

KEEP
CALM
AND
ENJOY
MATHS

Problème

Dans la prison de Sikinia, il y a 200 cellules numérotées 1 ; 2 ; 3 ; ; 200. Ces cellules sont toutes occupées et sont naturellement fermées à clef. Lorsqu'on tourne la clef d'un demi tour dans la serrure, la porte s'ouvre, mais si on tourne encore la clef d'un demi tour, la porte est à nouveau fermée (et ainsi de suite).

Pour fêter le vingtième anniversaire de la république de Sinikia, le président décide une amnistie et il donne l'ordre suivant au directeur de la prison :

Vous partez de la cellule n°1 et vous tournez d'un demi tour toutes les serrures.

Vous partez de la cellule n°2 et vous tournez d'un demi tour toutes les deux serrures (une sur 2).

Vous partez de la cellule n°3 et vous tournez d'un demi tour toutes les trois serrures (une sur 3).

Et ainsi de suite.....

Finalement, vous partez de la cellule n°200 et vous tournez d'un demi tour toutes les 200 serrures (une sur 200). Un prisonnier sera libéré si, à la fin, sa porte est ouverte.

Question : Quels seront les prisonniers qui seront libérés ?

1 [Souvenirs] Nombres et variables

1. **Réduire** le plus possible (a, b des **variables** réelles) :

$$-2b - [4a + 3(12a - 5b) - (10b - 5a + 4a - 3 \cdot (-3)b) + 9a - 8b \cdot 3(-a)]$$

2. **Simplifier** le plus possible à la main, sans laisser de racine au dénominateur :

a. $\frac{90\sqrt{2} + 45\sqrt{3}}{90\sqrt{2}}$

b. $\frac{90\sqrt{2} \cdot 45\sqrt{3}}{90\sqrt{2}}$

c. $\frac{90\sqrt{2}}{90\sqrt{2} \cdot 45\sqrt{3}}$

d. $90 \frac{\sqrt{2}}{90\sqrt{2} - 45\sqrt{3}}$

3. **Simplifier** le plus possible à la main, sans laisser d'exposant négatif (x un nombre réel non nul) :

a. $\frac{x^{20} + x^{10}}{x^{10}}$

b. $\frac{x^{20} \cdot x^{10}}{x^{10}}$

c. $\frac{x^{20}}{x^{20} \cdot x^{10}}$

d. $\frac{x^{20}}{x^{20} - x^{10}} (x \neq \pm 1)$

4. **Calculer** à la main : $\frac{\frac{4}{9} - 1 - \frac{1}{3}}{\frac{14}{-15} - \frac{17}{12} : \frac{1}{8}}$

5. Calculer avec la calculatrice : $\frac{10^{18} + 10^{-18} - 10^{18}}{10^{-18}}$

6. Simplifier au maximum à la main la fraction $\frac{(3 \cdot 9)^{13} \cdot (-6)^{19}}{(-2^4)^{21} \cdot 81^{14} \cdot 8^{-20}}$

7. Que signifient les symboles $\mathbb{N}, \in, \mathbb{Q}, \subset, \subseteq, \notin, \cap, \mathbb{Z}, \setminus, \mathbb{R}, \cup, \emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^*, \exists, \nexists, \forall$

8. Que signifient les notations suivantes :

a. $\{2; 4\}$

b. $[2; 4[$

c. $(2; 4)$

d. $[2; 4$

e. $+\infty, -\infty, \pm\infty, \infty, [2; +\infty[$

9. **Factoriser** le plus possible :

a. $-3x^2 + 18x - 27$

c. $6x^2 - 5x + 1$

e. $(-4x + 8)(2x^2 - 5) - (4x - 8)(10x - 13)$

b. $16a^5b - 625ab^5$

d. $6x^2 - 5x + 2$

f. $-17x^2 + 3 - 4x + 6x^3$

Voir les exercices 1 à 9

2 [Souvenirs] Résoudre

1. **Résoudre** les **équations** suivantes, où $x \in \mathbb{R}$. Donner les **solutions** en **valeurs exactes** et simplifiées au maximum puis **arrondies** au dixième lorsque cela est pertinent:

a. $\frac{1}{6} - \frac{1}{3}x = \frac{5}{2} - (x + \frac{4}{3}x)$

d. $6x^2 - 5x = -1$

g. $(5x)^2 = 125$

b. $\pi x = \sqrt{2}x$

e. $6x^2 = 5x - 2$

h. $5x^2 + 125 = 0$

c. $-3x^2 + 18x - 27 = 0$

f. $5x^2 = 125$

i. $-17x^2 + 3 - 4x + 6x^3 = 0$

j. $(-4x+8)(2x^2-5) - (4x-8)(10x-13) = 0$

2. Résoudre les **inéquations** suivantes :

a. $\frac{x}{2} - \sqrt{2} \geq 2x - \frac{1}{3}$

c. $\frac{x^2 - 4x - 6}{x^2 - 4} < -\frac{1}{2}$

d. $-17x^2 + 3 - 4x + 6x^3 \geq 0$

b. $10x^3 - 4x < 3x^2$

Voir les exercices 10 à 11

3 [Souvenirs] Fonctions ... ou pas

1. Déterminer le domaine de définition de la **fonction** f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 7x + 6}$.

