calculer la distance entre deux plans parallèles, il suffit de trouver un point d'un des plans et de calculer la distance entre ce point et l'autre plan.

Méthode «Distance entre un point et une droite dans l'espace»

Pour calculer la distance entre un point et une droite dans l'espace, il suffit de :
- □ déterminer l'équation du plan qui contient le point et qui est perpendiculaire à la droite ;
- □ déterminer le point d'intersection de ce plan et de la droite ;
- □ calculer la distance entre ce point d'intersection et le point donné au départ.

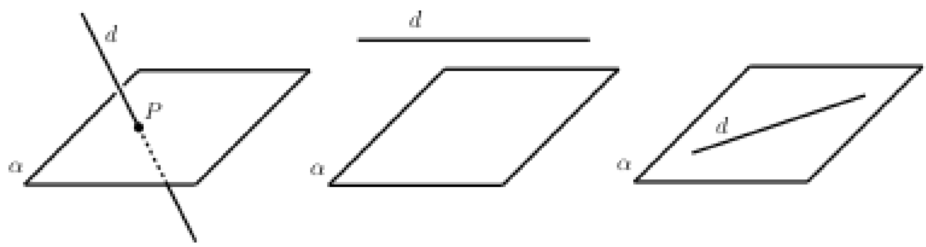
Théorème «Distance entre un point et une droite dans l'espace»

Si d est une droite de l'espace qui contient B et C et A un point quelconque. Alors δ la distance entre A et d est donnée par $\delta=\frac{\|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|}$

Voir les exercices 69 à 74

21 [A savoir] Intersection d'une droite et d'un plan

Trois situations sont possibles lorsqu'on cherche à déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan dans l'espace ; cette intersection est un point, elle est vide ou c'est la droite elle-même (la droite appartient au plan) :



Exemple : déterminer l'intersection entre la droite d d'équations $\begin{cases} x+2 = 3\lambda \\ y+1 = \lambda \\ z-4 = -2\lambda \end{cases}$ d : ... et le plan Π d'équation $x+2y-5z+9=0$.

Cela revient à considérer un système de 4 équations à 4 inconnues.

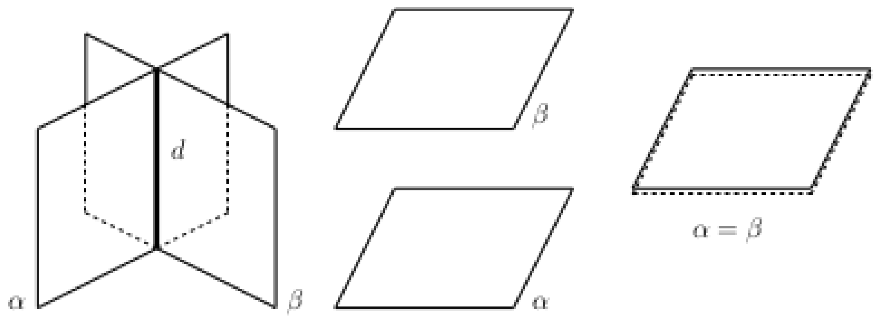
On récrit le système : $\begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 4-2\lambda \end{cases}$ puis on substitue dans l'équation du plan pour obtenir : $(-2+3\lambda)+2(-1+\lambda)-5(4-2\lambda)+9=0$

c'est-à-dire : $\lambda=1$

On revient aux équations de la droite et on remplace $\lambda=1$: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$, d'où $P(1;0;2)$ est le point d'intersection recherché.

22 [A savoir] Intersection de deux plans

Trois situations sont possibles lorsqu'on cherche à déterminer l'intersection de deux plans dans l'espace ; cette intersection est une droite, est vide ou c'est le plan lui-même (les deux plans sont confondus) :



Méthode «Intersection de deux plans»

Pour déterminer **l'intersection de deux plans dans l'espace**, on peut commencer par identifier deux vecteurs normaux à ces plans :

☐ si ils sont colinéaires et que les équations cartésiennes des plans sont équivalentes, les deux plans sont confondus et l'intersection est donnée par l'ensemble des points du plan ;

☐ si ils sont colinéaires et que les équations cartésiennes des plans ne sont pas équivalentes, les deux plans sont parallèles et l'intersection est vide ;

☐ si ils ne sont pas colinéaires, les deux plans s'intersectent en une droite de l'espace ; l'intersection est donc donnée par les deux équations de plan qui donnent cette droite.

23 [A savoir] Intersection de trois plans

Méthode «Intersection de trois plans»

Pour déterminer **l'intersection de trois plans dans l'espace** dont on connaît les équations, on peut commencer par identifier trois vecteurs normaux à ces plans :

si ces trois vecteurs sont tous colinéaires :

- ☐ si les équations cartésiennes sont toutes équivalentes, les trois plans sont confondus et l'intersection est donnée par l'ensemble des points du plan ;
- ☐ si les équations cartésiennes ne sont pas toutes équivalentes, au moins un plan est parallèle à un autre ; l'intersection des trois plans est vide ;

si deux de ces trois vecteurs sont colinéaires :

- ☐ il faut déterminer si les deux plans concernés sont confondus [le problème revient alors à étudier l'intersection de ce plan avec le troisième], ou parallèles [l'intersection est alors vide] ;

si ces trois vecteurs sont tous non colinéaires deux-à-deux :

- ☐ si les trois vecteurs sont coplanaires : soit les trois plans n'ont pas d'intersection («en triangle»), soit l'intersection des trois plans est est une droite ;
- ☐ si les trois vecteurs ne sont pas coplanaires, les trois plans ont un unique point d'intersection ; ce point est obtenu en résolvant le système d'équations 3x3.

Voir les exercices 75 à 77

24 [Aller plus loin] Produit mixte

Définition

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Leur **produit mixte** est le nombre réel $(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{w}$.
On le note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Propriétés du produit mixte

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Alors on a:

1 $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ est égal au volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

2 $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]=0 \Leftrightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires

Méthode «Coplanéarité de trois vecteurs»

Pour tester la coplanéarité de trois vecteurs, il suffit de vérifier si leur produit mixte est nul ou non.

