Tirage de la loterie

Dés polyhédriques

Problème

x est un nombre entier naturel et les nombres y et z sont deux nombres réels strictement positifs qui vérifient simultanément les deux égalités :
$xz+yz = 20$; $x+y+z = 15$.

Combien vaut x ?

Source : FFJM

Copyleft - Edition 2023-24

1 [Activité] Combinatoire en vrac

1. Deux personnes jouent au tennis selon les règles suivantes : le premier qui gagne deux jeux de suite ou qui gagne trois jeux au total gagne la partie. Combien de parties différentes peuvent-ils jouer?

2. Un menu de restaurant propose 10 hors d'oeuvres, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun un de ces 4 plats?

3. On suppose qu'il n'y a pas de répétition. On emploie les 6 chiffres 2,3,5,6,7 et 9.

- **a.** Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
- **b.** Combien de ces nombres sont pairs?
- **c.** Combien de ces nombres sont inférieurs à 400?
- **d.** Combien de ces nombres sont multiples de 5?
- **e.** Et si on admet pouvoir choisir plusieurs fois le même chiffre, qu'est-ce que cela change pour les 4 questions précédentes ?

4. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?

5. Lors de la fête du village, on veut élire un père et un fils de la même famille pour le prix du père et du fils idéal. Supposons que 10 pères participent au concours.

- **a.** Si chacun des pères a trois fils, combien y a-t-il de possibilités pour attribuer le prix ?
- **b.** Si deux des pères ont seulement deux fils et tous les autres trois, combien y a-t-il de possibilités pour attribuer le prix ?

6. Les plaques d'immatriculation des véhicules d'un pays imaginaire sont composées de quatre chiffres puis de deux lettres.

- **a.** Combien y a-t-il de plaques différentes possibles ?
- **b.** Combien y a-t-il de plaques différentes possibles si l'on ne veut pas qu'un caractère soit utilisé deux fois ?

7. Jean a sous les yeux six livres différents, deux de mathématiques et quatre de littérature. Il souhaite les ranger sur le premier rayonnage de sa nouvelle bibliothèque.

- **a.** Combien a-t-il de possibilités ?
- **b.** Combien y a-t-il de possibilités s'il souhaite que les livres de mathématiques soient côte à côte ?

8. Combien de mots différents peut-on former :

- **a.** avec des lettres du mot GENOVA ?
- **b.** avec des lettres du mot GENEVA ?
- **c.** avec des lettres du mot GENEVE ?

9. Dans un voilier, chaque signal est constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

10. 9 personnes prennent place :

a. sur un banc : de combien de manières différentes peuvent-elles se disposer ?

b. autour d'une table ronde : de combien de manières différentes peuvent-elles se disposer les unes par rapport aux autres ?

c. Même question que b), mais 2 personnes choisies à l'avance doivent être voisines.

11. Le jeu de Sport Toto consiste à effectuer des pronostics sur une grille de 13 lignes correspondant à des matches. Pour chaque match, on choisit l'une des trois possibilités suivantes : l'équipe A gagne (on coche alors la 1re colonne de cette ligne), match nul (on coche alors la 2e colonne de cette ligne), l'équipe B gagne (on coche alors la 3e colonne de cette ligne).

a. Combien de grilles différentes peut-on écrire ?

b. Parmi toutes ces grilles, combien permettent de réaliser :

i. 13 points

ii. 12 points

iii. 4 points

iv. 0 points

12. On jette 20 fois de suite une pièce de monnaie :

a. Combien de séquences différentes sont-elles possibles ?

b. Parmi celles-ci, combien contiennent exactement:

i. 1 fois pile ?

ii. 4 fois pile ?

iii. 10 fois pile ?

iv. 20 fois pile ?

13. Pour mettre sur pied le voyage d'étude d'une classe de 20 élèves, comprenant 9 filles, six organisateurs doivent être choisis parmi les élèves :

a. Combien y a-t-il de possibilités ?

b. Combien de possibilités seront-elles seulement composées de filles ?

c. Combien de possibilités seront-elles mixtes ?

14. On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Chacun reçoit 9 cartes.

a. Combien y a-t-il de façons de repartir ces cartes par paquets de 9 ?

b. Quel est le nombre de distributions différentes ?

c. Combien d'entre-elles permettent-elles à l'un des joueurs d'avoir les 4 valets ?

d. Combien d'entre-elles permettent-elles au joueur n°1 – disons Estelle - d'avoir les 4 valets ?

Prérequis et activités de découverte

2 [Aller plus loin] On complique ...

1. Combien y a-t-il de sous ensembles de l'ensemble $A = \{a; b; c\}$? $B = \{a; b; c; d\}$?

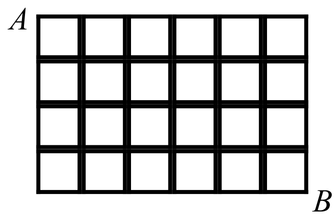
Soit C un ensemble à n éléments.

a. Combien y a-t-il de sous ensembles de C ?

b. Combien y a-t-il d'applications de l'ensemble C dans l'ensemble $D=\{0; 1\}$?

c. Quel rapport y a-t-il entre les deux questions précédentes ?

2. Déterminer, dans le quadrillage ci-contre, le nombre de chemins les plus courts possible qui permettent d'atteindre le point B en partant du point A :



4. A, B, C, D, E sont cinq points du plan tels qu'aucune droite ne passe par trois d'entre eux.

a. Combien de segments peut-on définir avec ces cinq points ?

b. Combien de triangles peut-on définir avec ces cinq points ?

c. Reprendre les deux questions précédentes dans le cas général où l'on dispose de n points (donner les réponses sous forme de polynômes en n).

d. Calculer le nombre de diagonales d'un polygone régulier à n sommets.

3 [Aller plus loin] Combinaisons

Démontrer que $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n, \forall 1 \leq k \leq n$ et faire le lien avec le **triangle de Pascal**.

4 [Aller plus loin] Combinaisons encore

1. Enoncer et démontrer le théorème « Binôme de Newton» :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \overset{\text{not}}{=} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

2. Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_k^n$.

5 [Aller plus loin] Combinatoire avec répétitions

Une fleuriste a cinq roses rouges et cinq roses blanches d'apparence identique. Combien de sortes de bouquets de cinq fleurs pourra-t-elle confectionner ?

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 5

6 [Activité] Introduction aux probabilités

On lance une pièce de monnaie. C'est une **expérience aléatoire** à deux **issues** possibles : pile (P) ou face (F). Si la pièce est non truquée, nous sommes tous convaincus qu'on a une chance sur deux de tomber sur P et une chance sur deux de tomber sur face, que la **probabilité** d'obtenir pile ou face est égale à $\frac{1}{2}$. On le note $P($“ obtenir pile ”$)$ = $P($“ obtenir face ”$)$ = $\frac{1}{2}$,ou plus simplement $p(P)=p(F) = \frac{1}{2}$

1. On jette maintenant un dé (non truqué, à six faces)

a. Combien d'issues sont-elles possibles pour cette expérience aléatoire ?

b. Comment définir et noter “ naturellement ” les probabilités d'obtenir ces issues ?

c. Que penser de la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

d. Que penser de la probabilité d'obtenir au moins 5 ?

2. Avec un jeu de 36 cartes, quelle est la probabilité d’en choisir 9 qui comprennent les 4 valets ?

3. Dans une urne, il y a 100 boules numérotées de 00 à 99. on tire une boule au hasard et on appelle X le chiffre des dizaines et Y celui des unités. Déterminer :

a. $p(X=3)$

b. $p(Y\neq 4)$

c. $p(X\neq Y)$

d. $p(X>Y)$

e. $p(X\leq Y)$

f. $p(X+Y=9)$

g. $p(X<4 \text{ et } Y<3)$

h. $p(\overline{X<4 \text{ et } Y<3})$

i. $p(X<4 \text{ ou } Y<3)$

j. $p(X>4 \text{ et } Y<4)$

k. $p(X+Y\neq 8)$

l. $p(X\neq 5 \text{ et } Y\neq 4)$

m. $p(XY\leq 49)$

n. $p(XY>49)$

4. Vocabulaire

a. Décrire l'**univers** Ω, son cardinal $\#(\Omega)$ et les **événements aléatoires** considérés dans les exemples précédents; dire s'ils sont **élémentaires** ou non, et si on a considéré des événements **disjoints** ou non.

b. Déterminer les **événements complémentaires** des événements considérés jusque-là. Qu'entend-t-on par « **événement certain** », par « **événement impossible** » ?

7 [Activité] Le problème du Grand Duc de Toscane

On jouait beaucoup, au XVIème et XVIIème siècle, au jeu de passe-dix. La règle en est très simple : on jette trois dés au hasard. L’un des joueurs gagne s’il obtient une somme de points supérieure à 10, il perd si la somme des points est inférieure ou égale à 10. Le Grand Duc de Toscane demanda un jour à Galilée : « Pourquoi lorsqu’on lance trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes ? » C’est à Galilée que l’on attribue d’avoir levé, le premier, l’apparent paradoxe, dans un traité commandé par le Grand Duc de Toscane : « Considerazione sopra il giocco dei Dadi » (1620). Sans forcément en faire un traité, répondre la question du Grand Duc de Toscane.