2. Donner la définition mathématique de « **fonction** ».

3. On considère la fonction $f(x) = (x+2)^2(1-x)$.

a. Construire le **tableau des signes** de f .

b. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 4$.

c. Sur une feuille quadrillée, esquisser une **représentation graphique** de f cohérente avec les réponses aux questions précédentes.

d. A quelle famille de fonction appartient f ?

4. On considère les fonctions g et h définies par $g(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ et $h(x) = 3 + \frac{1}{x-2}$.

a. Déterminer toutes les asymptotes de h .

b. Résoudre l'inéquation $h(x) \geq 6$.

c. Représenter graphiquement h et interpréter graphiquement le résultat trouvé en b.

- d. Déterminer les plus grands ensembles A et B pour que h soit bijective de A dans B .
- e. Déterminer les fonctions composées $h \circ g$ et $g \circ h$ en simplifiant au maximum les réponses.
- f. Qu'en déduire quant à la relation entre h et g ?
- g. Représenter la réciproque h^{-1} de h dans le même repère que h .
- h. A quelle famille de fonction appartiennent f et g ?

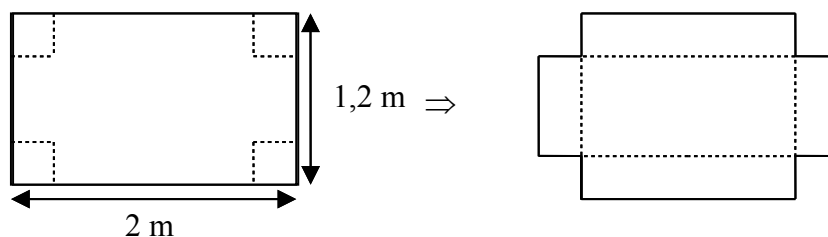
5. Soient le **cercle** Γ d'équation $x^2 + y^2 = 5$ et la **droite** d_1 d'équation $x - 2y - 3 = 0$.

- a. Déterminer l'équation cartésienne de la droite d_2 qui est parallèle à d_1 et qui passe par le point $A(3; -2)$.
- b. Déterminer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle Γ et la droite d_1 .
- c. Déterminer le(s) point(s) d'intersection entre le cercle Γ et l'axe Oy .
- d. Représenter graphiquement Γ , d_1 et d_2 dans un même repère.
- e. Pourquoi Γ n'est-il pas la courbe représentative d'une fonction ?

Voir les exercices 12 à 28

4 [Souvenirs] Modéliser

1. Vous disposez d'un stock de plaques rectangulaires au contour rigide, mesurant 1,2 mètres de large et 2 mètres de long. Pour votre prochain déménagement, vous désirez construire des cartons, ouverts vers le haut (en forme de parallélépipèdes rectangles) selon le procédé suivant : on découpe dans les quatre coins de la plaque le même carré, puis on plie les côtés et on les scotche pour former la boîte.



Exprimer le volume obtenu en fonction de la longueur des côtés découpés et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Le directeur d'un théâtre a remarqué qu'à 8 chf la place, il peut compter sur 500 spectateurs, et que chaque baisse de 0,50 chf lui amène 100 spectateurs de plus. Poser n = baisse du prix du billet et considérer la fonction $f(n)$ = recette totale.

- Choisir quelques valeurs de n , calculer leurs **images** par f et représenter graphiquement.
- Trouver une formule générale pour $f(n)$.
- Déterminer le domaine de définition de f .
- Représenter graphiquement la courbe représentative de f .
- Combien doit-on faire payer la place pour obtenir une recette maximale ? Quelle est alors cette recette ? Justifier (on supposera la capacité de la salle suffisante).

3. Pour une population particulière de saumons, la relation entre le nombre r de poissons qui fraient et le nombre s de poissons qui survivent jusqu'à l'âge adulte est donnée par $s = \frac{4500r}{r+500}$.