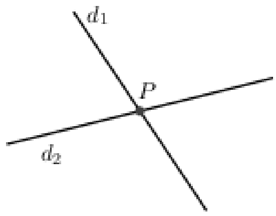
Théorème «Distance entre un point et un plan de l'espace»

Si Π est un plan de l'espace contenant A, B et C et P un point quelconque qui n'appartient pas à Π , alors δ la distance entre P et Π est:

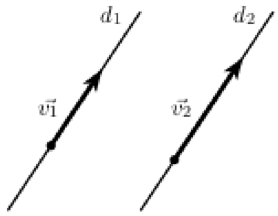
$$\delta=\frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}]|}{\|\overrightarrow{AB}\, x\, \overrightarrow{AC}\|}$$

25 [Aller plus loin] Position relative de deux droites de l'espace

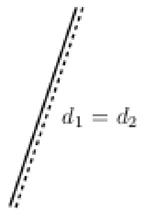
Quatre situations sont possibles lorsqu'on cherche à déterminer les positions relatives de deux droites de l'espace l'une par rapport à l'autre ; cette intersection est un point (les droites sont sécantes), elle est vide (les droites sont parallèles ou gauches ou est une droite (les deux droites sont confondues) :



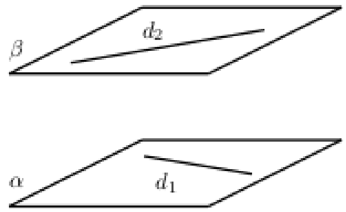
droites sécantes



droites strictement parallèles



droites confondues



droites gauches

Méthode «Position relative de deux droites»

Pour déterminer **la position relative de deux droites dans l'espace**, on peut commencer par identifier deux vecteurs directeurs de ces droites :

si les deux vecteurs sont colinéaires :

☐ si un point d'une droite n'appartient pas à l'autre droite, les deux droites sont **strictement parallèles**, et $d_1 \cap d_2 = \emptyset$;

☐ si un point d'une droite appartient à l'autre droite, les deux droites sont **confondues**, et $d_1 \cap d_2 = d_1 = d_2$;

si les deux vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires :

☐ si les deux vecteurs directeurs et un vecteur qui relie un point de chaque droite sont coplanaires, les deux droites sont **sécantes** et ont un unique point d'intersection, $d_1 \cap d_2 = \{I\}$, qu'on détermine en résolvant un système d'équations ;

☐ si les deux vecteurs directeurs et un vecteur qui relie un point de chaque droite ne sont pas coplanaires, les deux droites sont dites **gauches**, et $d_1 \cap d_2 = \emptyset$.

Théorème «Distance entre deux droites gauches de l'espace»

Soit d_1 passant par P_1 et de vecteur directeur $\vec{v_1}$ et d_2 passant par P_2 et de vecteur directeur $\vec{v_3}$, alors δ la distance entre d_1 et d_2 est:

$$\delta = \frac{|[\vec{v_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1 P_2}]|}{\|\vec{v_1} x \vec{v_2}\|}$$

Voir les exercices 78 à 82

26 [Souvenirs] Cercles

Définition «Cercle»

Le cercle Γ de centre C_0 et de rayon r est l'ensemble du plan des points situés à égale distance r de C_0.

Théorème «Equation du cercle»

L'équation du cercle Γ de centre $C_0=(x_0;y_0)$ et de rayon r est donnée par $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

27 [A savoir] Sphères

Définition «Sphère»

La sphère Σ de centre C_0 et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à égale distance r de C_0.

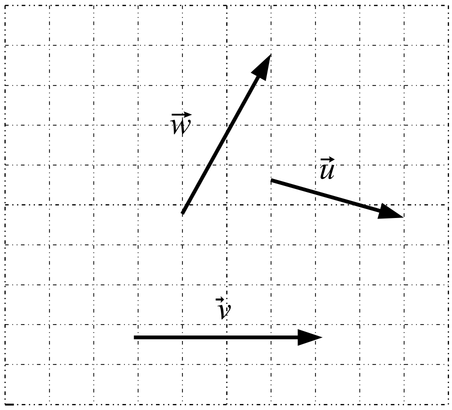
Théorème «Equation de la sphère»

L'équation de la sphère Σ de centre $C_0=(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon r est donnée par $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

Voir les exercices 83 à 92

Vecteurs

1 On considère les vecteurs ci-dessous:



Les reporter sur une feuille (en conservant direction, sens et norme, puis représenter:

a. $\vec{v}+\vec{w}$

b. $\vec{u}+\vec{w}$

c. $3\vec{v}$

d. $4\vec{w}$

e. $\vec{v}-\vec{w}$

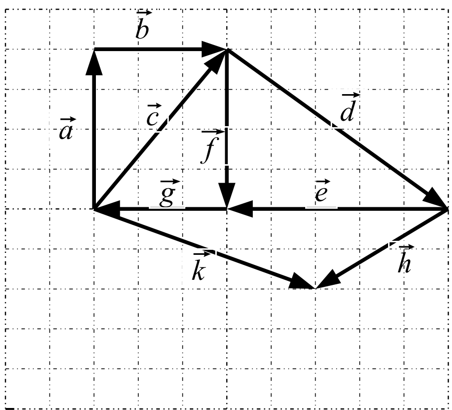
f. $\vec{w}-\vec{v}$

g. $3(\vec{v}+\vec{u})-2\vec{w}$

h. $2\vec{u}-3\vec{v}+\vec{w}$

2 Reprendre les vecteurs de l'exercice précédent et procéder de même avec une feuille non quadrillée en utilisant règle , équerre et un compas pour reporter les distances, pour **a.** à **f.**

3 On considère les vecteurs suivants :



a. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}+\vec{b}=\vec{f}$?

b. Que vaut $\vec{x}$, sachant que $\vec{x}-\vec{d}=\vec{e}$?

c. Que vaut $\vec{x}$, si $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{f}+\vec{g}$?

d. Que vaut $\vec{x}$, si $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}+\vec{h}$?

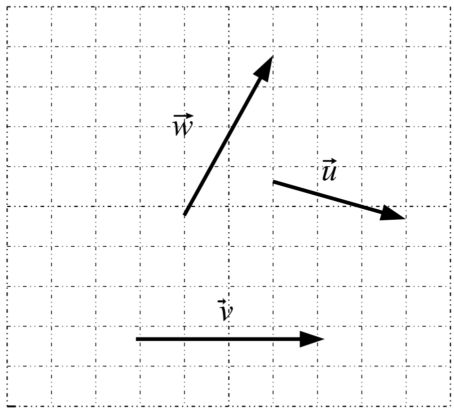
4 On suppose $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, avec $\|\vec{a}\|=5$ et $\|\vec{b}\|=3$. Quelles sont les valeurs possibles pour λ ?

5 Montrer que si A,B et C sont trois points du plan, alors on a: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

Voir la théorie 1 à 9

Colinéarité, combinaisons linéaires

6 On considère les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{u}$ ci-dessous:



a. Représenter $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$ et donner approximativement les valeurs de μ et λ tels que $\vec{v}=\mu\vec{u}+\lambda\vec{w}$.

b. Ecrire $\vec{w}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{u}$ et donner approximativement les valeurs de μ' et λ' tels que $\vec{w}=\mu'\vec{v}+\lambda'\vec{u}$.