8 [Activité] Le premier problème du chevalier de Méré

"Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré; car il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison: si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si l'on entreprend de faire "sonnez" (double six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà quel était son grand scandale et qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément."

Extrait de la lettre de B. Pascal à P. Fermat datée du 29 juillet 1654

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 en jetant un dé ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 (au moins) en jetant deux fois le dé ?

c. Même question en jetant le dé trois fois. Puis en le jetant n fois ...

d. Combien de fois faut-il jeter un dé pour que la probabilité d'obtenir un six (au moins) dépasse 99 % ?

e. On recommence, mais avec deux dés ! Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un double six en jetant une fois les deux dés ?

f. Et deux fois ?

g. Et n fois ?

h. Expliquer alors pourquoi "si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par quatre coups".

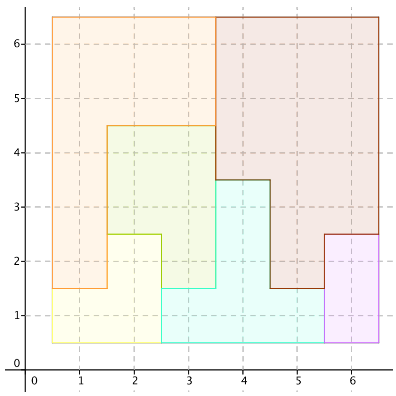
i. Combien de fois faut-il jeter deux dés pour que la probabilité d'obtenir un double six (au moins) dépasse 99 % ?

j. Expliquer enfin pourquoi "si l'on entreprend de faire "sonnez" (double six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups".

9 [Aller plus loin] Paradoxal ?

Six régions ont été matérialisées sur le quadrillage ci-dessous, inscrites dans un carré de coordonnées (0.5;0.5), (6.5;0.5), (6.5;6.5) et (0.5;6.5) ; Les points représentent les points du quadrillage. Ils peuvent être repérés par une abscisse x et une ordonnée y toutes deux entières et comprises entre 1 et 6 :

Problème : on choisit une région "au hasard". À votre avis, quelle est la région qui a le plus de chances d'être choisie ?



- Première réponse : on jette un dé (bien équilibré) et on choisit la région correspondant au nombre obtenu. Déterminer les probabilités d'obtenir chacune des six régions.

- Deuxième réponse : on jette un dé une première fois : le nombre obtenu est une abscisse x. On jette le dé une deuxième fois : le nombre obtenu est une abscisse y. On choisit la région contenant le point de coordonnées $(x;y)$. Déterminer les probabilités d'obtenir chacune des six régions.
- Troisième réponse : on fixe au milieu du carré l'axe d'une aiguille de longueur 3 unités, qui peut pivoter autour de cet axe. On fait tourner l'aiguille : la région choisie est celle où la pointe de l'aiguille s'immobilisera. Que peut-on dire de les probabilités respectives d'obtenir chacune des six régions ?

Commentaires : la modification des conditions de l'expérience modifie les probabilités des régions. On peut néanmoins considérer que l'ensemble Ω des résultats possibles reste le même : c'est l'ensemble des 6 régions dessinées. Les 36 coordonnées du deuxième tirage au hasard peuvent être considérées comme un résultat intermédiaire. Par contre, les probabilités associées aux 6 éléments de Ω ne sont pas les mêmes. Dans le troisième tirage, il y a même un élément de probabilité nulle !

Ce type de situation permet de mettre en évidence le fait que la probabilité dépend des conditions de l'expérience, des conditions du "tirage au hasard" et n'est pas attachée à l'élément en tant que tel : on peut munir un même ensemble Ω de plusieurs probabilités différentes !

Source : Enseigner les probabilités en classe de première. Claire Dupuis ... [et al.]
I.R.E.M. de Strasbourg, 1992.

Il s'agit donc pour les mathématiques - sur la base des notions suivantes: expérience aléatoire, issues, univers Ω, événement aléatoire, impossible, certain, élémentaire, événements incompatibles (ou disjoints) - de proposer un modèle apte à modéliser cette notion de probabilité.

10 [Aller plus loin] Paradoxe de Bertrand

Discuter le paradoxe de Bertrand : « On trace *au hasard* **une corde** dans un cercle. Quelle est la probabilité pour que sa longueur soit plus grande que celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?»

11 [Aller plus loin] Comment définir ce qu'est une probabilité ?

« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction ?

La probabilité a-t-elle été définie ? Peut-elle même être définie ? Et, si elle ne peut l'être, comment ose-t-on en raisonner ? La définition, dira-t-on, est bien simple : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles. Un exemple simple va faire comprendre combien cette définition est incomplète. Je jette deux dés ; quelle est la probabilité pour que l'un des deux dés au moins amène un six ? Chaque dé peut amener six points différents : le nombre des cas possibles est 6x6=36 ; le nombre des cas favorables est 11 ; la probabilité est 11/36 .

C'est la solution correcte. Mais ne pourrais-je pas dire tout aussi bien : les points amenés par les deux dés peuvent former (6x7)/2=21 combinaisons différentes ? Parmi ces combinaisons, 6 sont favorables ; la probabilité est 6/21. Pourquoi la première manière d'énumérer les cas possibles est-elle plus légitime que la seconde ? En tous cas, ce n'est pas notre définition qui nous l'apprend.

On est donc réduit à compléter cette définition en disant : "... au nombre total des cas possibles, pourvu que ces cas soient également probables". Nous voilà donc réduits à définir le probable par le probable.

Comment saurons-nous que deux cas possibles sont également probables ? Sera-ce par une convention ? Si nous plaçons au début de chaque problème une convention explicite, tout ira bien, nous n'aurons plus qu'à appliquer les règles de l'arithmétique et de l'algèbre et nous irons jusqu'au bout de calcul sans que notre résultat puisse laisser place au doute ; mais dès que nous en voudrons faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.

Dira-t-on que le bon sens suffit pour nous apprendre quelle convention il faut faire ? Hélas ! M. Bertrand s'est amusé à traiter un problème simple : “quelle est la probabilité pour que, dans une circonférence, une corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ? ”L'illustre géomètre a adopté successivement deux conventions que le bon sens semblait également imposer, et il a trouvé 1/2 avec l'une, 1/3 avec l'autre .

La conclusion qui semble résulter de tout cela, c'est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu'il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bon sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions. Mais, cette conclusion, nous ne pouvons non plus y souscrire ; cet instinct obscur, nous ne pouvons nous en passer ; sans lui la science serait impossible, sans lui nous ne pourrions ni découvrir une loi, ni l'appliquer. Avons-nous le droit, par exemple, d'énoncer la loi de Newton ? Sans doute, de nombreuses observations sont en concordance avec elle ; mais n'est-ce pas là un simple effet du hasard ?

Comment savons-nous d'ailleurs si cette loi, vraie depuis tant de siècles, le sera encore l'an prochain ? À cette objection, vous ne trouverez rien à répondre, sinon : “Cela est bien peu probable.” »

Henri Poincaré, La Science et l'Hypothèse, Flammarion, Paris, 1918

12 [Activité] Axiomatique pour un ensemble probabilisé fini

Soit un univers Ω. On dit qu'on définit **une probabilité** sur Ω si et seulement si on associe à chaque événement aléatoire A une probabilité P(A) de telle sorte que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1 : $P(A) \geq 0$ pour tout événement A
- Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$
- Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Illustrer cette construction dans le cas où :

a. On lance une pièce de monnaie non truquée.

b. On lance une pièce de monnaie truquée.

c. On lance deux dés non truqués.

Souvent, les caractéristiques physiques d'une expérience suggèrent que tous les probabilités des événements élémentaires $p(A_i)$ soient toutes égales. Un tel ensemble probabilisé fini Ω est alors appelé **ensemble fini équiprobable**.

d. Donner des exemples ensembles finis équiprobables.

e. Donner des exemples ensembles finis non équiprobables.

Dans le cas d'un ensemble fini équiprobable Ω contenant n éléments (correspondant à une expérience aléatoire à n issues), et où A est un événement aléatoire ($A \subseteq \Omega$), on a $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, ou encore $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables (à la réalisation de } A\text{)}}{\text{nombre de cas possibles (dans } \Omega\text{)}}$, ce qui correspond à la notion intuitive de probabilité.

13 [Activité] Théorèmes

On considère les 4 théorèmes suivants :

- Théorème 1 : $p(\varnothing)=0$
- Théorème 2 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$
- Théorème 3 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
- Théorème 4 : Soit $A\subseteq\Omega$. Alors $p(\overline{A})=1-p(A)$

a. les illustrer avec un diagramme de Venn ;

b. les illustrer avec un exemple concret ;

c. les démontrer en utilisant les trois axiomes.

14 [Activité] Hasard ?