- Interpréter graphiquement.
- À quelle condition a-t-on $s > r$?

[Voir les exercices 29 à 35](#)

5 [Souvenirs] Argumenter

1. On considère la **conjecture** suivante. L'écrire sous forme d'une **implication** puis déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant précisément : « Le produit de deux impairs consécutifs est un multiple de 3 ».

2. Vrai ou faux ? Justifier.

- Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

3. Le calcul de la pente d'une droite ne dépend pas du choix des deux points.

4. Si f est une fonction polynomiale admettant au moins deux zéros, alors tout minimum ou maximum local de f est situé exactement entre deux zéros successifs.

[Voir les exercices 36 à 39](#)

1 [Souvenirs] Ressources pour se mettre à jour

Toutes les fiches indiquées ci-dessous, ainsi que de nombreuses vidéos explicatives, sont disponibles ici :

<https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-2e/complements>

<https://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-3e/complements>

Fiches-résumé de 1^{re} année sur les nombres

Fiche résumé sur les nombres

Fiche résumé sur les ensembles

Fiches-résumé de 1^{re} année sur la construction mathématique

Fiche résumé sur la construction mathématique

Fiches-résumé de 1^{re}/2^e années sur les fonctions

Fiche résumé sur les fonctions

Fiche résumé "2 points - 3 compétences"

Fiche résumé "Equations de degré 1"

Fiche-résumé "Degrés 0 et 1"

Fiche-résumé "Déterminer une équation de droite"

Fiche résumé "Systèmes 2x2"

Fiches-résumé de 1^{re} / 2^e année sur l'algèbre

Fiche résumé sur le calcul littéral de base

Fiche résumé sur la factorisation

Fiche résumé sur les équations de degré 1

Fiche résumé sur les degrés 0 et 1

Fiche résumé sur les systèmes 2x2

Fiche résumé sur les équations 3x3

Fiche résumé sur les équations de degré 2

Fiche-résumé la complétion du carré

Fiche résumé "Représenter graphiquement le degré 2"

Fiche résumé sur tout le degré 2

Fiche résumé sur les degrés supérieurs à 2 par factorisation

Fiche résumé sur les zéros de fcts polynomiales

Fiche-résumé sur les équations rationnelles

Fiches-résumé de 1^{re} et 2^e sur la trigonométrie

Fiche résumé sur la trigonométrie du tr. Rectangle

Fiche résumé sur la trigonométrie du tr. quelconque

Fiches-résumé de 2^e sur log/exp

Fiche résumé "exponentielles"

Fiche résumé "logarithmes"

Démonstrations importantes en 1^{re} et 2^e

Démonstration de l'irrationalité de racine de 2

Théorèmes sur les puissances entières - démonstrations

Démonstration de la 1^{re} identité remarquable avec GeoGebra

Théorème du reste nul

Théorème du reste / théorème du diviseur

Théorème sur la recherche de zéros entiers

Théorème sur la recherche de zéros rationnels

Théorème du cosinus

Théorème du sinus

Fiches-résumé globales

Fiche résumé sur les maths

Fiche résumé "A savoir à l'entrée en 2e/3e"

Fiche résumé "A savoir sur les fonctions à l'entrée en 2e"

Fiche résumé "A savoir sur les fonctions à l'entrée en 3^e"

Fiche résumé "A savoir" à l'entrée en 2e (et en 3e ... et en 4e !)

Nombres et variables

1 Réduire en donnant toutes les étapes de calcul et donner une réponse exacte et simplifiée au maximum sans exposants négatifs et sans racines au dénominateur :

- a. $-2 - [4 - 3(-7 - 1) - (10 - 6 + 4 - 3 \cdot 3) \cdot 9 + 8 \cdot (-3)]$
- b. $\frac{12}{16} + \frac{5}{12} - \frac{3}{9}$
- c. $\frac{33}{48} \cdot \frac{24}{44} \div \frac{5}{6}$
- d. $\frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3} \right)$
- e. $\frac{(a^9)^{-4} a^5}{(a^2 a^{-7})^7}$ (où $a \in \mathbb{R}^*$)
- f. $\frac{32^{-19} \cdot 8^{-40} \cdot (10^{19})^3}{(5^{-14} \cdot 2^{-1} \cdot 4^{20})^{-4}}$
- g. $\frac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}$
- h. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8} - 2}$
- i. $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

2 Ecrire à la main 0,000000089787 en écriture scientifique.

3 Ecrire à la main $\frac{19}{7}$ sous forme décimale.

4 Ecrire à la main $12,4\overline{56}$ comme fraction irréductible.

5 Représenter dans un diagramme de Venn les nombres suivants :

$$-23454; -\frac{13}{9}; 2^{2018}; 123,\overline{009}; \frac{0}{4}; \frac{0}{0}; \sqrt{2}; 2,\overline{9}; -\sqrt{100}$$