7 Reprendre la situation de l'exercice 3. et exprimer :

a. $\vec{f}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$

b. $\vec{f}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{g}$

c. $\vec{c}$ comme comb. linéaire de $\vec{d},\vec{e},\vec{g}$ et $\vec{f}$

d. $\vec{g}$ comme comb. linéaire de $\vec{e},\vec{h}$ et $\vec{k}$

8 Reprendre la situation de l'exercice 3. et exprimer approximativement, lorsque cela est possible :

a. $\vec{f}$ comme combinaison linéaire de $\vec{d}$ et $\vec{c}$

b. $\vec{h}$ comme combinaison linéaire de $\vec{e}$ et $\vec{g}$

c. $\vec{c}$ comme comb. linéaire de $\vec{d}$, $\vec{e}$ et $\vec{g}$.

Y a-t-il parfois plusieurs possibilités ?

9 Soient A,B,C,D et E des points du plan. Simplifier au maximum les expressions suivantes (il n'est pas nécessaire de faire de dessin!):

a. $\vec{a}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}$

b. $\vec{b}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$

c. $\vec{c}=\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$

d. $\vec{d}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DB}$

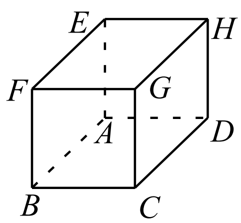
e. $\vec{e}=87\overrightarrow{AC}+82\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{AD}$

10 Choisir quatre points A,B,C et D du plan tels que le quadrilatère $ABCD$ soit un carré, puis considérer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ définis par $\vec{a}$ = $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{b}$ = $\overrightarrow{AC}$. Ecrire chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $2\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ sous la forme d'une combinaison des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

11 Soit C un point du plan situé au tiers (à partir de A) d'un segment $[AB]$ et O un point extérieur à ce segment.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OC}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

12 $ACCDEFGH$ est un cube.



a. Exprimer $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{CE}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

b. Quelles sont les normes de ces vecteurs si celles de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ valent 1 ?

Voir la théorie 10

Les vecteurs pour démontrer

13 Démontrer le théorème suivant :

Soit A, B et C, trois points quelconques non alignés, et soit Q et P les points milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$, alors on a: $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{QP}$

14

a Soient ABCD un parallélogramme, E le point milieu de [AB] et F le point milieu de [CD]. Démontrer que AECF est aussi un parallélogramme.

b Théorème de Varignon : montrer que c'est également vrai pour un quadrilatère quelconque $ABCD$!

15 Soient ABC un triangle, A' le point milieu de $[BC]$ et B' le point milieu de $[AC]$, $d_{AA'}$ la médiane de ABC issue de A et $d_{BB'}$ la médiane de ABC issue de B, et soit enfin P l'intersection de $d_{AA'}$ et $d_{BB'}$. Démontrer que P est situé au deux-tiers de $[AA']$ et $[BB']$.

16 Prouver que les médianes d'un triangle quelconque ΔABC se coupent en un unique point.

Voir la théorie 11

Vecteurs en composantes

17 Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ deux vecteurs $\mathbb{R}^2$.
Déterminer algébriquement:

a. $\Vert\vec{v}\Vert$	**f.** $2\vec{v}$	**j.** $\Vert\vec{v}-\vec{w}\Vert$
b. $\Vert\vec{w}\Vert$	**g.** $\Vert\vec{2v}\Vert$	**k.** $\Vert\vec{v}\Vert+\Vert\vec{w}\Vert$
c. $\vec{v}+\vec{w}$	**h.** $\Vert\vec{w}+\vec{v}\Vert$	**l.** $\Vert\vec{v}\Vert$ - $\Vert\vec{w}\Vert$
d. $\vec{v}-\vec{w}$	**i.** $\Vert\vec{w}-\vec{v}\Vert$	**m.** $2\vec{v}-3\vec{w}$
e. $\vec{w}-\vec{v}$		

18 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un graphique et par calcul algébrique:

a. Est-ce que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$?

b. Est-ce que $\vec{u}$ est combinaison linéaire de

$\vec{a}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$?

c. Quels sont tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{d}$?

d. Montrer que tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire d'une unique manière comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

19 Soit $\vec{a}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{c}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{d}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. En utilisant une approche graphique, puis algébrique, écrire $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de :

a. $\vec{b}$ et $\vec{c}$ **b.** $\vec{a}$ et $\vec{c}$ **c.** $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

20 Déterminer un vecteur du plan dont la norme soit égale à 4 et dont la 1re composante soit deux fois plus grande que la 2e.

21 Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Déterminer un vecteur unité ayant même direction que $\vec{v}$. Y a-t-il plusieurs possibilités?

22 Soient $O(0;0;0)$, $A(1;2;-3)$, $B(2;4;5)$ et $C(0;0;-11)$ trois points de $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminer les composantes du vecteur $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$

b. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$

c. Les points O, A et B sont-ils alignés?

d. Les points A, B et C sont-ils alignés?

23 Soit $\vec{a}\begin{pmatrix}6\\0\\3,5\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

a. Le vecteur $\vec{a}$ est-il combinaison linéaire des deux autres ?

b. Le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de ces trois vecteurs ?

24 Soient $A(3;-1;2)$, $B(4;4;-1)$, $C(8;5;-6)$ et $D(7;0-3)$ quatre points de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

b. Calculer les coordonnées du point commun aux deux diagonales de ce parallélogramme.

25 Soient $A(2;1;1)$, $B(3;2;-1)$ et $C(4;3;2)$ trois points de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées d'un point $D\in\mathbb{R}^3$ tel que A, B, C et D soient les sommets d'un parallélogramme. S'il y a plusieurs solutions, les donner toutes.

26 Soient $A(-1;0;1)$ et $B(11;6;-5)$, deux points de $\mathbb{R}^3$.

a. Vérifier si les points $Q(23;12;-10)$, $R(7;4;-3)$ et $T(-21;-10;11)$ sont ou non sur la droite d_{AB}

b. Lequel des trois fait partie de $[AB]$?

27 On considère les points $A(-3;1)$, $B(1\,;3)$, $C(4;1)$ et $D(2;0)$. Que peut-on dire des droites d_{AB} et d_{CD} ? Conjecturer et démontrer.

28 On considère les points $A(-3;1;7)$, $B(1\,;3\,;-5)$, $C(4;1;0)$ et $D(x;0;z)$. Déterminer x et z pour que les droites d_{AB} et d_{CD} soient parallèles.