Qu'est-ce que le hasard ? L'expression “au hasard” s'emploie généralement pour qualifier des événements appartenant à un espace équiprobable ; la phrase "choisir un élément au hasard dans un ensemble E” signifie donc à priori que chaque élément de E a la même probabilité d'être choisi, mais en mathématique, il est possible de définir un ensemble probabilisé de différentes façons ...

Un dé à six faces est pipé de telle sorte que chaque chiffre sort avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

a. Quelles sont les probabilités d'obtenir chacun des six chiffres ?

b. Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre pair ?

15 [Aller plus loin] Anniversaires

Dans une pièce, il y a 23 personnes. Quelle est la probabilité qu’au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Voir la théorie 4 à 6 et les exercices 6 à 19

16 [Activité] Conditionnelle

1. Le problème de Monty Hall

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur). Ce dernier est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière les deux autres se trouve une chèvre. Il doit essayer de désigner la porte derrière laquelle se trouve la voiture. Il commence par désigner une porte. Le présentateur – qui lui sait où est la voiture - choisit (au hasard) d'ouvrir l'une des deux portes qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture. Le candidat a alors le droit d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement (et qui est toujours fermée), ou alternativement de modifier son choix pour ouvrir la troisième porte restée fermée.

Y a-t-il une stratégie meilleure qu'une autre (changer ou ne pas changer) ?

2. Deux enfants

Considérons les deux problèmes suivants :

a. Vous êtes invité chez une personne dont vous savez qu'elle a exactement deux enfants. Lorsque vous sonnez à sa porte, un garçon vient vous ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également un garçon ?

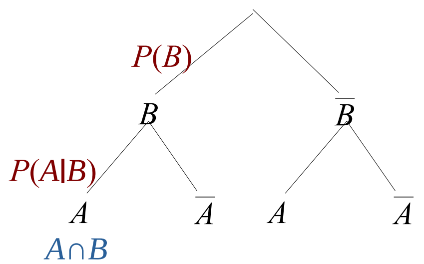
b. Vous êtes invité chez une personne dont vous savez qu'elle a exactement deux enfants. Lorsque vous sonnez à sa porte, un garçon vient vous ouvrir. Vous entendez un bébé pleurer dans la maison. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit également un garçon ?

3. Conditionnelle

Un grand collège est équipé d'un système d'alerte ultra-moderne. S'il y a incendie, l'alerte est donnée avec 99% de certitude; s'il n'y a aucun danger, l'alarme peut se déclencher avec probabilité 0,005. La probabilité d'incendie est 0,0001. L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

17 [Aller plus loin] Probabilités totale et formule de Bayes

On peut généraliser l'approche utilisée ci-dessus. Enoncer et discuter les théorèmes «Probabilité totale» et «Formule de Bayes» dans la situation suivante :



18 [Aller plus loin] Généralisation

Les théorèmes «Probabilité totale» et «Formule de Bayes» peuvent encore être généralisés au cas où on ne considère pas uniquement une **partition** de l'univers Ω en B et $\overline{B}$, mais où on considère que $\Omega=B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n$ avec $B_i\cap B_j, \forall\, i,\, j\in\{1;2;\ldots;n\}$. Expliciter.

19 [Activité] Indépendance

La table suivante donne la répartition de 150 élèves en fonction de leur option spécifique principale d'enseignement et de leur intérêt marqué ou non pour les nouvelles technologies :

	OC Sport	OC Arts	OC Informatique
OS Langue	45	18	27
OS BC	33	9	18

On considère les événements suivants :

A : « avoir OS BC »
C : « avoir OC Sport »
E : « avoir OC Informatique »
B : « avoir OS Langue »
D : « avoir OC Arts »

a. On choisit un élève au hasard. Déterminer $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$, $p(D)$ et $p(E)$?

b. Quels sens donner au concept d'**indépendance** de deux événements ?

c. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

d. Les événements B et E sont-ils indépendants ?

20 [Activité] Théorème sur l'indépendance

Enoncer et démontrer le théorème qui permet de tester si deux événement sont indépendants ou non .

Voir la théorie 7 à 9 et les exercices 20 à 24

1 [A savoir] Combinatoire

Arbres de classement, principe multiplicatif

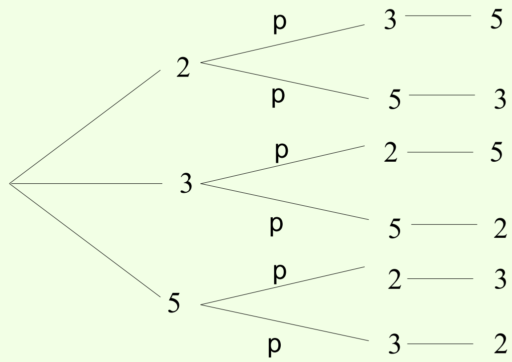
On **essaye souvent de décomposer un problème de combinatoire en *k* étapes successives** indépendantes les unes des autres; on utilise alors le **principe multiplicatif** :

☐ si $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les nombres de choix possibles correspondants à chacune des k étapes, alors le nombre de choix total est égal $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$;

☐ si la taille le permet, on peut recourir à un **arbre de classement** pour représenter la situation.

Exemple 1 : en supposant qu'il n'y a pas de répétition, combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 2,3 et 5 ?

On peut utiliser un arbre :



ou décomposer en étapes successives :

on commence par choisir un chiffre : 3 choix possibles,

puis on choisit un 2e chiffre différent du 1er : 2 choix possibles,

et enfin encore un 3e chiffre différent des 2 premiers : 1 choix possible.

Finalement, il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilités.

On peut le représenter ainsi : $\underbrace{3}_{\text{1er ch.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2e ch.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{3e ch.}} = 6$

☐ si l'arbre est trop grand, on peut représenter schématiquement les étapes successives ainsi : $\underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{étape 1}} \cdot \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{étape 2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{dernière étape}}$

Exemple 2 : combien de mots différents de 4 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former si la première lettre est une consonne et qu'on ne peut jamais utiliser deux fois la même lettre ?

On décompose en étapes successives :

on commence par choisir une consonne : 10 choix possibles,

puis on choisit une voyelle : 6 choix possibles,

encore une consonne, mais différente de la 1re : 9 choix possibles,

et enfin encore une voyelle différente de la 1re choisie : 5 choix possibles.

Finalement, il y a $10 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5 = 2700$ possibilités.

On peut le représenter ainsi : $\underbrace{10}_{\text{1re cons.}} \cdot \underbrace{6}_{\text{1re voy.}} \cdot \underbrace{9}_{\text{2e voy.}} \cdot \underbrace{5}_{\text{3e cons.}} = 2700$

Définition «Factorielle»

On appelle **factorielle** du nombre entier (positif) n le nombre produit des n entiers de 1 à n, et on écrit : $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

On étend la définition à 0 en posant $0!=1$

Exemple : calculer $8!$

$8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 7\cdot 8=40320$

Remarque : on peut calculer directement $n!$ avec la calculatrice.

Définition «Permutations de *n* objets distincts»

On appelle **permutations de *n* objets tous différents** les divers groupements que l'on peut former en prenant chaque fois tous les objets, deux groupements ne différant que par l'ordre des objets.

On note P_n .

Théorème «Permutations de *n* objets»

$P_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$

Exemple : de combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Il s'agit de dénombrer les permutations de 36 objets tous distinguables : $P_{36}\simeq 3{,}7\cdot 10^{41}$

Définition «Permutations de *n* objets dont seuls *k* sont distinguables»

Si l'on dispose de n objets se répartissant en *k* sous-ensembles à l'intérieur desquels les objets sont indistinguables, et si $n_1+n_2+\ldots+n_j+\ldots+n_k=n$, les n_j représentant le nombre d'objets du *j*-ème sous-ensemble, on parle de **permutations de *n* objets partiellement identiques** (deux permutations différant par l'ordre des objets).

On note $\overline{P}_{n\,;\,n_1,\,n_2,\,\ldots,\,n_k}$.

Théorème «Permutations de *n* objets dont seuls *k* sont distinguables»

Le nombre de permutations différentes de *n* objets partiellement identiques se répartissant en k sous-ensembles à l'intérieur desquels les objets sont indistinguables avec $n_1+n_2+\ldots+n_j+\ldots+n_k=n$ est égal à $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_j!\cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Exemple : combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot saussure» ?

Dans le mot « saussure », il y a 3 «s» et 2 «u», les trois autres lettres «a», «e» et «r» n'apparaissent qu'une fois. Il s'agit donc d'une permutation $\overline{P}_{8;3,2,1,1,1}$. En général, on ne note pas les «1 », donc on a : $\overline{P}_{8;3,2}=\dfrac{8!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2}=2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=3360$

Définition «Arrangements sans répétition de *p* objets choisis parmi *n* »

Soient n objects tous différents. On appelle **arrangements (sans répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois p objets choisis parmi n (chaque objet ne pouvant figurer qu'une seule fois), deux groupements différant par l'ordre des objets ou par leur nature. On note A_p^n .