6 Compléter par le symbole adéquat:

- a. $\mathbb{Q} \dots \mathbb{Z}$ c. $-3,\overline{9} \dots \mathbb{Z}$ e. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \dots$
- b. $-\sqrt{-8} \dots \mathbb{R}$ d. $1,\overline{9} \dots 2$ f. $\mathbb{Q} \setminus \dots = \mathbb{Q}^*$

7 Compléter le tableau suivant:

A	$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\}$	
B		$] -6; 5]$
C	$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \geq x\}$	
D		$] -4; +\infty [$

puis, pour les mêmes ensembles A , B , C et D , déterminer avec la notation adéquate:

- a. $A \cup B =$ c. $A \setminus B =$
- b. $C \cap D =$ d. $C \setminus D =$

8 Factoriser le plus possible

a. $7x^2 + 5x - 2$

f. $49x^2 + 28x + 4$

b. $12x^3y - 3xy^3$

g. $x^2 + 5x - 14$

c. $3(x-1)^2 - 9(x-1)$

h. $2x^2 + 16x + 24$

d. $7a^3b^4c - 28a^3b^3c^2 + 28a^3b^2c^3$

i. $3x^2 - 3x - 36$

e. $(5x-10)(4x^2-5) - (13x^2+6)(10-5x)$

j. $(3a+2b)^2 - (a-7b)^2$

9 Factoriser au maximum l'expression $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$.

Résoudre

10 Résoudre les équations suivantes, où x est une variable réelle. Donner les solutions en valeurs exactes et simplifiées au maximum :

a. $-\frac{1}{3}x - (\frac{5}{2} - x) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$

i. $x^2 - 128 = 0$

b. $-(5x-1) = (-3) \cdot x + 8 + (-2x)$

j. $x^2 + 2x = -1$

c. $x(x+7) = x^2 - 1$

k. $(5x-4)^2 = (3x+7)^2$

d. $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$

l. $x^3 - x = 2x^2 - 2$

e. $4\sqrt{7}x - 0,8 = 2\sqrt{7} - 1,6x$

m. $(9x-5)^2 = 9$

f. $x^2 - 3x = -4$

n. $4x^3 = 36x$

g. $3x^2 = 6x + 1$

o. $(3x+2)(x^2-1) = (9x^2-4)(x+1)$

h. $x^2 = 121$

p. $x^6 = x^2$

q. $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = 0$

11 Résoudre :

a. $\frac{x}{3} - 5 < 3x - \frac{1}{2}$

b. $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 \geq 0$

c. $\frac{3x^2 - 19}{x^2 - 2x - 3} \geq 4$

Fonctions

12 Déterminer le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}}{-x^2-12x-32}$

13 Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ou linéaires ? Justifier.

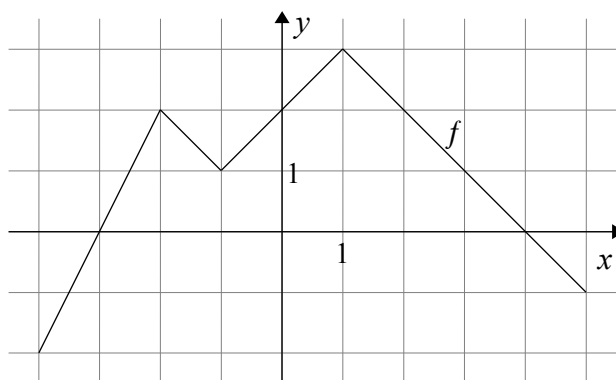
a. $f_1(x) = 1$

b. $f_2(x) = -x$

c. $f_3(x) = \frac{x}{3}$

d. $f_4(x) = \frac{3}{x}$

14 La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie pour $x \in [-4; 5]$:



À l'aide de cette représentation graphique, déterminer :

a. $f(-2) =$

b. l'ensemble des zéros de $f =$

c. l'ordonnée à l'origine de $f =$

d. l'ensemble des préimages de 1 =

e. un nombre qui a quatre préimages par f est

f. le tableau de signes de f .

g. l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles f est positive :

h. les valeurs de x pour lesquelles f est strictement négative :

i. l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq 2$.