Voir la théorie 12 à 13

Equations vectorielles

29 Déterminer les équations vectorielle, paramétrique et cartésienne de la droite droite d passant par le point $A(0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

30 Déterminer les équations vectorielle, paramétrique et cartésienne de la droite droite d passant par le point $A(0;1)$ et $B(-2;1)$.

31 Dans chacun des cas suivants, établir l'équation vectorielle puis une équation cartésienne du plan passant par A, B et C :

a. $A(12;-5;-3), B(3;2;1/2), C(0;0;-7)$

b. $A(2;0;-2), B(3;4;1), C(-1;-1;0)$

c. $A(4;5;6), B(3;5;7), C(10;5;1)$

d. $A(-3;2;5), B(3;-4;20), C(0;0;10)$

Exercices d'entraînement

32 Déterminer les équations de la droite droite d passant par le point $A(-2\,;1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

33 Déterminer les équations de la droite droite d passant par les points $A(0\,;1\,;0)$ et $B(-2\,;1\,;3)$.

34 On donne l'équation vectorielle de la droite $d:\begin{pmatrix}x-5\\y-2\\z-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$. Les points A(6;−10;−8), B(3;8;9) et C(6;−1;0) appartiennent-ils à d ?

35 Soit $d:\begin{pmatrix}x-6\\y-14\\z+3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ une équation vectorielle d'une droite d.

a. À quels vecteurs d est-elle parallèle ?

b. Déterminer les coordonnées de deux points de d.

c. Déterminer le système d'équations paramétriques et les équations cartésiennes de d.

d. Calculer les coordonnées des points d'intersection de d avec les plans Oxy , Oxz et Oyz.

36 Un observateur se trouve situé au point (2;1;0), il regarde un objet posé au point (3;2;3). Un plan opaque passant par les points (0;0;8), (6;0;0) et (6;3;0) est construit. Est-ce que notre observateur verra l'objet après sa construction ? Justifier.

37 On considère le plan qui passe par $A(1\,;3\,;-2), B(3\,;-1\,;2), C(0\,;-5\,;4)$. Déterminer une droite qui ne coupe pas ce plan.

Voir la théorie 14

Produit scalaire

38 Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Calculer:

a. $\vec{v}\cdot\vec{w}$ **c.** $\vec{v}\cdot\vec{v}$ **e.** $\|\vec{v}\|$

b. $\vec{w}\cdot\vec{v}$ **d.** $\vec{w}\cdot\vec{w}$ **f.** $\|\vec{w}\|$

39 Les égalités suivantes sont-elles toujours vraies ? Justifier chaque réponse.

a. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ **d.** $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\alpha\,\vec{b}\cdot\alpha\,\vec{a}$

b. $\vec{a}\cdot\vec{0}=\vec{0}$ **e.** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

c. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|a\|^2$

40 Calculer le produit scalaire et l'angle entre les vecteur dans les cas suivants:

a. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

b. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **d.** $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}$

Voir la théorie 15

Applications dans le plan

41 Placer sur une feuille deux points distincts, A et B, puis représenter l'ensemble des points P de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la propriété :

a. $\vec{AB}\cdot\vec{AP}=\vec{0}$ **c.** $\vec{PA}\cdot\vec{PB}=\vec{0}$

b. $\vec{BA}\cdot\vec{BP}=\overline{AB}^{\,2}$

42 Soient A(0;13), B(15;8), C(9;-7) et D(-6;-2), quatre points de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

43 Démontrer que si un angle est inscrit dans un demi-cercle, alors il est droit (théorème «Cercle de Thalès»).

44 Soient $A(5\,;2)$. $B(x\,;1)$ et $C(3\,;4)$. Déterminer x pour que le triangle ΔABC soit rectangle en C.

45 Trouver les équations vectorielles et cartésiennes des droites suivantes:

a. d_1 passe par les points A(3;-5) et B(-4;2)

b. d_2 est parallèle à d_1 et passe par le point C(3;-1), où d_1 est la droite du point **a.**

c. d_3 est perpendiculaire à d_1 et passe par le point D(1;1).

46 Déterminer les composantes et la norme du vecteur projection de $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ sur $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

47 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer si les deux droites sont parallèles ou perpendiculaires :

a. $d_1 :\ x - 4y = 5$

$d_2 :\ 4x + y = 5$

b. $d_1 :\ \frac{x-3}{9}=\frac{y+2}{6}$

$d_2 :\ 2x - 3y = 12$

48 Soient les deux droites d'équations d_1 : $3x + 2y = 1$ et d_2 :$4x - y = 5$. Calculer les angles définis par ces deux droites.

49 Soient d_1 : $2x - y - 5 = 0$ et d_2 : $m_1 x + m_2 y + 3 = 0$ (m_1 non nul) deux droites du plan. Quelles valeurs peut-on donner aux paramètres m_1 et m_2 pour que :

a. d_1 soit perpendiculaire à d_2 ?

b. d_1 soit parallèle à d_2 ?

Voir la théorie 16

Distance point-droite dans le plan

50 Soit d la droite passant par $A(1;2)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $-2x + 3y = 1$. Calculer la distance entre d et le point $P(4;1)$.

51 Soit d la droite passant par les points $A(-3;2)$ et $B(5;1)$.

a. Calculer les coordonnées des points de d situés à une distance de 13 de l'origine.

b. Calculer les coordonnées du point de d le plus proche de l'origine du repère. En déduire la distance entre d et l'origine.

Voir la théorie 17

Produit vectoriel

52 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

Calculer $\vec{u}\times\vec{v}$, $\vec{v}\times\vec{u}$, $\vec{w}\times\vec{v}$ et $\vec{w}\times\vec{u}$.
Interpréter géométriquement les résultats.

53 Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

54 Pour chacun des énoncé ci-dessous, déterminer s'il est vrai ou faux (justifier). Corriger les énoncés faux de manière à en faire des énoncés vrais ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont des vecteurs quelconques de l'espace et λ est un scalaire quelconque) :

a. $\vec{u}\, x\, \vec{v}=\vec{v}\, x\, \vec{u}$

b. Si $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires non nuls, alors $\vec{u}\, x\, \vec{v}=\vec{0}$

c. Si $\vec{u}\, x\, \vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires

d. $(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{u}=(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{v}$

e. $(\vec{u}\, x\, \vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\, x\, \vec{w}$

f. $(\lambda\vec{u})\, x\,(\lambda\vec{v})=\lambda(\vec{v}\, x\, \vec{w})$

55 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

a. Déterminer un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b. Déterminer un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Voir la théorie 18

Applications dans l'espace

56 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

57 Soit A(2;1;-3) et B(-1;3;1) deux points de l'espace. Déterminer un point C situé sur l'axe Oz et tel que le triangle ΔABC soit rectangle en A.