Théorème «Arrangements sans répétition de *p* objets choisis parmi *n* »

$$A_p^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(p-1)] = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque : on peut le plus souvent calculer directement A_p^n avec la calculatrice.

Exemple : Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les onze joueurs ainsi que l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?

On choisit 5 joueurs parmi 11, sans répétition, l'ordre étant important : $A_5^{11} = 55440$

Définition «Arrangements avec répétition de *p* objets choisis parmi *n* »

Soient n objects tous différents. On appelle **arrangements (avec répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois p de ces n objets (chaque objet pouvant figurer plusieurs fois), deux groupements quelconques différant par l'ordre des objets ou par leur nature .

On note $\overline{A_p^n}$

Théorème «Arrangements de *p* objets parmi *n* avec répétition»

$$\overline{A_p^n} = n^p$$

Exemple : combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?

Il faut choisir 7 chiffres parmi les 10 chiffres existants, les répétitions sont possibles et l'ordre est important : $\overline{A_7^{10}} = 10^7 = 10000000$

Remarque : quand on parle d'arrangement sans autre indication, on fait référence à un arrangement sans répétition.

Définition «Combinaison sans répétition de *p* objets choisis parmi *n*»

Soient n objects tous différents. On appelle **combinaisons (sans répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements que l'on peut former en prenant chaque fois p de ces n objets, deux groupements différant par la nature mais pas par l'ordre des objets.

On note C_p^n ou $\binom{n}{p}$; ces nombres s'appellent aussi les **coefficients binomiaux**.

Théorème «Combinaisons de *n* objets sans répétition»

$$C_p^n=\binom{n}{p}=\frac{A_p^n}{P_p}=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : on peut le plus souvent calculer directement C_p^n avec la calculatrice.

Exemple : au jass, on reçoit 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien de combinaisons différentes existe-t-il ?

Il faut choisir 9 cartes parmi 36 toutes différentes ; les répétitions sont impossibles et l'ordre n'est pas important : $C_9^{36}=\frac{36!}{9!(36-9)!}=\frac{36!}{9!(27)!}=94143280$

2 [Aller plus loin] Coefficients binomiaux

Théorème

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors on a : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}$, $\forall\, 0<p<n$, ou $C_p^n=C_p^{n-1}+C_{p-1}^{n-1}$

Théorème «Binôme de Newton»

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, alors on a : $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$, ou $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n a^{n-k}b^k$

Exemple :

$$(a+b)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^k b^{5-k}=\binom{5}{0}a^5b^{5-5}+\binom{5}{1}a^4b^{5-4}+\binom{5}{2}a^3b^{5-3}+\binom{5}{3}a^2b^{5-2}+\binom{5}{4}a^1b^{5-1}+\binom{5}{5}a^0b^{5-0}$$
$$=1\cdot a^5+5\cdot a^4b^1+10\cdot a^3b^2+10\cdot a^2b^3+5\cdot a^1b^4+1\cdot b^5=a^5+5a^4b^1+10a^3b^2+10a^2b^3+5a^1b^4+b^5$$

par exemple, dans $(a+b)^5=(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)$, si on effectue les multiplications, le terme a^2b^3 apparaît $\binom{5}{3}=C_3^5=10$ fois. Ceci correspond à toutes les possibilités de choisir les 3 parenthèses avec la lettre b parmi les 5 parenthèses (ce qui équivaut à toutes les possibilités de choisir les 2 parenthèses avec la lettre a : $C_3^5=C_2^5=10$

3 [Aller plus loin] Combinaisons avec répétition

Définition «Combinaison avec répétition de *p* objets choisis parmi *n*»

Soient n objects tous différents. On appelle **combinaisons (avec répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois p de ces n objets (chaque objet pouvant figurer plusieurs fois), deux groupements différant par la nature mais pas par l'ordre des objets.

On note Γ_p^n

Théorème «Combinaisons de *n* objets avec répétition» [sans démonstration]

$$\Gamma_p^n=\binom{n+p-1}{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple : combien y a-t-il de dominos si 10 symboles différents sont possibles ?

Les 10 symboles différents représentent les chiffres de 0 à 9 (le 0 est représenté par une absence de marquage sur le domino). Il faut choisir pour chaque domino deux symboles ; la répétition est possible et l'ordre n'est pas important :

$$\overline{\Gamma}_2^{10}=\frac{(10+2-1)!}{2!(10-1)!}=\frac{11!}{2!9!}=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

Voir les exercices 1 à 5

4 [A savoir] Notion intuitive de probabilité

Exemple : on lance un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir : a) Le nombre 2 ? b) Un multiple de 3 ?

a) On dit qu'on a **une chance sur six** d'obtenir le nombre 2, et on écrit $p=\frac{1}{6}$

b) Dans un dé les multiples de 3 sont {3;6}, on dit qu'on a **deux chances sur six** d'obtenir un multiple de 3, et on écrit $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

Dans l'exemple précédent on a utilisé une définition intuitive de la notion de probabilité :

$$p=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Cette formule n'est valable que si les cas possibles ont tous la même probabilité de se produire (elle n'est par exemple pas valable si le dé est truqué!).

Lorsque le nombre de cas favorables et de cas possibles sont difficiles à déterminer, on utilise l'analyse combinatoire.

Exemple : on tire 5 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux rois ?

Parmi les 4 rois disponibles, on en choisit 2 (sans ordre) : C_2^4 , puis on tire une cinquième carte parmi les 32 cartes restantes qui ne sont pas des rois : $C_1^{32}=32$.

Il y a donc en tout $C_2^4\cdot C_1^{32}$ façons toutes différentes d'obtenir exactement 2 rois en tirant 5 cartes parmi 32 ; ce sont les $C_1^{32}=32$ cas favorables.

En tout, il y a C_5^{32} façons différentes d'obtenir 5 cartes ; ce sont les cas possibles.

Finalement, on obtient donc $p=\frac{C_2^4\cdot C_1^{32}}{C_5^{32}}\simeq 4\%$.

Remarque : cette définition intuitive de la notion de probabilité présente trois défauts :

- □ on ne peut pas définir la probabilité d'événements qui ne sont pas équiprobables ;
- □ il s'agit d'une définition circulaire (on "définit le probable par le probable") ;
- □ elle ne s'applique pas si le nombre de cas possibles est infini.

5 [A savoir] Approche rigoureuse des probabilités

Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard. L'ensemble de toutes les **issues** possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience. On le note Ω.

Le nombre d'éléments de Ω est noté card(Ω), $|\Omega|$ ou #(Ω).

Un **événement aléatoire** est un sous-ensemble de Ω.

Deux événements aléatoires particuliers sont : $\emptyset$ l'**événement impossible** et Ω lui-même, l'**événement certain**.

Un événement qui ne comprend qu'une seule issue est appelé **événement élémentaire**.

Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$ deux événements aléatoires tels que $A\cap B=\emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Le **complémentaire** d'un événement E, noté $\overline{E}$, est défini par $\overline{E}=\Omega\setminus E$

Exemple : on jette un dé (non truqué) à quatre faces. Décrire l'univers Ω et les événements aléatoires élémentaires. Illustrer les notions d'événements élémentaires ou non, disjoints ou non, ainsi que celle d'événement complémentaire.

L'univers est Ω ={«obtenir un 1», «obtenir un 2»,«obtenir un 3»,«obtenir un 4»}.

Les 4 événements élémentaires sont : A={«obtenir un 1»}, B={«obtenir un 2»}, C={«obtenir un 3»}, D={«obtenir un 4»} », qu'on peut également noter plus simplement A={«1»}, B={«2»}, C={«3»}, D={«4»} » ou même A={1}, B={2}, C={3}, D={4}.

L'événement impossible est {} [on n'obtient pas de résultat!] et l'événement certain est Ω ={1;2;3 ;4}.

L'événement E : « obtenir un nombre pair » est E ={2;4}

L'événement F : «: « obtenir un nombre inférieur ou égal à 1» est F ={1}.

L'événement G : «: « obtenir un nombre premier» est G ={2;3}.

F est un événement élémentaire, alors que E et G ne sont pas des événements élémentaires.

E et G ne sont pas des événements disjoints, car $E\cap G=\{2\}\neq\emptyset$

E et F sont des événements disjoints, car $E\cap F=\emptyset$

Le complémentaire $\overline{E}$ de E est {1;3}

Rappels

$A\cup B=\{x|x\in A \text{ ou } x\in B\}$ (avec un «ou» non exclusif) ; $A\cup B$ se lit «A union B»

$A\cap B=\{x|x\in A \text{ et } x\in B\}$; $A\cap B$ se lit «A inter B»

Définition «probabilité»

Soit un univers Ω. On dit qu'on définit **une probabilité** sur Ω si et seulement si on associe à chaque événement aléatoire A un nombre réel $P(A)$ de telle sorte que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

Axiome 1 : $P(A) \geq 0$ pour tout événement A

Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A)$ est appelé **probabilité** de A.