15 Soient f et g deux fonctions affines. Une représentation graphique de f contient les points $(2;4)$ et $(-4;-1)$ et la fonction g est définie par $g(x) = 3 - \frac{5}{4}x$.

a. Donner l'expression algébrique de f .

b. Représenter graphiquement de f et g .

c. Déterminer les zéros de f et g .

d. Calculer les coordonnées du point d'intersection des graphes de f et de g .

16 Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes, puis tracer leurs courbes représentatives :

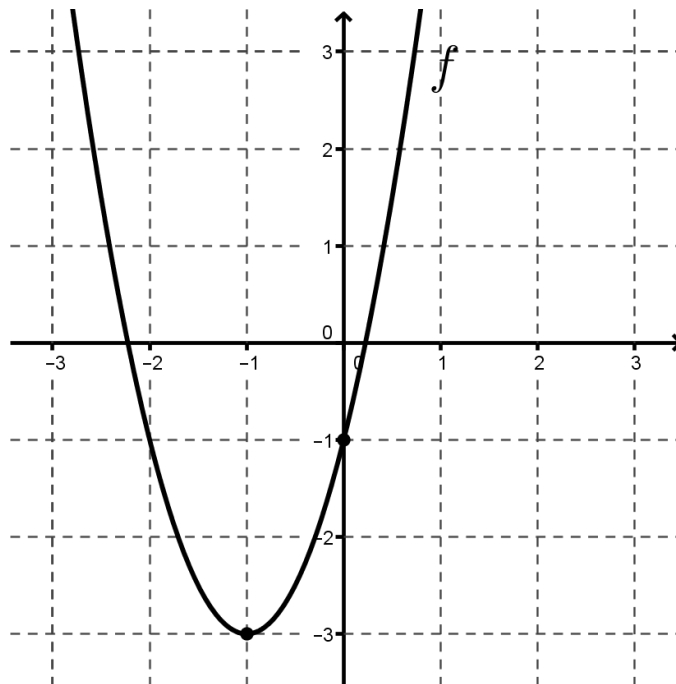
a. $f_1(x) = \frac{2x-3}{4}$

b. $f_2(x) = \frac{2-x}{3}$

17 Trouver dans chaque cas la fonction affine f dont la courbe représentative d :

- a. contient le point $(3; 2)$ et est de pente 4;
- b. est parallèle à la droite d'équation $y = -x+7$ et contient $(-6; 8)$;
- c. contient par les points $(5; 6)$ et $(-9; 5)$;
- d. est perpendiculaire à la droite d' d'équation $y = 3x - 4$ et $Z_f = \{2\}$;
- e. est de pente $-\frac{1}{2}$ et telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

18 Voici une représentation graphique d'une fonction f du deuxième degré ; sa courbe représentative contient le point $(0; -1)$ et $(-1; -3)$ est son sommet :



Déterminer les 3 formes (factorisée, développée et canonique) de f .

19 Pour la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, donner l'ordonnée à l'origine, l'ensemble des zéros, l'axe de symétrie, le sommet et la représenter graphiquement de façon précise.

20 On considère la fonction polynomiale f définie par $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 12x + 16$.

- a. Calculer $f(-1)$ et $f(4)$.
- b. Déterminer exactement tous les zéros de f .
- c. Factoriser f au maximum.

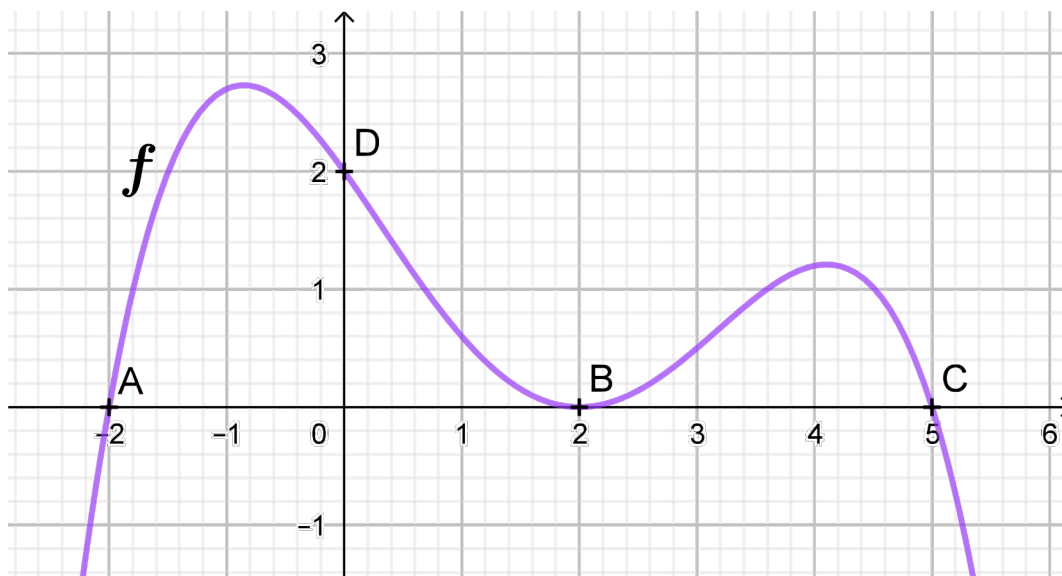
21 On considère la fonction $f(x) = -\frac{1}{5}(x-3)^2(1-x)(2x+5)$.