58

a. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(2;1;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

b. Déterminer un vecteur normal au plan Π d'équation cartésienne $2x-4z=3$

Exercices d'entraînement

59 Déterminer l'équation cartésienne du plan Π perpendiculaire au plan Π' d'équation $2x-y+z=3$ et passant par les points $A(1;1;0)$ et $B(2;1;1)$.

60 Déterminer l'équation du plan Π médiateur du segment d'extrémités $[AB]$ $A(0;1;-2)$ et $B(2;1;0)$.

61 Les points $A(-1;2;3)$ et $B(0;-1;2)$ sont-ils situés du même côté du plan Π passant par l'origine et les points $C(3;1;-4)$ et $D(0;2;5)$?

62 Soient $A(-1;-1;0)$, $B(2;3;-1)$ et $C(-2;-2;0)$. Calculer les longueurs des côtés, les angles et l'aire de ΔABC .

63 Soient $A(2;1;-3)$, $B(-1;3;1)$. Déterminer C appartenant à l'axe Ox tel que le triangle ΔABC soit rectangle en A.

64 Déterminer l'équation cartésienne du plan Π contenant $P(4;2;1)$ et

$$d:\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}.$$

65 Démontrer à l'aide du produit vectoriel que si les diagonales d'un parallélogramme sont utilisées en tant que vecteurs comme côtés d'un autre parallélogramme, alors l'aire du second parallélogramme est le double du celle du premier.

66 Soient d_1 et d_2 deux droites et Π_1 et Π_2 deux plans dans l'espace. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

a. Si p est parallèle à d_2 et d_2 est parallèle à Π_1, alors p est parallèle à Π_1.
b. Si Π_1 est parallèle à d_1 et Π_2 est parallèle à d_1, alors Π_1 est parallèle à Π_2.
c. Si Π_1 est parallèle à d_1 et Π_1 est parallèle à Π_2, alors d_1 est parallèle à Π_2.
d. Si d_1 est parallèle à Π_1 et d_2 est parallèle à Π_1, alors d_1 est parallèle à d_2.

67 Déterminer les paramètres m et k pour que les plans Π_1 : $3x-y+kz-9=0$ et Π_2 : $2x+my+5z+7=0$ soient parallèles.

68 On considère les plans Π_1 : $2x-y+3z-1=0$ et Π_2 : $x+2y+z=0$. Déterminer l'équation du plan Π_3 qui passe par l'origine et tel que $\Pi_3\perp\Pi_1$ et $\Pi_3\perp\Pi_2$.

Voir la théorie 19

Distances dans l'espace

69 Soit $P(-2;1;3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$.

a. Déterminer l'équation cartésienne du plan Π passant par P et perpendiculaire à $\vec{n}$.

b. Calculer la distance de Π à l'origine.

c. Calculer la distance de Π au point $A(2;1;3)$.

70 Soit Π' d'équation $3x+5y-7z=11$, et soit le point $A(2;-3;5)$.

a. Établir l'équation du plan Π'' parallèle au plan Π' et contenant le point A.

b. Calculer la distance qui sépare Π' de A.

71 Calculer la distance entre la droite d d'équations $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=z-5$ et le point $P(3;-12;-4)$, puis calculer les coordonnées du point de d réalisant cette distance.

72 Utiliser le produit vectoriel pour calculer la distance du point $C(5;-2)$ à la droite passant par les points $A(-5;1)$ et $B(-2;7)$.

73 Calculer la distance du point $A(-1;0;1)$ à la droite perpendiculaire au plan d'équation $x-y+z=3$ et passant par l'origine.

74

a. Calculer la distance entre la droite passant par $A(1;-2;3)$ et $B(2;0;1)$ et le point $C(2;0;0)$.

b. Calculer la distance entre la droite passant par $A(1;-2;3)$ et $B(2;0;1)$ et la droite d'équation $d:\begin{pmatrix}x-2\\y-1\\z-3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Voir la théorie 20

Intersections

75 $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-6\\6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

76 Déterminer l'intersection des plans d'équations suivants :

a. $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 5$ et $-3x - 3y -3z = 0$

b. $x + y + z = 0$, $x + 2y + 2z = 5$ et $- x + y - z = 0$

c. $x + y + z = 0$, $x + 2y = 5$ et $y - z = 0$

d. $x + y + z = 0$, $x + 2y = 5$ et $y - z = 5$

e. $x + y + z = 0$, $x + 2y + z = 5$ et $- x - y - z = 0$

f. $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 0$ et $- x - y - z = 0$

77 Déterminer l'intersection de la droite d avec le plan Π si :

a. $d:\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z+2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\Pi: 2x - y + 3z + 1 = 0$

b. $d:\begin{pmatrix} x-3 \\ y-5 \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\Pi: 2x - y + 3z + 5 = 0$

c. $d:\begin{pmatrix} x+4 \\ y-8 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\Pi: 2x + 3y - z + 5 = 0$

Voir la théorie 21 à 23

Produit mixte

78 On considère le tétraèdre de sommets $A(2;3;1)$, $B(4;1;2)$, $C(6;3;7)$ et $D(-5;-4;8)$.

Calculer:

a. Le volume de ce tétraèdre.

b. La longueur de la hauteur du tétraèdre issue du sommet D.

c. L'angle BAC.

d. L'angle aigu formé par les faces ABC et ABD.

79 Les droites d_1 passant par A_1 et B_1 et d_2 B_1 passant par A_2 et B_2 sont-elles sécantes, confondues, strictement parallèles ou gauches ? Dans le cas où elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection, sinon calculer la distance entre les deux droites.

a. $A_1(1;0;1)$, $B_1(10;6;4)$ et $A_2(0;2;2)$, $B_2(4;2;2)$

b. $A_1(-4;2;1)$, $B_1(-1;1;3)$ et $A_2(0;5;-2)$, $B_2(9; 2 ;4)$

c. $A_1(8;0;3)$, $B_1(-2; 4;1)$ et $A_2(8;3;-2)$, $B_2(0; 0;5)$

d. $A_1(2;-3;1)$, B_1 $(3;-2; 3)$ et $A_2(0;-5;-3)$, $B_2(5;0;7)$

80 On considère les deux droites d_1 et d_2 données par leurs équations paramétriques:

$$d_1:\begin{pmatrix} x-16 \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } d_2:\begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z+27 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer la plus courte distance entre ces deux droites.

b. Déterminer les équations paramétriques de la perpendiculaire commune aux deux droites.

c. Soit A le point de la droite d_1 dont l'abscisse est -2. Calculer la distance du point A à la droite d_2 .