Cette définition axiomatique est celle de Andreï Kolmogorov (1903-1987), mathématicien russe et soviétique qui a apporté des contributions significatives en mathématiques, notamment en théorie des probabilités, topologie, turbulence, mécanique classique, logique intuitionniste, théorie algorithmique de l'information et en analyse de la complexité des algorithme.

Source :https://fr.wikipedia.org/wiki/Andre%C3%AF_Kolmogorov#/media/Fichier:Andrej_Nikolajewitsch_Kolmogorov.jpg

Remarques :

□ souvent, les caractéristiques physiques d'une expérience suggèrent que les probabilités des événements $P(A_i)$ soient toutes égales. On parle alors d'**événements élémentaires équiprobables** et un tel ensemble probabilisé fini Ω est alors appelé **ensemble équiprobable** ;

□ si Ω est un **ensemble équiprobable fini** contenant n éléments et $A \subseteq \Omega$ est un événement aléatoire, alors on retrouve $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, ce qui correspond à la notion intuitive de probabilité $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables (à la réalisation de A)}}{\text{nombre de cas possibles (dans } \Omega)}$ vue précédemment.

Mais attention, on peut parfaitement, comme nous l'avons vu dans les activités, définir une probabilité qui vérifie les axiomes requis sans forcément être intuitive !

Exemple : on jette un dé truqué à quatre faces et on considère les événements aléatoires élémentaires A_1=«obtenir 1», A_2=«obtenir 2», A_3=«obtenir 3» et A_4=«obtenir 4», c'est-à-dire $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$. Si on définit $P(A_1) = \frac{3}{4}$ et $P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{12}$, on a bien affaire à un espace probabilisé dans une situation de non équiprobabilité des événements élémentaires.

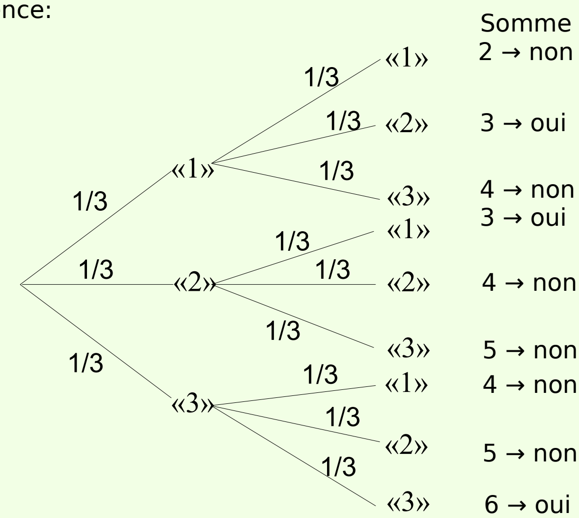
Remarques :

□ désormais, on sera explicite si on a affaire à une pièce, un dé, ... qui est truqué. Dans le cas contraire d'objets non truqués, on dira simplement : un dé, une pièce, ... ;

□ quand on utilise un arbre de classement pour représenter la situation, on indique le long de chaque branche la probabilité associée.

Exemple : on jette deux dés à trois faces. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme qui soit un multiple de 3

On construit l'arbre de l'expérience:



$$p=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Théorèmes

Théorème 1 : $P(\emptyset)=0$

Théorème 2 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$, alors $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$

Théorème 3 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Théorème 4 : Soit $A\subseteq\Omega$, alors $P(\overline{A})=1-P(A)$

Exemple : on tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité des événements : a) A = n'obtenir aucun as ; b) B = obtenir au moins un as.

a) $P=\frac{C_5^{48}}{C_5^{52}}\simeq 0{,}6588$

b) B se réalise si on tire 1, 2, 3 ou 4 as. Au lieu de calculer $P(B)$ directement, on utilise le théorème 4 : $P(\overline{B})=1-P(B)$, où $\overline{B}$ est l'événement complémentaire de B, c'est à dire :

$\overline{B}$ = n'obtenir aucun as = A. Finalement : $P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A)\simeq 0{,}3412$

Exemple : on tire 1 carte d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un as ou d'un cœur ?

On définit les événements suivants : A = «la carte est un as» et B = «la carte est un cœur». On a : $A\cap B$ ={as de coeur} et donc $A\cap B\neq\emptyset$!

On a donc $P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$ ...

On utilise le théorème 3 : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

6 [Aller plus loin] Un peu d'histoire

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme Cardan (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise Pascal par son ami le Chevalier de Méré, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ?

Gerolamo Cardano (1501-1576)

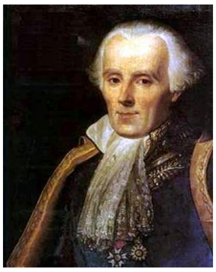
Pierre de Fermat (1601-1665)

Blaise Pascal (1623-1662)

Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre Pascal et Fermat, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans « Tractatus de ratiociniis in aleae ludo » (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan Huygens, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques Bernoulli, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit « Ars Conjectandi », qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Jakob Bernoulli (1654-1705)



Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Au 19ème siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au- delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances. Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité. C'est Laplace qui s'en charge dans son ouvrage « Théorie analytique des probabilités », paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Denis Poisson (1781-1840), Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894), Andrei Andreeivich Markov (1856-1922) et Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).

Source : MADIMU - http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/PROBA/PROBA2.PDF

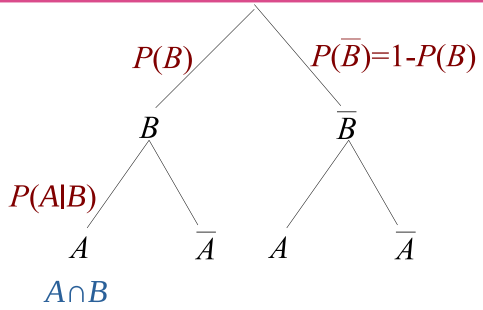
Voir les exercices 6 à 19

7 [A savoir] Probabilité conditionnelle

Définition

Soit B un événement de probabilité non nulle. La **probabilité [conditionnelle]** qu'un événement A se réalise sachant que B est réalisé,
ce qu'on notera par $P(A|B)$, est donnée par :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



Remarque : $P(.|B)$ vérifie bien la propriété attendue pour une probabilité ; en effet, pour $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$ avec $P(B)\neq 0$, alors on a :

$$P(A|B)+P(\overline{A}|B)\overset{\text{déf. pr.cond.}}{=}\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$$

$$\overset{\text{év. disj. donc Ax3}}{=}\frac{P((A\cap B)\cup(\overline{A}\cap B))}{P(B)}\overset{\text{théorie ens.}}{=}\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

Exemple : on lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?

Lorsqu'on lance deux dés, il y a 36 issues possibles. On pose : E : «la somme des dés est supérieure à 6» et F : «un des deux dés indique un 2».

On a : $E\cap F$: «la somme des dés est supérieure à 6 et un des deux dés indique un 2». En explorant les possibilités, on voit que $E\cap F$ ={(2;5);(5;2);(2;6);(6;2)}, donc $P(E\cap F)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Par ailleurs, F ={(2;1);(1;2);(2;2);(2;3);(3;2);(2;4);(4;2);(2;5);(5;2);(2;6);(6;2)}, donc $P(F)=11/36$. D'où $P(E|F)=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}}=\frac{4}{11}$

8 [A savoir] Probabilité totale et formule de Bayes

Théorème «Loi de probabilité totale»

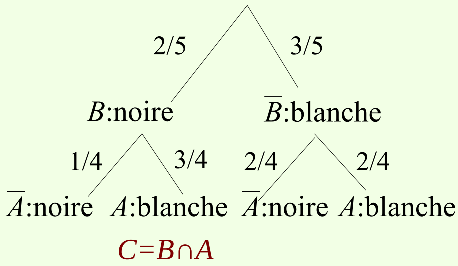
Si A et B sont deux événements quelconques avec $P(B)\neq 0$,alors on a :

$$P(A)=P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})+P(B)\cdot P(A|B)\ .$$

Interprétation : la probabilité de l'événement A est une moyenne pondérée de la probabilité conditionnelle de A lorsque B est réalisé et de la probabilité conditionnelle du même A lorsque B n'est pas réalisé, les poids étant les probabilités de l'événement «conditionnant». Cette formule est extrêmement utile puisqu'elle nous permet de déterminer la probabilité d'un événement en commençant par le conditionner selon l'apparition ou non d'un autre événement.

Exemple : une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire deux boules l'une après l'autre sans remettre dans l'urne la première boule tirée. Calculer la probabilité des événements B = «la première boule tirée est noire», A = «la deuxième boule tirée est blanche» et C = «la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche».