- Donner le tableau des signes de la fonction f .
- Déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) < 0$.
- Esquisser une représentation graphique de f .

22 Calculer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle Γ d'équation $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ et la droite d d'équation $-x + 4y - 4 = 0$, puis les représenter graphiquement dans un même repère.

23 Déterminer l'équation du cercle Γ de centre $O(2; -5)$ auquel appartient le point $B(-3; 7)$.

24 On considère la représentation graphique ci-dessous, où f est une fonction polynomiale telle que les points $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C(5; 0)$ et $D(0; 2)$ appartiennent à la sa courbe représentative :



Déterminer une expression algébrique de degré minimal pour f en indiquant toutes les étapes du raisonnement.

25 On considère l'inéquation $x+4 > x^2$.

- Esquisser dans un même repère une représentation graphique de la droite d d'équation $y = x + 4$ et de la parabole P d'équation $y = x^2$ pour $x \in [-3; 3]$.
- Expliquer en français ou indiquer dans le repère à quoi correspondent les solutions de l'inéquation $x + 4 > x^2$.
- Faire une estimation graphique de la solution de cette inéquation.
- Déterminer la solution exacte de l'inéquation $x + 4 > x^2$.

26 Pour une raison inconnue, Léo et Kate doivent absolument s'envoyer des messages chiffrés. Pour plus de sécurité, ils codent donc leurs messages. x désigne un nombre envoyé ou reçu par Léo et y désigne un nombre envoyé ou reçu par Kate. Ces deux nombres sont reliés par la relation $3x - 2y = 4$.

- Quel est le nombre reçu par Kate si Léo envoie (-8) ?
- Donner une fonction f qui corresponde à la transformation du nombre x envoyé par Léo en celui reçu par Kate.
- Donner une fonction g qui corresponde à la transformation du nombre y envoyé par Kate en celui reçu par Léo.
- Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f \circ g$. (Si vous n'avez pas trouvé les réponses en b. et c., utilisez les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{2}{3}x + 5$ et $g(x) = \frac{3x - 15}{2}$).
- Quelle est la réciproque de g ? Justifiez votre réponse.

27 On considère les fonctions : $f(x) = \frac{4}{3x+1}$ et $g(x) = \frac{-x+4}{3x}$.

- Calculer $(f \circ g)(x)$ et exprimer le résultat sous la forme la plus simple possible.
- Exprimer la fonction f comme composition des fonctions suivantes :

$$a(x) = \frac{4}{3x}, b(x) = \frac{1}{x}, c(x) = 3x, d(x) = 4(3x+1), h(x) = x+1, k(x) = 4x$$

28 On considère l'inéquation : $\frac{-2x^2+4}{x^2-2x-3} \geq -4$.

- Montrer que cette inéquation est équivalente à $\frac{x^2-4x-4}{x^2-2x-3} \geq 0$.
- Résoudre cette inéquation.

On considère maintenant les fonctions $f(x) = \frac{-2x^2+4}{x^2-2x-3}$ et $g(x) = -4$.

- Déterminer le domaine de définition D_f et les intersections de f avec les axes.
- Ecrire l'équation de chacune des asymptotes de f .
- Esquisser les représentations graphiques de f et g sur un même repère.
- La solution de l'inéquation de a. semble-t-elle cohérente avec les représentations graphiques du point d. ? Justifier.

Modéliser

29 Trouver deux nombres dont la somme vaut 1 et la somme des carrés vaut 2.

30 En vendant ensemble deux objets pour 210 chf, on réalise un bénéfice de 5%. Trouver le prix d'achat de chaque objet sachant que l'on a gagné 10% sur l'un et perdu 10% sur l'autre.

31 On veut carreler une pièce carrée avec des carreaux carrés. En disposant 20×20 carreaux, il reste une partie non carrelée de $0,81 \text{ m}^2$. Avec 21×21 carreaux, on est obligé de couper les carreaux, la chute couvrant une surface de $0,83 \text{ m}^2$.