81 On considère deux droites d_1 et d_2 d'équations $d_1: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = z-2$ et $d_2: \frac{x}{3} = \frac{-y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}$.

a. Justifier pourquoi ces deux droites sont gauches.

b. Trouver une équation cartésienne d'un plan Π_1 parallèle à chacune des droites d_1 et d_2.

c. Trouver une équation cartésienne d'un plan Π_2 parallèle à Π_1 .

d. Calculer la distance entre d_1 et d_2.

82 On considère la droite d_1 passant par $A(2;1;1)$ de vecteur directeur $\vec{d_1}\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m-1 \end{pmatrix}$ ainsi que la droite d_2 passant par $B(-5;2;-7)$ de vecteur directeur $\vec{d_2}\begin{pmatrix} 2-m \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Étudier les positions relatives des droites d_1 et d_2 en fonction de m.

Voir la théorie 24 à 25

Exercices d'entraînement

Cercles et sphères

83 Déterminer le centre et le rayon des cercles donnés par les équations suivantes :

a. $x^2+y^2-16=0$

b. $x^2+y^2-6y-16=0$

c. $x^2+y^2-10x+8y+5=0$

d. $x^2+y^2+6x-14y+50=0$

84 Déterminer l'équation du cercle passant par les points $P(-1;5)$, $Q(-2;-2)$ et $R(5;5)$.

85 On considère le cercle Γ d'équation $x^2+y^2-8x+2y+12=0$. Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ issues du point $P(9;4)$.

86 On considère les droites d_1 et d_2 données par les équations d_1 : $3x-4y+13=0$ et d_2 : $7x+24y-103=0$. Calculer les coordonnées du centre C du cercle de rayon 5, tangent aux deux droites d_1 et d_2 et situé tout entier dans le premier quadrant.

Indication : le centre du cercle se trouve sur l'une ou l'autre des bissectrices des droites d_1 et d_2. De plus on peut démontrer que deux droites sécantes d'équation $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$ ont pour bissectrices les deux droites d'équations

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

87 Déterminer l'équation de la sphère passant par les points $P(5;7;-2)$, $Q(3;1;0)$, $R(-5;12;3)$ et $S(-3;-2;-1)$.

88 Après avoir vérifié que le point $T(7;4;4)$ appartient à la sphère Σ d'équation Σ : $(x+3)^2+(y-15)^2+(z-2)^2=225$, déterminer l'équation du plan tangent à Σ au point T.

89 On considère la sphère Σ d'équation $\Sigma : x^2+y^2+z^2-4y+2z=20$.

a. Déterminer le centre et le rayon Σ.

b. Déterminer l'équation d'une droite tangente à Σ au point $T(3;6;-1)$.

c. Le point $A(4;3;2)$ est-il situé à l'intérieur ou à l'extérieur de Σ ?

90 Déterminer l'équation de la sphère de centre $C(4;1;-5)$ et tangente au plan Π d'équation Π: $x+2y+2z-4=0$.

91 Déterminer l'équation de la sphère centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation $d:\begin{pmatrix}x-3\\y-5\\z-5\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

92 On considère le plan Π_1 parallèle à l'axe Ox et passant par les points $A(0;2;0)$ et $B(1;0;2)$, ainsi que le plan Π_2 passant par le point P $(1;2;-2)$ et de vecteur normal $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

a. Déterminer les équations cartésiennes des plans Π_1 et Π_2.

b. Calculer l'angle aigu entre Π_1 et Π_2.

c. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre $C(1;0;0)$ et tangente au plan Π_1.

d. Déterminer les coordonnées du centre Q et le rayon r du cercle Γ d'intersection de la sphère Σ avec le plan Π_2.

e. Montrer que la droite d'intersection d des plans Π_1 et Π_2 est tangente au cercle Γ.

Voir la théorie 26 à 27

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

93 On considère un triangle quelconque ΔABC. A partir de cette première figure, on définit un nouveau triangle ΔEFG avec $\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{CA}$.

a. Faites une représentation de cette situation.

b. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FG}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On voit que $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{FG}$. Déterminer λ et μ.

94 Soit A, B, C et D quatre points du plan. Démontrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

95 On considère le parallélogramme $ABCD$ et on place les points E et F tels que $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$. Que dire des points C, E et F ? Proposer et démontrer une conjecture.

96 On considère le parallélogramme $ABCD$, E le milieu de $[AB]$ et F le point du segment $[ED]$ tel que $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$. Montrer que les points A, C et F sont alignés et préciser la position de F sur $[AC]$.

97 On considère O, A et B, trois points quelconques non-alignés. Soit P le point milieu de $[AB]$. Montrer que $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

98 Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

a. Ecrire approximativement $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en utilisant une démarche graphique.

b. Ecrire exactement $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en utilisant une démarche algébrique.

99 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\4\\-1\end{pmatrix}$. et $\vec{z}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$

a. Peut-on écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en utilisant une démarche graphique ?

b. Peut-on écrire $\vec{u}$ comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en utilisant une démarche algébrique ?

c. Mêmes questions avec $\vec{z}$.

100 On considère dans le plan les points A(31;-11) et B(52;13) .

a. Déterminer les coordonnées d'un point P tel que $\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$

b. Déterminer les coordonnées d'un point C tel que B se trouve au milieu du segment $[AC]$

101 Donner une équation vectorielle, un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne de la droite passant par A(-1;2) et B(2;1).

102 Les points A(1;-2;3) et B(2;0;1) et C(2;0;0) sont-ils alignés ?

103 Donner une équation vectorielle, un système d'équations paramétriques et une équation cartésienne du plan contenant les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et A(-1;0;1).

104 Donner une équation vectorielle, un système d'équations paramétriques et les équations cartésiennes de la droite passant par A(-1;0;1) et B(2;1;0).

105 La droite $\frac{x-1}{9}=\frac{y-6}{-4}=\frac{z-3}{-6}$ est-elle incluse dans le plan 2x – 3y + 5z = -1 ?

106 Définir l'intersection de la droite passant par A(1;-2;3) et B(2;0;1) et du plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et passant par l'origine.

