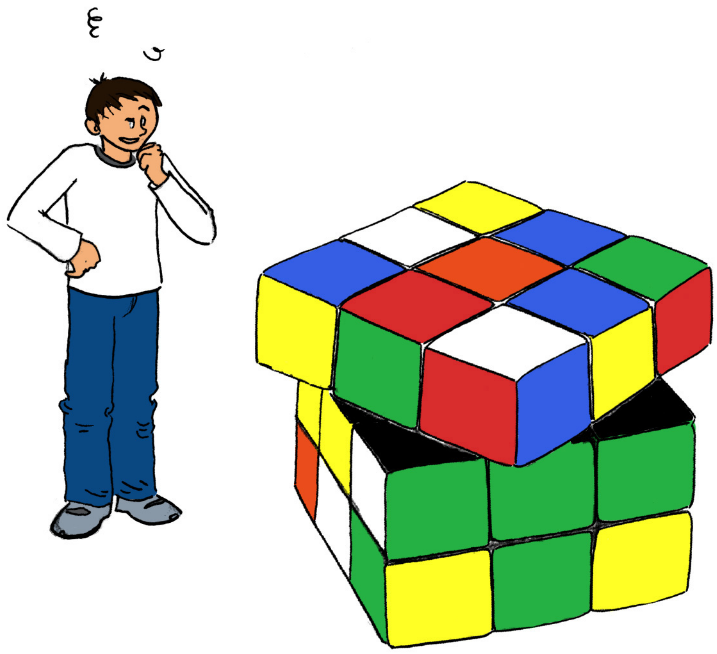
Volumes

16



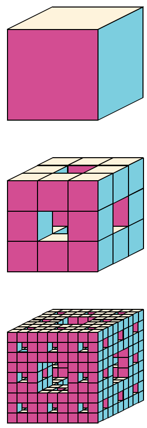
Narration de recherche

À la première étape, on considère un grand cube d'arête 9 cm formé de petits cubes de volume 1 cm^3.

À la deuxième étape, on enlève tous les cubes moyens situés au centre des faces et à l'intérieur comme sur la 2^e figure ci-contre.

À la troisième étape, on recommence en enlevant les petits cubes situés au centre des faces et à l'intérieur de chaque cube moyen restant, comme sur la 3^e figure.

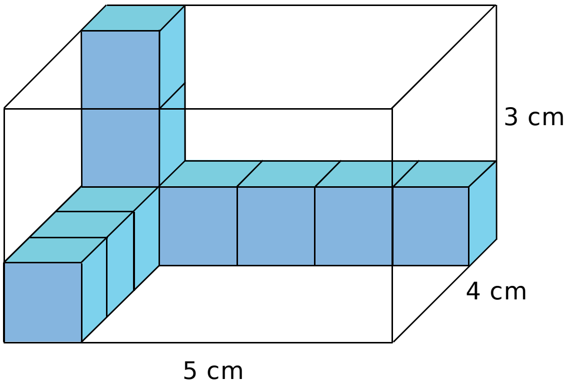
Calculer en cm^3 le volume de l'objet aux étapes 1, 2 et 3.



Prérequis et activités de découverte

Activité 1 : Volume d'un parallélépipède rectangle

1. On souhaite remplir la boîte ci-dessous en forme de **parallélépipède rectangle** avec des cubes d'un centimètre d'arête. On rappelle qu'un cube de 1 cm d'arête a un **volume** de 1 cm³.



a. Combien de cubes faut-il pour remplir le fond de la boîte ?

b. En comptant les cubes déjà dans la boîte, combien de couches faut-il pour remplir toute la boîte ?

c. En comptant les cubes déjà dans la boîte, combien de cubes faut-il au total pour remplir toute la boîte ?

d. Déduis-en le volume de cette boîte.

2. Reprends les questions précédentes avec une boîte de dimensions 9 cm, 10 cm, 12 cm.

3. Quelles dimensions doit-on connaître pour calculer le volume d'un parallélépipède rectangle ? Déduis-en une formule permettant de le calculer.

Activité 2 : Conversions

1. Un parallélépipède rectangle a pour dimensions 4 cm, 6 cm et 8 cm.

a. Quel est son volume en cm³ ?

b. Combien faut-il de cubes de 1 mm d'arête pour le remplir ?

c. Quel est son volume en mm³ ?

d. Quelle opération doit-on effectuer pour passer du volume d'un solide en cm³ à son volume en mm³ ?

2. Une petite expérience

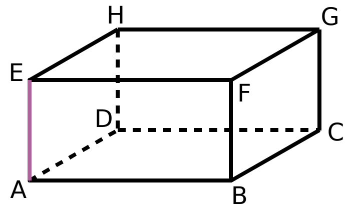
a. Trouve un récipient de forme parallélépipédique. Mesure ses dimensions et calcule son volume en dm³.

b. Quelle est la **capacité** de ce récipient en litres ? (Si elle n'est pas indiquée sur le récipient, tu pourras le remplir d'eau puis mesurer sa capacité à l'aide d'une éprouvette graduée.)

c. Déduis-en alors la correspondance entre un volume en dm³ et une capacité en litres.

