« Mettre racine de trois à zéro, 9CO-13PO-LME »

Fichier : sm07_racinedetroisazero_9co13po.pdf

Fiche de présentation

Titre de l'activité	Mettre racine de trois à zéro
Sous-titre	Non décimalité[1] de la racine carrée de trois.
Degré(s) concerné(s)	9CO-13PO
Durée estimée	2 périodes
Résumé	Quel nombre décimal faut-il soustraire à la racine de trois pour obtenir zéro ?
Contexte d'usage de la calculatrice	APPROFONDIR RECHERCHER
Contenus et compétences mathématiques visées	Nombres non décimaux[1] et non rationnels. Approximation décimale de nombres irrationnels. Représentation des nombres irrationnels avec la calculatrice. Notion de limite
Prérequis	Définition de racine carrée d'un nombre, calcul dans D et Q.
Liens avec les plans d'études et moyens d'enseignement	789CO Nombres et Opérations: « *Décomposition en facteurs premiers, diviseurs, multiples, critères* » Usage de la calculatrice CO & PO apprentissage du raisonnement. encadrer une racine définition d'un nombre irrationnel savoir mobiliser et utiliser l'écriture scientifique fonction racine carrée (PO) se familiariser avec le calcul infinitésimal, les nombres réels : limites, suites (PO).
Mots-clé	Racine carrée, irrationnel, approximation décimale, limite.
Source	IUFM Paris (http://maths.creteil.iufm.fr => second_degré => Mathématiques et TICE => La calculatrice au collège) - adaptations Jean-Marie Delley et Ruhal Floris après expérimentations en 1ère collège pour la brochure calculatrice (« à la recherche de racine de huit » ici version un peu différente).

[1] Un nombre décimal est un nombre pouvant s'écrire avec un nombre fini de décimales.

Énoncé élève : racine de trois à zéro

a) Calculer $\sqrt{3}$ avec votre machine et **noter le résultat sur une feuille**.
Appelons x le nombre que vous avez noté. Taper [CLEAR].

b) Taper $\sqrt{3}$ - x. Que pensez-vous du résultat ?

c) Le carré du nombre x est-il égal à 3? Justifier (faire le calcul avec et sans calculatrice)

d) Puisque $\sqrt{3}$ - x. est négatif, remplacer x par un nombre plus petit. Trouve-t-on zéro cette fois ?

e) Quel nombre décimal faut-il soustraire à $\sqrt{3}$ pour obtenir 0 ? Le carré du nombre trouvé est-il vraiment égal à 3 ? Y a-t-il plusieurs solutions ?

f) Est-il possible de trouver un nombre décimal x (qui a un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule) tel que $\sqrt{3}$ -x soit parfaitement égal à zéro ?

g) La suite d'opérations suivante permet de faire afficher le nombre qu'utilise la calculatrice à la place de $\sqrt{3}$:

[2nd] [x^2] [3] [)] [STO▶] [ENTER] [2nd] [STO▶]

Comparer les deux lignes d'affichage !

h) Taper la suite d'opération suivantes :

[2nd] [x^2] [3] [)] [ENTER] puis, immédiatement sans effacer [x^2] [ENTER]

Qu'en conclure ?

i) Finalement, que vaut $\sqrt{3}$?

j) Trouver un encadrement de $\sqrt{3}$ au millième près à l'aide de votre calculatrice.

k) Quel est l'encadrement le plus précis possible que fournit votre machine ?