Trouver les dimensions de la pièce et des carreaux.

32 Les sommets du carré grisé appartiennent aux côtés du carré $ABCD$.

a. Exprimer l'aire grisée en fonction de x .

b. Esquisser le graphique de cette fonction "aire grisée".

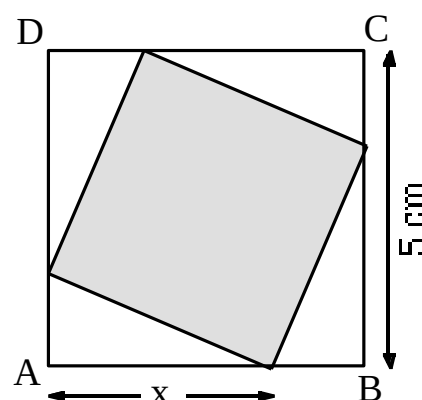
c. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle minimale ?

d. Pour quelle(s) valeur(s) de x cette aire est-elle maximale ?

e. Combien valent ces aires minimale et maximale ?

f. Déterminer x pour que l'aire grisée soit égale à 15 cm^2 .

g. Interpréter graphiquement le résultat trouvé en f. sur le graphique de b.



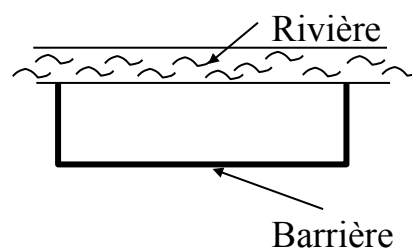
33 Avec 300m de grillage, on clôture un terrain rectangulaire d'aire la plus grande possible et dont la longueur s'appuie sur le bord d'une rivière rectiligne, ce côté ne nécessitant pas de grillage. On appelle x la largeur du terrain (la longueur est plus grande que la largeur).

a. Montrer que la longueur du terrain est $300-2x$ puis déterminer le domaine des valeurs intéressantes pour le problème (D_{vipp}).

b. Montrer que l'aire du terrain à clôturer en fonction de x est donnée par $f(x) = -2x^2 + 300x$.

c. En déduire la largeur x à prendre pour que le terrain soit d'aire maximale. Préciser alors cette aire et la longueur correspondante.

d. Interpréter graphiquement tout le problème.



34 On considère les points $A(-4 ; 4)$, $B(-\frac{5}{4} ; 2)$ et $C(0 ; 1)$.

a. Sont-ils alignés ?

b. Existe-t-il une parabole qui passe par A , B et C ?

Argumenter

35 Si le père Noël a un rhume, alors il ne part pas distribuer les cadeaux.

- Énoncer la réciproque de cette conjecture.
- Énoncer la contraposée de cette conjecture.

36 Démontrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

37 On considère les conjectures suivantes. Les écrire sous forme d'une implication puis déterminer si elles sont vraies ou fausses en justifiant précisément :

- La somme de 3 multiples de 5 consécutifs est un multiple de 15.
- La somme d'un entier naturel qui se termine par 1 et d'un entier naturel qui se termine par 2 est un entier qui se termine par 3.
- L'écriture $\sqrt{-x}$ n'a jamais de sens.
- $\sqrt{100} = \pm 10$
- Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
- La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
- Deux triangles rectangles sont semblables
- Deux triangles équilatéraux sont isocèles

38 Pour chacune des conjectures suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse en justifiant précisément :

- Si f est une fonction polynomiale qui a exactement 4 zéros, alors f est une fonction polynomiale de degré 4
- Si f est divisible par $(x-3)^2$, alors $f(9) = 0$.
- L'équation $x^2 + 4x + y^2 = 0$ est l'équation d'un cercle de rayon 4
- Si $x \leq 1$, alors $x^2 \leq x$
- $x^{2017} - 2^{2017}$ est divisible par $x - 2$

« Il y a trois sortes de mathématiciens,
ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas »

Mathématicien inconnu

Prérequis de 1^{re} et 2^e années pour l'entrée en 3^e année

Nombres

- ✓ ordre des opérations, gestion des calculs avec parenthèses ;
- ✓ fractions, opérations avec les fractions ;
- ✓ nombres rationnels ; équivalence de l'écriture décimale finie ou infinie périodique, transformations d'une écriture à l'autre ; problèmes de proportionnalité ;
- ✓ puissances entières positives, négatives, fractionnaires : définitions, propriétés et calculs ;
- ✓ racines carrées : définitions, propriétés et calculs ; savoir que $\sqrt{4}=2$ et non $\sqrt{4}=\pm 2$;
- ✓ nombre irrationnels et réels ; démonstration de l'irrationalité de racine de deux ;
- ✓ ensembles de nombres : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; notations $+\infty, -\infty, \pm\infty, \infty$
- ✓ notations ensemblistes : $\mathbb{N}, \in, \mathbb{Q}, \subset, \subseteq, \notin, \cap, \mathbb{Z}, \setminus, \mathbb{R}, \cup, \emptyset, \mathbb{N}_+, \emptyset, \mathbb{Z}^*, \exists, \nexists, \forall$
- ✓ intervalles réels (ouverts, fermés), opérations sur les intervalles ;