On peut faire l'arbre de l'expérience :

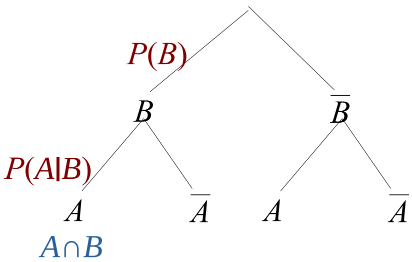


$$P(B)=\frac{2}{5}$$

$$P(C)=P(B\cap A)=P(B)P(A|B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$$

$$P(A)=P((B\cap A)\cup(\overline{B}\cap A))\overset{disjoints}{=}P(B\cap A)+P(\overline{B}\cap A)$$
$$=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{5}$$

Remarque : si on écrit $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ comme $P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)$, on retrouve notre pratique en combinatoire avec les arbres :



□ [principe multiplicatif] : la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités le long du chemin qui mène à cette issue» ;

De même, l'axiome 3 peut s'interpréter comme :

□ [principe additif] : si un événement est constitué par plusieurs chemins [qui sont alors exclusifs les uns des autres], on fait la somme des probabilités de tous les chemins qui le composent.

Théorème «Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements tels que $P(A)\neq 0$ et $P(B)\neq 0$,alors on a :

$$P(B|A)=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B)+P(\overline{B})\cdot P(A|\overline{B})}.$$

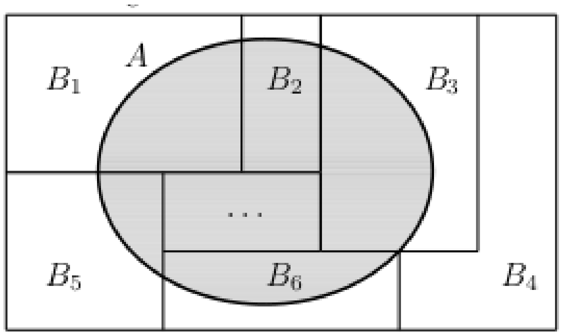
9 [Aller plus loin] Généralisation

Théorème «Loi de la probabilité totale» - généralisation

Si A est un événement quelconque, et B_1, B_2, …, B_n des événements disjoints deux à deux (c'est-à-dire que $B_i\neq B_j, \forall i\neq j$) tels que $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=\Omega$ et $P(B_i)>0, \forall i$, alors on a :

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$$

Illustration : l'univers Ω est «séparé» en parties disjointes B_1, B_2, ..., B_n et on considère A comme union des intersections de A avec les B_1, B_2, ..., B_n



Remarque : on peut aussi écrire «Si A est un événement quelconque, et B_1, B_2, ..., B_n des événements disjoints deux à deux tels que $\sum_{i=1}^{n} B_i=\Omega$ et $P(B_i)>0, \forall i$, alors on a :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P(A|B_i)$$

Démonstration **:** soit A un événement quelconque, et soient B_1, B_2, ..., B_n des événements disjoints deux à deux (c'est-à-dire que $B_i \neq B_j, \forall i\neq j$) tels que $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=\Omega$ et $P(B_i)>0, \forall i$. On a : $P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{déf prob cond}}{=} P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+\ldots+P(A\cap B_n)\\
&\overset{\text{Ax3, car év. disjoints 2à2}}{=} P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n))\\
&\overset{\text{propr. union/intersection}}{=} P(A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n))\\
&\overset{\text{par hyp.}}{=} P(A\cap\Omega)=P(A)
\end{aligned}$$

Théorème «Formule de Bayes» - généralisation

Si A est un événement quelconque tel que $P(A)>0$, et B_1, B_2, ..., B_n des événements disjoints deux à deux (c'est-à-dire que $B_i\neq B_j, \forall i\neq j$) tels $B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=\Omega$ et $P(B_i)>0 \forall i$, alors on a :

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)\cdot P(A|B_j)}$$

Démonstration : $P(B_i|A) \overset{\text{déf prob cond}}{=} \frac{P(B_i\cap A)}{P(A)} \overset{P(B_i)\neq 0 \text{ par hyp}}{=} \frac{P(B_i\cap A)}{P(A)}\cdot\frac{P(B_i)}{P(B_i)}$

$$\begin{aligned}
&=\frac{P(B_i\cap A)}{P(B_i)}\cdot\frac{P(B_i)}{P(A)} \overset{\text{déf prob cond}}{=} P(A|B_i)\cdot\frac{P(B_i)}{P(A)}=\frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(A)}\\
&\overset{\text{thm prob tot}}{=} \frac{P(B_i)\cdot P(A|B_i)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)}
\end{aligned}$$

10 [A savoir] Indépendance de deux événements

Définition intuitive

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles et non égales à un.

A et B sont **indépendants** $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$ et $P(B|A)=P(B)$

Théorème

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles et non égales à un.

A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Exemple : on tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A :«La carte tirée est un as» et B : «La carte tirée est un pique» sont-ils indépendants ?

On a : $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, $P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{52}$.

On teste : $P(A\cap B)\overset{?}{=}P(A)\cdot P(B)\Leftrightarrow\frac{1}{52}\overset{?}{=}\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}$: oui, ils sont indépendants.

11 [Aller plus loin] Indépendance de deux événements, suite

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Une fois bien compris le sens de l'indépendance de deux événements, on choisit en général plutôt la définition ci-dessus, qui permet d'inclure également les événements pour lesquels $P(E)=0$ ou $P(E)=1$.

Voir les exercices 20 à 24

Combinatoire

1 Lettres

a. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot MISSISSIPI?

b. Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par S?

2 Autres lettres

a. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot TOULOUSE

b. Et si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième positions?

3 On choisit 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes

a. De combien de façons différentes peut-on procéder ?

b. De combien de façons différentes peut-on procéder de manière à ce que ces 5 cartes comprennent:

i les 4 as ?

ii 2 as et 2 rois exactement ?

iii aucun as ?

iv au moins un as ?

4 Loterie

a. De combien de façon peut-on remplir une feuille de loterie à numéro ? (marquer 6 numéros sur 45) ?

b. Combien permettent-elles de réaliser .

i 6 points ? ii 3 points ? iii 0 point ?

5 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{0}=0$

b. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $C_0^n=1$

c. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $C_n^n=1$

d. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{p}=\binom{n}{n+p}$

e. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $C_p^n=C_{n-p}^n$

f. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $C_{p+1}^{n+1}=C_{p+1}^{n}+C_{p+1}^{n+1}$

Voir la théorie 1 à 2

Probabilités

6 On jette deux dés (non truqués, à six faces – données implicites par défaut).

a. Déterminer deux événements élémentaires de votre choix E_1 et E_2 .

b. Combien d'événements élémentaires contient l'univers Ω de l'expérience?

c. Donner deux exemples de votre choix d'événements non élémentaires A et B incompatibles et déterminer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

d. Donner deux exemples de votre choix d'événements non élémentaires C et D non disjoints et déterminer $P(C)$, $P(D)$ et $P(C \cup D)$.

e. S'inspirer des deux points précédents pour énoncer une conjecture concernant la probabilité de l'union de deux événements aléatoires.

f. Déterminer un événement E tel que $P(E)=\frac{35}{36}$.

g. Déterminer $P(\overline{C})$, où C est le complémentaire de l'événement C choisi au point d.

7 Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On en tire deux au hasard.

a. Déterminer l'arbre de toutes les possibilités et les probabilités de chacune des issues.

b. On considère les événements suivants : A=«obtenir au moins une blanche» et B=«obtenir au moins une noire».

Calculer $P(A), P(B), P(A \cap B), P(A \cup B)$.

8 Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On en tire une au hasard, qu'on remet dans l'urne avant d'en tirer une deuxième. Calculer les probabilités de chacune des 4 issues possibles.

9 On a trois urnes. L'urne 1 contient une boule blanche, l'urne 2 contient 4 boules noires et l'urne 3 contient 4 boules blanches et une noire. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard. Calculer la probabilité que ce soit une boule blanche.

Exercices d'entraînement

10 On estime à 90 milliards le nombre total d'humains nés sur cette terre depuis qu'il en existe, et à 6 milliards le nombre de ceux qui vivent encore aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'un homme rencontré au hasard dans la rue soit vivant?

11 On tire une boule au hasard dans une urne. Quelle est la probabilité que le chiffre 9 ne figure pas dans son numéro si les boules de l'urne sont numérotées:

a. de 0 à 9 ?

b. de 0 à 99 ?

c. de 0 à 999 ?

d. de 0 à 999999 ?

12 Dans un tiroir il y a 4 chaussettes bleues, 6 rouges et 2 blanches. Nicolas prend 2 chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

13 Les statistiques montrent qu'il y a environ 105 naissances de garçons pour 100 naissances de filles. (On supposera que le sexe des nouveaux-nés n'est dû qu'au hasard). Ceci nous amène à poser :

$$P(\text{“}\textit{avoir une fille}\text{”})=P(F)=\frac{100}{205}$$

$$\text{et } P(\text{“}\textit{avoir un garçon}\text{”})=P(G)=\frac{105}{205}$$

Sur une famille de 4 enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait (sans tenir compte de l'ordre) :

a. 4 filles

b. 3 F et 1 G

c. 2 F et 2 G

d. 1 F et 3 G

e. 4G

14 Noémie touche une cible une fois sur deux (en moyenne). Combien de fois doit-elle tirer pour être sûre à 99% d'atteindre au moins une fois la cible ?