Activité 3 : Remplir un prisme... (≥**)

1. Pour un parallélépipède rectangle



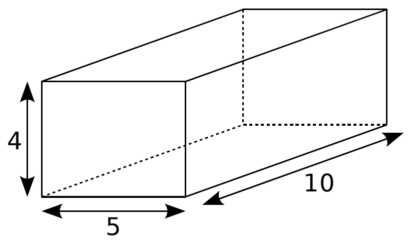
a. ABCDEFGH est un pavé droit tel que AB = 10 cm, BC = 7 cm et AE = 5 cm. Calcule le volume de ce pavé.

b. Lorsqu'on regarde ce pavé droit comme un prisme ayant pour hauteur le segment [AE], cite les bases du prisme et calcule l'aire de l'une d'entre elles.

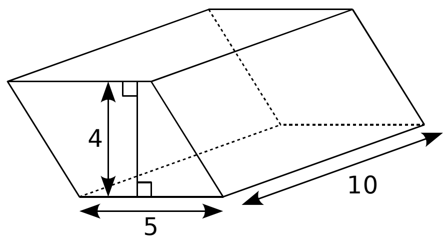
c. Dans ce cas, que représente le produit de l'aire d'une des bases par la hauteur ?

2. Pour un prisme droit

Les deux prismes droits suivants ont le même volume. Explique pourquoi. Propose alors une formule qui donne le volume d'un prisme droit ayant pour base un parallélogramme en utilisant l'expression « aire de la base ».



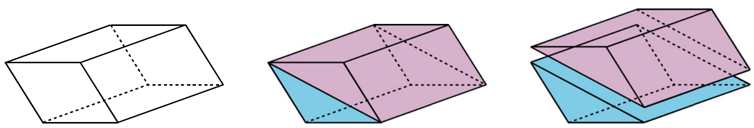
Pavé droit



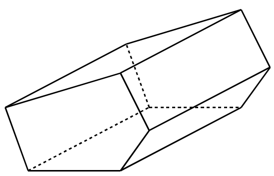
Prisme droit
ayant pour base un parallélogramme

3. À base triangulaire

Observe l'illustration ci-dessous réalisée à partir d'un prisme droit ayant pour base un parallélogramme, puis explique pourquoi la formule vue au **2.** est encore valable pour un prisme à base triangulaire.



4. Pour finir ...

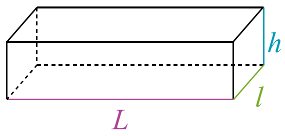
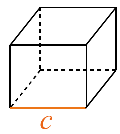


a. En t'inspirant de la question **3.**, dessine ce prisme droit à base pentagonale et découpe-le en prismes droits à bases triangulaires. La formule vue au **2.** est-elle encore valable ? Pourquoi ?

b. Sachant que l'aire du pentagone est de 15 cm² et que la hauteur de ce prisme est de 3 cm, quel est son volume ?

Méthode 1 : Calculer le volume d'un cube et d'un parallélépipède rectangle

À connaître

	
Volume du parallélépipède rectangle $V = L \cdot l \cdot h$	Volume du cube $V = c \cdot c \cdot c$

Les longueurs doivent être exprimées dans la même unité.

Remarque : Un parallélépipède rectangle peut également s'appeler un **pavé droit**.

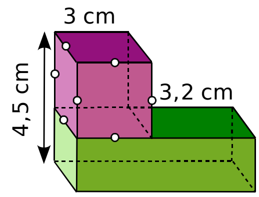
Exemple : Calcule le volume d'un pavé droit de 32 mm de longueur, 2,5 cm de largeur et 0,4 dm de hauteur.

$V = L \cdot l \cdot h$ ⟶ On écrit la formule.

$V = 3{,}2$ cm $\cdot$ $2{,}5$ cm $\cdot$ 4 cm.
$V = 32$ cm^3. ⟶ On remplace par les données numériques exprimées dans la même unité : 32 mm = 3,2 cm et 0,4 dm = 4 cm.

Le volume du pavé droit est de 32 cm^3.

Exercices « À toi de jouer »



1 Calcule le volume d'un cube de 6,1 dm de côté.

2 Calcule le volume du solide ci-contre.

Méthode 2 : Calculer l'aire latérale d'un prisme droit

À connaître

Pour calculer **l'aire latérale d'un prisme droit**, on multiplie le périmètre d'une base par la hauteur : $\mathbf{A_{latérale} = P_{base} \cdot h}$.