107 Calculer, décrire et représenter l'intersection des plans suivants :

a. $\pi_1:3x-2y-z=4, \pi_2:5x-y+2z=4$ et $\pi_3:-2x+y-\frac{z}{3}=3$

b. $\pi_1:3x-2y-z=4, \pi_2:5x-2z=4$ et $\pi_3:-2x+3y=4$

c. $\pi_1:3x-2y-z=4, \pi_2:-x+y+z=1$ et $\pi_3:-2x+3y+4z=0$

d. $\pi_1:3x-2y-z=4, \pi_2:-x+y-z=1$ et $\pi_3:2x-y-2z=5$

e. $\pi_1:3x-2y-z=4, \pi_2:-x+y-z=1$ et $\pi_3:-x+2y-5z=3$

108 Soient A(-4;-21;5) , B(0;-7;1), C(12;-4;-3) et D(-3;2;0) quatre points de $\mathbb{R}^3$.

a. Trouver les systèmes d'équations paramétriques des droites d_{AB} et d_{CD} .

b. Calculer les coordonnées du point commun à d_{AB} et d_{CD} s'il existe.

c. Même exercice (questions a et b) avec les droites d_{AB} et d_{CE} , où E est le point de coordonnées (-3;2;1).

Exercices d'entraînement

109 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$. Calculer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

110 Déterminer l'angle entre les vecteurs :

a. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$.

111 Donner une équation cartésienne de la droite passant par A(-1;2) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

112 Dans le plan, calculer la distance à l'origine de la droite d'équation $2x–3y = 4$.

113 Calculer la distance du point A(-1;0;1) au plan d'équation $2x–3y+5z = 4$.

114 Calculer la distance du point A(-1;0;1) au plan de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ et passant par l'origine.

115 Soit d la droite par A(1;4) et B(1;0). Calculer les coordonnées des points P tels que $\delta(P\,;d)=13$.

116 Déterminer les équations cartésiennes de la droite passant par B(1;0;2) et orthogonale au plan $2x - 3y + 5z = -1$.

117 Les droites $d_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{3-z}{12}$ et $d_2: \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+6}{4}=\dfrac{27-z}{12}$ sont-elles :

a. parallèles ?

b. orthogonales ?

118 Calculer, dans chaque cas, la distance entre le point A et la droite d_{BC} , ainsi que les coordonnées du point P de d_{BC} réalisant cette distance.

a. A(1;1;7), B(2;-1;4), C(3;1;6)

b. A(1;2;2), B(-1;3;5), C(1;6;11)

119 Après avoir vérifié que les deux plans Π_1 : $10x+2y-2z-5 = 0$ et Π_1 : $5x+y-z-1 = 0$ sont parallèles, trouver la distance qui les sépare, puis calculer les coordonnées de deux points, un dans chaque plan, qui réalisent cette distance.

120 Calculer le volume du tétraèdre de sommets $A(-1; 2; 0)$, $B(2; 1; -3)$, $C(1; 0; 1)$ et $D(3; -2; 3)$.

121 On considère le triangle de sommets $A(1; 2; 3)$, $B(4; 4; 4)$ et $C(-5; 2; -1)$.

a. Trouver les équations des hauteurs issues de B et C.

b. Chercher le point commun entre ces deux hauteurs et appeler ce point H.

c. Vérifier que la hauteur issue de A passe bien par le point H.

122 On considère le plan Π d'équation Π : $6x-y-4z-12 = 0$ et la droite d passant par les points $A(0; 0; 2)$ et $B(2; 0; 5)$.

a. Montrer que d est parallèle à Π.

b. Calculer la distance qui sépare d de Π.

123 On considère deux droites d_1 et d_2 d'équations $d_1: \dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y-11}{3}=z-6$ et $d_2: \dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+6}{5}=\dfrac{z+17}{9}$

a. Trouver les équations de deux plans parallèles contenant chacun une des droites données.

b. Calculer la distance entre ces deux droites.

124 Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on considère les points A(0;4;-1), B(-2;4;-5), C(1;1 ;-5) et D(1;0;-4).

a. Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments [AB], [BC] et [AD].

b. Démontrer que ces trois plans ont un point commun I.

c. En déduire que I est le centre de la sphère Σ, circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Quel est le rayon de Σ ?

d. Déterminer une équation de la sphère Σ.

125 Déterminer l'intersection de la sphère Σ et du plan d'equation Π :

a. Σ : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ et Π : $2x + y + 2z - 3 = 0$

b. Σ : $(x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$ et Π : $x - 2y + z + 3 = 0$

c. Σ : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 29 = 0$ et Π : $x - y + z + 20 = 0$

REPONSES DES EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

93

c.

d. $\overrightarrow{AG}=0\cdot\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BC}=1\cdot\overrightarrow{AB}+(-1)\cdot\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{FG}=3\cdot\overrightarrow{AB}+(-2)\cdot\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AG}$ = $4/3\cdot\overrightarrow{AB}+2/3\cdot\overrightarrow{FG}$.

94

95

96

97

98

a. $\vec{u}\simeq(-2{,}2)\vec{v}+0{,}8\cdot\vec{w}$

b. $\vec{u}=(-11/6)\vec{v}+5/6\cdot\vec{w}$

c. ce n'est pas possible

99

a. compliqué...

b. impossible

c. impossible

100

a. $P(38\ ;-3)$

b. $C(73;37)$

101 $\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=3\lambda\\y-2=-\lambda\end{cases}$
$\Leftrightarrow x+3y-5=0$

102 non

$$\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-1\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=\lambda-2\mu\\y=2\lambda+\mu\\z-1=5\mu\end{cases}\Leftrightarrow 2x-y+Z+1=0$$

104 $\begin{cases}x+1=\lambda\\y=\lambda\\z-1=-\lambda\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{3}=y=-z+1$

105 oui

106 I=(0,5;-3;-4)

107

a. $I\approx$(0.86, -1.05, 0.68)

b. $\pi_1: 3x-2y-z=4, \pi_2: 5x-2z=4$ et $\pi_3: -2x+3y=4$

c. $\pi_1: 3x-2y-z=4, \pi_2: -x+y+z=1$ et $\pi_3: -2x+3y+4z=0$

d. $\pi_1: 3x-2y-z=4, \pi_2: -x+y-z=1$ et $\pi_3: 2x-y-2z=5$

e. $\pi_1: 3x-2y-z=4, \pi_2: -x+y-z=1$ *et* $\pi_3: -x+2y-5z=3$

108

a. d_{AB} : $\begin{cases}x+4=4\lambda\\y+21=14\lambda\\z-5=4\lambda\end{cases}$; d_{CD} : $\begin{cases}x-12=-15\lambda\\y+4=6\lambda\\z+3=3\lambda\end{cases}$

b. I=(2;0;-1) d_{CD}

c. d_{CE} : $\begin{cases}x-12=-15\lambda\\y+4=6\lambda\\z+3=4\lambda\end{cases}$; intersection vide