15 Jean et Simon visent alternativement une bouteille jusqu'à ce qu'elle tombe pour la première fois. Jean commence. Les probabilités de réussite lors d'un jet de balle sont de 1/3 pour Jean et de 1/4 pour Simon. Ils ont 2 balles chacun

a. quelle est la probabilité que Jean fasse tomber la bouteille ?

b. quelle est la probabilité que Simon fasse tomber la bouteille ?

c. pourquoi la somme de ces deux probabilités n'est-elle par égale à 1 ?

16 Même question qu'à l'exercice précédent s'ils ont autant de balles que possible !

17 Un étudiant se présente à deux examens. Il estime qu'il a 4 chances sur 10 de réussir le premier, 6 chances sur 10 d'en réussir au moins un, mais seulement 1 chance sur 10 de les réussir les deux. Quelle est, selon ses estimations, la probabilité :

a. Qu'il réussisse le deuxième examen ?

b. Qu'il n'en réussisse aucun ?

18 On laisse tomber une pièce de 5 cm de diamètre sur un sol carrelé. Les carreaux sont des carrés de 10cm de côté. On appelle P(n) la probabilité que la pièce s'immobilise à cheval sur n carreaux exactement. Calculer P(1), P(2), ...

Voir la théorie 3 à 5

Probabilité conditionnelle et indépendance

19 On a trois urnes. L'urne 1 contient trois boules blanches et sept noires, l'urne 2 contient quatre boules blanches et autant de boules noires et l'urne 3 contient quatre boules blanches et une noire. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard. La boule est noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1.

20 Le tiers des coureurs du vélo club Saussure sont suisses-allemands. 2 Suisses-allemands sur 3 et 1 non Suisse-allemand sur 24 mangent du birchermuesli au petit déjeuner. Sachant que le meilleur grimpeur du club mange du birchermuesli au petit déjeuner, quelle est la probabilité pour qu'il soit suisse-allemand ?

21 Subtilité ! Dans cet exercice, on considère que les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales et qu'il n'y a pas de « mémoire » de descendance dans un famille..

a. Madame Gontrand a 2 enfants. L'un au moins est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit aussi un garçon ?

b. Monsieur Armand a 2 enfants. L'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit aussi un garçon ?

22 On dispose de 3 cartes. L'une a deux faces rouges, une autre deux noires et la troisième a une face rouge et une face noire. On tire une carte au hasard et on la pose sur la table: la face visible est rouge. Quelle est la probabilité pour que l'autre face soit noire ?

23 La famille Robert a 2 enfants, la famille Foret en a 3. On considère les événements suivants:

A: la famille a des enfants des 2 sexes

B: la famille a au plus un garçon.

A et B sont-ils indépendants :

a. chez les Robert ? **b.** chez les Foret ?

24 On lance 2 dés et on considère les événements suivants :

A: on obtient 2 chiffres différents

B: on obtient une somme paire

A et B sont-ils indépendants ?

Voir la théorie 6 à 7

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Combinatoire

25 Dans un restaurant, le menu du jour est composé de deux plats. Un client a le choix entre deux entrées (terrine ou saumon fumé) et trois plats principaux (filet de boeuf, carré d'agneau ou filet de sole). Combien de menus différents peut-on composer dans ce restaurant ?
Si on ajoute au menu un dessert à choix parmi une mousse de chocolat, une glace, un flan, un tiramisu et un gratin de framboises, combien de menus différents peut-on composer ?

26 On considère 4 boules numérotées de 1 à 4. De combien de manière différentes peut-on les aligner sur une table ?

27 On place sur un rayon d'une bibliothèque un livre de mathématiques, un de chimie, un de physique, un de biologie, un de français, un d'histoire, un d'allemand, un d'anglais, un d'italien, un d'espagnol, un d'économie et un de droit. Combien y a-t-il de dispositions différentes ?

28 Combien d'anagrammes du mot NOIR (même sans signification en français) peut-on former ?

29 Combien d'anagrammes du mot EXEMPLE (même sans signification en français) peut-on former ?

30 On compose des signaux en alignant 12 drapeaux, 4 blancs, 3 bleus, 3 rouges et 2 verts. Combien de signaux peut-on former ?

31 Combien de "mots" de 3 lettres (même sans signification en français) peut-on former à l'aide des lettres {a; b; c; d; e; f }, sans utiliser deux fois la même lettre ?

32 Une urne contient 4 boules, numérotées de 1 à 4. On tire deux fois de suite une boule en notant dans l'ordre les numéros sortis. On obtient des séquences du type (1; 4), (4; 1) ; (3; 3),. . . . Combien y a-t-il de séquences possibles si :

a. On remet la première boule tirée dans l'urne avant de tirer la deuxième ?

b. On ne remet pas la première boule tirée dans l'urne ?

33 Le plaques d'immatriculation d'un pays sont formées d'exactement 4 lettres de l'alphabet latin. Combien de voitures peut-on immatriculer dans ce pays ?

34 On veut former un comité en choisissant 3 personnes dans un groupe de 20. Combien peut-on former de comités différents ?

35 Dans l'alphabet Braille chaque lettre ou signe est représenté par 6 points, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on ainsi composer ?

36 Dans une société de 25 personnes, on doit

a. en désigner quatre qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

b. désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire ; ces quatre personnes constituent le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

37 Un questionnaire comprend 10 questions auxquelles il faut répondre par "oui" ou par "non".

a. De combien de manières peut-on remplir ce questionnaire ?

b. De combien de manières si on a en plus la possibilité de s'abstenir pour chaque question ?

c. Combien de réponses possibles sont-elles constituées de 4 "oui" et de 6 "non" ?

Probabilités

38 On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes (4 couleurs avec 13 cartes chacune du 2 au 10 puis valet,dame, roi et as). Calculer la probabilité d'obtenir :

a. le roi de trèfle

b. un roi

c. un trèfle

d. un roi ou un trèfle

e. ni roi ni trèfle.

39 On lance deux fois un dé non pipé à 8 faces. On désigne par x le numéro obtenu sur le premier dé, par y le numéro obtenu sur le deuxième dé. Calculer la probabilité des événements :

a. $x = 4$

b. $y < 5$

c. $x = y$

d. $x < y$

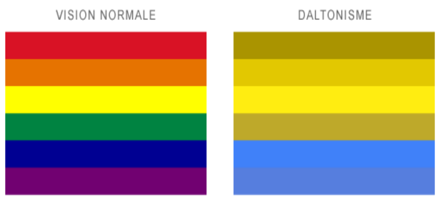
e. $x = 1$ et $y = 2$

f. $x = 1$ ou $y = 2$

g. il sort un 3 et un 5

h. $x + y = 8$

40 Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien doit-on prendre de personnes pour être sûr à 95 % d'avoir au moins un daltonien ?



41 Un appareil produit en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B. Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète un des appareils produits.

a. Calculer la probabilité pour que cet appareil ne présente aucun défaut.

b. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut A seulement.

c. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut B seulement.

42 Une étude statistique portant sur l'absentéisme chez les élèves d'un collège a conduit aux résultats suivants :

- 25 % ont été absents au moins un jour (donc soit 1 jour, soit plus);
- 12 % ont été absents au moins deux jours (donc soit 2 jours, soit plus)
- 8 % ont été absents au moins trois jours (donc soit 3 jours, soit plus);
- 6 % ont été absents au moins quatre jours (donc soit 4 jours, soit plus);
- 5 % ont été absents au moins cinq jours (donc soit 5 jours, soit plus).

On choisit au hasard un élève de ce collège. Quelle est la probabilité qu'il ait été absent :

a. au moins un jour ?

b. jamais ?

c. exactement deux jours ?

d. moins de trois jours ?

e. deux ou trois jours ?

43

a. On jette en l'air une pièce de monnaie bien équilibrée. Cinq fois de suite, on obtient « pile ». Quelle est la probabilité d'obtenir encore pile au 6e jet ?

b. On lance une pièce 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

c. On lance une pièce 7 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

d. Quel est l'événement le plus probable : A = « obtenir exactement un "pile" au cours de deux lancers » ou B = « obtenir exactement deux "piles" au cours de quatre lancers » ?

Probabilité conditionnelle et indépendance

44 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5. Quelle probabilité y a-t-il :

a. que la première salle soit libre ?

b. que les deux salles soient libres ?

c. que l'une des deux salles au moins soit libre ?

d. qu'une seule salle soit libre ?

e. que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?

f. Les événements A : «la 1re salle est occupée» et B : «la seconde salle est occupée» sont-ils indépendants ?

45 Trois marques A, B et C de biberons se partagent le marché avec des parts respectives de 43%, 34% et 23%. Chaque marque propose des modèles avec tétine simple (S) ou à trois vitesses (V) : 35% des tétines de la marque A sont simples, ainsi que 25% de la marque B et 47% de la marque C. Un jeune père paniqué achète au hasard un biberon. Il constate que ce biberon a une tétine simple. Calculer la probabilité qu'il soit de marque C.