Algèbre et fonctions

- ✓ plan, point, axes, abscisse, ordonnée, origine, repère orthonormé, coordonnées ;
- ✓ distance entre deux points/milieu entre deux points ;
- ✓ pente entre deux points/pente d'une droite ;
- ✓ variable - constante ; expression - équation - identité ;
- ✓ équation - solution - ensemble des solutions - résoudre - équations équivalentes ; théorème sur les équations équivalentes ;
- ✓ factoriser/développer (réduire) une expression; termes/facteurs ; méthodes de factorisation : mise en évidence, identités remarquables, pour le degré 2 : Viète, « trucs », division polynomiale ;
- ✓ représentation graphique d'une équation à deux inconnues ;
- ✓ cercles (centre, rayon) / équations $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
- ✓ définition intuitive et mathématique de fonction ; variable dépendante/indépendante ;
- ✓ image - préimage - zéros - domaine de définition - représentation graphique ;
- ✓ différence entre $f, f(x)$ et courbe représentative de f ;
- ✓ fonctions élémentaires : fonctions constantes (de degré 0), de degré 1, « racine carrée », « valeur absolue », « inverse », « cube », « puissance quatre » ;
- ✓ classification des fonctions : polynomiales, rationnelles, *trigonométriques*, *logarithmiques*, *exponentielles* : définitions, principales propriétés ;
- ✓ fonctions composées ;
- ✓ bijection - réciproque - lien graphique entre f et sa réciproque ;
- ✓ degrés 0 et 1 :
 - ✓ expressions, équations, fonctions ;
 - ✓ droites horizontales et équations $y = b$;
 - ✓ droite obliques (linéaire/affine) / équations $y=ax+b(a\neq 0)$;



- ✓ systèmes d'équations 2×2 - interprétation géométrique ;
- ✓ droites verticales / équations $x = a$;
- ✓ degré 2 :
 - ✓ expressions, équations, fonctions ; formes développée, factorisée, canonique (standard) ;
 - ✓ résoudre une équation de degré 2 (factorisation, Viète), factoriser une expression de degré 2 (mise en évidence - 4e id. rem - Viète) ;
 - ✓ représentation graphique (parabole) ; axe de symétrie, sommet ;
- ✓ polynômes (degré, coefficients), opérations entre polynômes ;
- ✓ recherche de racines (zéros) d'un polynôme : thm du reste nul, thm sur les zéros entiers, * thm sur les zéros rationnels ;
- ✓ inéquations / inéquations équivalentes / thm sur les inéquations équivalentes / tableaux de signes ; interprétation graphique ;
- ✓ fraction rationnelles, équations rationnelles et fonctions rationnelles / domaine de définition ; tableaux de signes ; représentation graphique ;

Calculatrice

- ✓ maîtrise de la calculatrice (mémoires, menu « math », division avec reste, ...) ;
- ✓ regard critique ;

Modélisation

- ✓ utiliser le-les bon-s outils mathématiques pour résoudre des problèmes ;
- ✓ Dviip : domaine des valeurs intéressantes pour le problème (considéré) ;
- ✓ approches numérique/algébrique/géométrique ;

Raisonnement mathématique

- ✓ notion fondamentale/axiome ;
- ✓ conjecture - contre-exemple - démonstration - théorème ;
- ✓ implication ; hypothèse - conclusion - hypothèses implicites ;
- ✓ réciproque - contraposée - démonstration directe ou par l'absurde.

Géométrie (pour rappel - non traité explicitement dans ce chapitre)

- ✓ angles, mesure d'un angle en degré et en radian ;
- ✓ définition de π ;
- ✓ triangles isocèles, rectangles, équilatéraux ;
- ✓ théorème de Pythagore ; réciproque
- ✓ triangles semblables, côtés correspondants, théorème de Thales, réciproque ;
- ✓ théorèmes sur les angles inscrits, au centre.



Notes personnelles

A vertical dotted line on the left side of the page, followed by a series of horizontal dotted lines for writing.