109 $\sqrt{35}$

110 $\alpha\simeq36{,}7°$ et $\beta=90°$

111 $-x+2y-5=0$

112 $4\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

113 $\dfrac{\sqrt{38}}{38}$

114 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

115 $P(14;y)$ et $P(-12;y)$ avec y qcq

116 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-2}{5}$

117 parallèles

118

a. $\sqrt{5}$ et $P(3;1;6)$ **b.** $\frac{\sqrt{77}}{3}$ et $P(1;9/7;11/7)$

119

a. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **b.** $B(5/18;1/18;-19/18)$

120

a. 2/3

b. $V=\frac{|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}|}{6}$

121

a. $h_B:\frac{x-4}{-6}=\frac{z-4}{-4}$ et $y=4$

$h_C:\frac{x+5}{3}=\frac{y-2}{2}=z+1$

b. $H(-2;4;0)$

c. ok ; $h_A:\frac{x-1}{6}=\frac{y-2}{148}=\frac{z-3}{-70}$

122

a.

b. $20\frac{\sqrt{53}}{53}$

123

a. $22x+21y-19z-7=0$ et
$22x+21y-19z-87=0$

b. $40\frac{\sqrt{1286}}{643}$

124

a. $x+2y+7=0$, $x-y+3=0$, $x-4y+3z=0$

b. $I(-1\ ;\ 2\ ;-3)$

c.

d. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

125

a. $\Sigma\cap\pi=\left\{\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)\right\}$

b. $\Sigma\cap\pi$ est le cercle de centre $C(2\ ;\ -3\ ;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$

c. $\Sigma\cap\pi=\emptyset$

« Les mathématiques ne sont une moindre immensité que la mer.»

Victor Hugo, artiste, écrivain, poète, romancier (1802 – 1885)

A savoir en fin de chapitre

Vecteurs, opérations

- ✔ notion de grandeur scalaire ou vectorielle ;
- ✔ notion de vecteur : direction, sens et longueur;
- ✔ égalité entre deux vecteurs ;
- ✔ opérations de base : addition, multiplication par un scalaire, soustraction ;
- ✔ vecteur entre deux points ;
- ✔ propriétés des vecteurs ;
- ✔ propriétés de la norme ;
- ✔ représenter graphiquement des vecteurs, effectuer des opérations entre eux de façon géométrique ;
- ✔ représenter graphiquement la somme, la différence de deux vecteurs du plan, le produit d'un vecteur du plan par un scalaire ;
- ✔ calculer la somme, la différence de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un scalaire ;

Voir la théorie 1 à 9 et les exercices 1 à 5

Colinéarité, combinaisons linéaires

- ✔ colinéarité ;
- ✔ combinaison linéaire de vecteurs ;
- ✔ déterminer – graphiquement et algébriquement - si un vecteur est ou pas combinaison linéaire de vecteurs donnés; si oui, déterminer cette combinaison linéaire ;

Voir la théorie 10 et les exercices 6 à 12

Les vecteurs pour démontrer

- ✔ démontrer des propriétés géométriques grâce aux vecteurs ;

Voir la théorie 11 et les exercices 13 à 16

Vecteurs en composantes

- ✔ coordonnées d'un vecteur dans un repère dans le plan, dans l'espace ;
- ✔ expression pour la norme ;
- ✔ vecteur unité ;
- ✔ déterminer le vecteur entre deux points ;
- ✔ calculer la norme d'un vecteur ;
- ✔ déterminer un vecteur unitaire colinéaire à un vecteur donné ;

Voir la théorie 12 à 13 et les exercices 17 à 28

Equations vectorielles

- ✔ vecteur directeur d'une droite
- ✔ équation vectorielle, paramétrique et cartésienne d'une droite du plan ;
- ✔ vecteur directeur d'un plan ;
- ✔ équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'un plan et d'une droite de l'espace ;
- ✔ déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'une droite à partir de deux points/un point ;
- ✔ déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'un plan à partir de trois points/un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires ;
- ✔ déterminer l'équation vectorielle d'une droite à partir de deux points/un point et un vecteur directeur ;

Voir la théorie 14 et les exercices 29 à 37

Produit scalaire

- ✔ produit scalaire de deux vecteurs ; définition, interprétation géométrique ; propriétés ;
- ✔ produit scalaire en composantes; calculer un produit scalaire ;

Voir la théorie 15 et les exercices 38 à 40

Applications du produit scalaire dans le plan

- ✔ produit scalaire et orthogonalité ; déterminer si deux vecteurs/droites sont parallèles, perpendiculaires ;
- ✔ angle entre deux vecteurs, entre deux droites ;
- ✔ vecteur normal à une droite du plan ; déterminer un vecteur normal à une droite ; déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'une droite à partir d'un point et un vecteur normal ;
- ✔ projection orthogonale ; déterminer un vecteur projection ;
- ✔ calculer l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme dans le plan ;

Voir la théorie 16 et les exercices 41 à 49

Distance point-droite dans le plan

- ✔ calculer la distance entre un point et une droite dans le plan ;

Voir la théorie 17 et les exercices 50 à 51

Produit vectoriel

- ✔ produit vectoriel : définition, interprétation géométrique, propriétés ;
- ✔ produit vectoriel en composantes ;
- ✔ aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs ;

Voir la théorie 18 et les exercices 52 à 55

Applications des produits dans l'espace

✔ calculer l’aire d’un parallélogramme ;

✔ déterminer si trois vecteurs sont coplanaires ou non ;

✔ produit scalaire et orthogonalité ; déterminer si deux vecteurs/droites/plans sont parallèles, perpendiculaires ;

✔ angle entre deux vecteurs/droites/plans ;

✔ déterminer un vecteur normal à une droite/plan dans le du plan ou l'espace ;

✔ déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'un plan à partir d'un point et un vecteur normal ;

Voir la théorie 19 et les exercices 56 à 68

Distances dans l'espace

✔ calculer la distance entre un point et un plan, entre deux plans parallèles;

✔ calculer la distance entre un point et une droite dans l'espace ;

Voir la théorie 20 et les exercices 69 à 74

Intersections de plans

✔ déterminer l'intersection d’une droite et d’un plan, de deux plans, de trois plans ;

Voir la théorie 21 à 23 et les exercices 75 à 77

Produit mixte et application

✔ définition et propriétés du produit mixte ; lien avec la coplanéarité ;

✔ calculer la distance entre un point et un plan ;

✔ déterminer si la position relative de deux droites dans l’espace ;

Voir la théorie 24 à 25 et les exercices 78 à 82

Cercles et sphères

✔ rappels : définition et équation d’un cercle, exercices de révision ;

✔ définition et équation d’une sphère dans l’espace.

Voir la théorie 26 à 27 et les exercices 83 à 92

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...

http://sesamath.ch/manuel-matugym-3e/complements/ch05