46 Un test sanguin assure avec fiabilité de 95% la détection d'une certaine maladie lorsqu'elle est effectivement présente. Cependant, le test indique aussi un résultat positif pour 1% des personnes saines. Si 0, 5% de la population porte effectivement cette maladie, qu'elle est la probabilité qu'une personne soit malade lorsque le test est positif ?

47 On tire au hasard une carte d'un jeu de 52.

a. Les événements A : "la carte est un as" et C : "la carte est un cœur" sont-ils indépendants ?

b. Les événements R : "la carte est un roi" et F : "la carte est une figure" (valet, dame ou roi) sont-ils indépendants ?

48 On jette un dé une fois et on considère les événements suivants :

A : "Obtenir un nombre impair".

B : "Obtenir un nombre > 4".

Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse par un calcul.

49 Une compagnie d'assurance estime que les assurés peuvent être classés en deux catégories : ceux qui sont enclins aux accidents et ceux qui ne le sont pas. Ses statistiques montrent qu'un individu de la première catégorie a une probabilité de 0,4 d'en avoir un dans l'espace d'un an. Cette probabilité tombe à 0,2 pour les gens de l'autre catégorie. On suppose d'autre part que 30% de la population appartient à la première classe d'individus.

a. Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année de son contrat ?

b. Un signataire a un accident dans l'année qui suit sa signature. Quelle est la probabilité qu'il fasse partie de la classe à haut risque ?

On mélange tout !

50 On lance 6 fois de suite un dé. Calculer la probabilité d'obtenir 6 résultats différents.

51 On tire au hasard 5 cartes dans un jeu de 36 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir deux coeurs et trois piques.

52 Dans un lot de 12 ampoules, 4 sont défectueuses. On y choisit au hasard 4 ampoules. Calculer la probabilité d'en avoir au moins une bonne.

53 On jette un dé 6 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans cet ordre.

b. 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans un ordre quelconque.

c. Seulement des nombres pairs.

d. 1, 1, 1, 2, 2, 3 dans un ordre quelconque.

54 On jette une pièce de monnaie 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir :

a. Au moins une fois pile.

b. Au moins deux fois pile.

c. Exactement 5 fois pile.

d. Combien de personnes doivent lancer chacune dix fois une pièce de monnaie pour qu'il ait plus de 99% de chances que l'une d'entre elles (au moins) obtienne dix fois pile ?

55 On tire sans remise trois cartes d'un jeu de 52. Calculer la probabilité d'obtenir 3 trèfles.

56 Une classe comporte 10 garçons et 14 filles. Quatre garçons et six filles ont les yeux bleus. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Calculer la probabilité que cette personne soit un garçon ou qu'elle ait les yeux bleus.

57 Dans une école où il y a 6 classes, le comité d'élèves est formé de 12 personnes : 2 représentants par classe. Lors d'une séance, ce comité décide de former au hasard une commission interne de 6 membres. Quelle est la probabilité :

a. Que toutes les classes soient représentées dans cette commission ?

b. Qu'une classe au moins n'y soit pas représentée ?

c. Que la classe 4A, et seulement celle-ci, n'y soit pas représentée ?

58 On tire au hasard 9 cartes simultanément dans un jeu de 36 cartes.

a. Quel est la probabilité pour qu'il y ait le roi de cœur parmi les 9 cartes tirées ?

b. Déterminer la probabilité pour que, parmi les 9 cartes tirées, il y ait :

i Exactement un cœur

ii Aucun cœur

iii Exactement trois rois

c. Quelle est la probabilité pour qu'une main de 9 cartes contienne au moins un as ?

59 On jette un dé deux fois de suite.

a. Calculer la probabilité d'obtenir un total de 4 points.

b. Calculer la probabilité d'obtenir un total de 4 points si on sait que le premier jet a donné 2.

c. Calculer la probabilité que la somme des deux dés soit plus grande ou égale à 8 si on sait que le premier jet a donné 3.

60 Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Parmi ces 10 boules, 7 sont rouges. Parmi ces 7 boules rouges, 3 portent un numéro plus petit ou égal à 4. On tire une boule de cette urne et on constate qu'elle porte un numéro plus petit ou égal à 4. Calculer la probabilité que cette boule soit rouge.

61 On choisit au hasard une famille parmi celles qui comportent 2 enfants et on note dans l'ordre le sexe des enfants. On suppose que les événements "avoir un garçon" et "avoir une fille" sont équiprobables.

a. Calculer la probabilité que cette famille comporte 2 garçons.

b. Calculer la probabilité que cette famille comporte 2 garçons si l'on sait que l'aîné est un garçon.

c. Calculer la probabilité que cette famille comporte 2 garçons si l'on sait que au moins un des deux enfants est un garçon.

62 Une urne contient 2 boules noires et 3 rouges. On tire successivement et sans remise 3 boules.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire, une boule rouge et une boule noire (dans cet ordre).

b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux boules noires (dans n'importe quel ordre).

63 On considère un groupe comportant 3 hommes et 5 femmes. On choisit au hasard 2 personnes de ce groupe. Calculer la probabilité qu'une femme au moins soit choisie.

64 Une boîte contient 10 dés. Parmi eux se trouve un dé truqué tel que la probabilité d'obtenir un 6 est de 3 . On prend au hasard un dé dans cette boite, on le lance et on obtient 6. Calculer la probabilité que l'on ait tiré le dé truqué.

65 On a deux urnes. L'urne 1 contient deux boules blanches et trois boules noires, l'urne 2 trois blanches et quatre noires. On tire au hasard une boule de la première urne et on la place dans la seconde. On tire ensuite au hasard une boule de la seconde urne : quelle est la probabilité qu'elle soit noire ?

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES REPONSES

25 6 ; 30

26 24

27 479001600

28 24

29 840

30 277200

31 120

32

a 16 **b** 12

33 456976

34 1140

35 64

36

a. 12650 **b.** 303600

37

a. 1024 **b.** 59049 **c.** 210

38

a 1/52 **c** 1/4 **e** 9/13

b 1/13 **d** 4/13

39

a 1/8 **d** 7/16 **g** 1/32

b 0,5 **e** 1/64 **h** 1/8

c 1/8 **f** 15/64

40 4493 personnes

41

a 43/50 **b** 3/50 **c** 1/25

42

a. 0,25 **c.** 0,04 **e.** 0,06

b. 0,75 **d.** 0,92

43

a pas de lien ! **c** 1/2

b 5/16 **d** 0,375

44

a 0,3 **c** 0,5 **e** 0,2857

b 0,1 **d** 0,4 **f** dép.

45 1081/3436

46 95/294

47

a oui **b** non

48 Oui

49

a 0,26 **b** 0,4615

50 0,0154

51 3024/376992 ≈ 0,00802

52 494/495 ≈ 0,99798

53

a. 1/4656 ≈ 0,002572

b. 5/324 ≈ 0,01543

c. 1/64 ≈ 0,015625

d. 60/46656 ≈ 0,001286

54

a. 1023/1024 **c.** 63/1024

b. 1013/1024 **d.** 4714 personnes

55 11/850 ≈ 0,01294

56 2/3

57

a 16/231 ≈ 0,069264

a 215/231 ≈ 0,93074

b 20/231 ≈ 0,08658

58

a 1/4

b ≈ 0'21224 / ≈ 0,0385

c 0,70206

59 1/6

60 3/4

61

a 1/4 **b** 1/2 **c** 1/3

62

a 0,1 **b** 0,3

63 25/28

64 1/6

65 23/40

« Je n'ai pas besoin de croire. Pas envie d'être sûr. La probabilité me suffit. »

Didier Van Cauwelaert, «Le Père adopté»
écrivain français (1960-...)

A savoir en fin de chapitre

Combinatoire

✔ décomposition en étapes successives ; arbre de classement ; principe multiplicatif ;

✔ factorielle ;

✔ permutations et arrangements avec et sans répétitions ;

✔ combinaisons sans répétitions ;

✔ * combinaisons avec répétitions ;

Voir la théorie 1 à 3 et les exercices 1 à 5

Introduction aux probabilités

✔ notions d'expérience aléatoire, d'événement aléatoire élémentaire ou non, d'univers, d'événements disjoints (incompatibles) ;

✔ arbres, règles du produit et de la somme ;

✔ ensemble probabilisé fini, fini équiproblable : axiomes, théorèmes, exemples ;

Voir la théorie 4 à 6 et les exercices 6 à 19

Probabilité conditionnelle et indépendance

✔ probabilité conditionnelle : définition, exemples ;

✔ probabilité totale est formule de Bayes ;

✔ Indépendance de 2 événements aléatoires : définition, exemples, théorème.

Voir la théorie 7 à 9 et les exercices 20 à 24

Quelques exercices types en vidéo

en particulier des vidéos explicatives ...

https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/3e/complements/ch05