Commentaires pour le maître

activité *Mettre racine de trois à zéro, 5P-11PO*

Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)	<u>Intentions</u> Clarifier les connaissances des élèves sur les nombres irrationnels et leurs approximations décimales et clarifier également la manière dont calculatrices (et ordinateurs) traitent ces nombres. Dans le curriculum, les nombres irrationnels sont introduits à travers le nombre π (calcul de l'aire et du périmètre d'un cercle) et la racine carrée (théorème de Pythagore) et confondus avec l'emploi des touches correspondantes de la calculatrice. Il s'agit de (re)mathématiser ces objets. <u>Difficultés et démarches possibles</u> Il est important que les élèves respectent les consignes et en particulier qu'ils prennent note du résultat affiché par la calculatrice pour $\sqrt{3}$ et le retapent complètement (pas d'utilisation de mémoire, par exemple). Pour la partie c), refuser de calculer sans calculatrice le carré du nombre x. Il est très important de le faire (éventuellement au tableau noir) car tout le raisonnement s'appuie sur ce qui se passe avec la dernière décimale de x. La partie e) qui exige un peu d'initiative de la part des élèves qui ne vont pas forcément penser à rajouter une décimale, mais plutôt à modifier la dernière décimale. En ce qui concerne f), il est probable que pour certains élèves, $\sqrt{3}$ -x soit uniquement associé à un calcul à faire avec une calculatrice et non à un nombre existant en tant que tel, sans le calcul. Pour ces élèves, le fait d'obtenir zéro à la calculatrice est alors suffisant pour donner une réponse. D'où le « parfaitement » dans la question qui doit inciter à imaginer que le zéro soit vraiment zéro ($0,\overline{0}$). Le terme encadrement au millième ne sera peut-être pas compris. <u>Relances</u> Préciser que zéro est seulement $0,\overline{0}$ et non 0,00000000000001 ni même 0,0000000000000000000000000000000000001… Définir encadrement à 10^{-n}. <u>Mises en commun</u> (voir sous déroulement ci-dessous) <u>Variables didactiques</u> Testé uniquement sur la TI34II. Le choix de $\sqrt{3}$ est très stratégique : nous n'avons pas trouvé d'autre nombre pour lequel à la fois la calculatrice n'affiche pas 0 pour $\sqrt{3}$ -x et le carré de x à la calculatrice ne soit pas 3.

Proposition(s) de déroulement	Après une période de travail individuel sur a) à d), effectuer une mise en commun puis faire travailler en groupes pour la suite. La mise en commun finale porte sur la non décimalité de $\sqrt{3}$ et sur le traitement des racines carrées par la calculatrice (arrondis) ainsi que sur la différence entre valeur exacte et valeur arrondie ou tronquée à 10^{-n}.
Prolongements possibles (au CO et PO)	(I) Peut-on trouver une fraction $\frac{p}{q}$ (p et q entiers !) telle que $\sqrt{3}-(\frac{p}{q})$ soit égal à zéro ? Préparation à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{3}$. Lien avec le thème fractionner les racines, cf par exemple les activités intitulées : « Les fractions continues pour approcher les nombres » (II) Calculer avec votre machine $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. • Peut-on être sûr de ce résultat ? • Quelle conjecture peut-on tirer de ces calculs ? • Peut-on démontrer cette conjecture ? Généraliser la conjecture établie et la démontrer.
Éventuels commentaires après les avoir testées (du maître, des élèves, …)	
Productions d'élèves	

Éléments pour la synthèse

a) Le nombre x affiché est 1.732050808

b) Le calcul $\sqrt{3}$ - x affiche : -4.31×10^{-10} qui est égal à -0,000000000431. Ce n'est pas zéro comme on pourrait s'y attendre. Le nombre calculé par la machine pour $\sqrt{3}$ n'est pas exact.

c) Le carré du nombre x ne peut pas être 3. La calculatrice obtient 3,000000001 et en effectuant un calcul écrit posé (ou en utilisant une calculatrice symbolique) on obtient 3,000000001493452864.

d) Avec 1.732050807, on obtient un nombre positif non nul. Il faut essayer avec des nombres compris entre 732050807 et 1.732050808, par exemple x = 1.7320508075. On obtient zéro pour $\sqrt{3}$ - x et là, surprise ! On obtient zéro aussi pour x = 1.7320508073, x = 1.7320508074, x = 1.7320508076, x = 1.7320508077, x = 1.7320508078.

e) Voir ci-dessus.

f) Aucun de ces nombres n'a son carré égal à trois ! Il est facile de s'en rendre compte en pensant à la manière d'effectuer la multiplication posée : le dernier chiffre sera forcément 9, 6, 5 ou 4. On peut éventuellement utiliser un logiciel de calcul symbolique.

g) La calculatrice en sait plus qu'elle ne nous montre. On s'en rend compte en effectuant les manipulations proposées.

h) Il y a des chiffres cachés qui lui permettent d'obtenir ce résultat qui est donc un arrondi..

i) $\sqrt{3}$ ne peut pas être un nombre décimal fini, on peut toujours rajouter des décimales. On n'obtiendra toujours que des approximations.

j) $1.732 < \sqrt{3} < 1.733$

k) à 10^{-11}, soit au cent-milliardième…