Exemple : Détermine l'aire latérale d'un prisme droit de hauteur 10 cm ayant pour base un parallélogramme ABCD tel que AB = 5 cm et BC = 3 cm.

On calcule le périmètre du parallélogramme ABCD qui est une base du prisme droit :

$$P_{base} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (5 + 3) = 2 \cdot 8 = 16 \text{ cm}.$$

On multiplie le périmètre d'une base par la hauteur :

$$A_{latérale} = P_{base} \cdot h = 16 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2.$$

L'aire latérale de ce prisme droit vaut 160 cm².

Exercices « À toi de jouer »

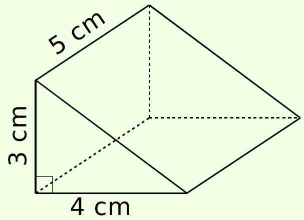
3 Calcule l'aire latérale d'un prisme droit de hauteur 9 cm ayant pour base un carré de côté 3 cm.

Méthode 3 : Calculer le volume d'un prisme droit (≥**)

À connaître

Pour calculer **le volume d'un prisme droit**, on multiplie l'aire d'une base par la hauteur : $\mathbf{V = A_{base} \cdot h}$.

Exemple : Détermine le volume du prisme droit suivant :



On calcule l'aire d'une base qui est un triangle rectangle :

$A_{base} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}^2$.

On multiplie l'aire d'une base par la hauteur :

$V = A_{base} \cdot h = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^3$.

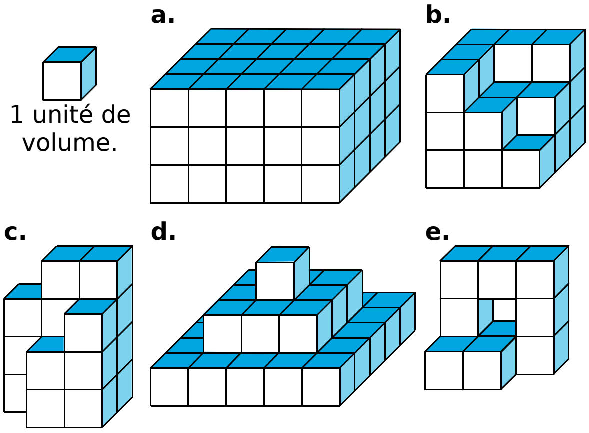
Le volume de ce prisme droit vaut 30 cm^3.

Exercices « À toi de jouer »

4 Calcule le volume d'un prisme droit de hauteur 8 cm ayant pour base un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm.

Calculer des volumes

1 *Volume par comptage*



Donne le volume de chaque solide en unités de volume. Les volumes sont supposés pleins.

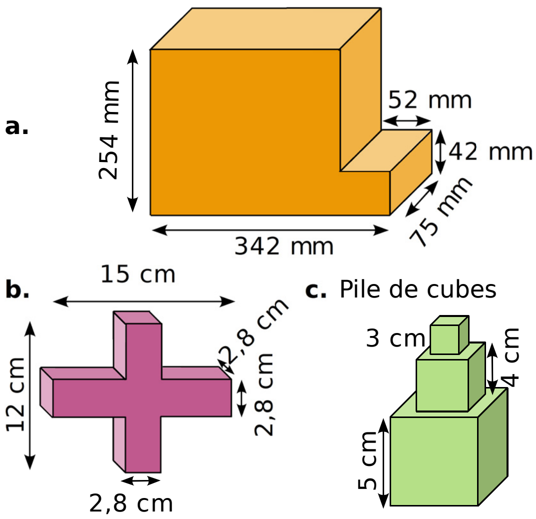
2 *Volume de pavés*

Recopie le tableau et calcule les valeurs de a, b, c, d, e et f.

	Longueur	Largeur	Hauteur	Volume
P_1	3 cm	1 cm	2 cm	a
P_2	3,5 mm	2 mm	1 mm	b
P_3	2,2 dm	8 cm	3 dm	c
P_4	6 dm	5 dm	d	120 dm³
P_5	e	4 m	3,2 m	74,24 m³
P_6	2,5 hm	2,7 dam	f	81 dam³

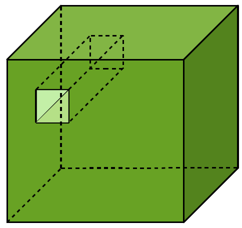
3 *Des solides*

Calcule le volume de chaque solide constitués de parallélépipèdes rectangles.

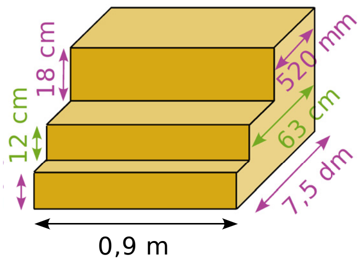


4 *Attention aux unités*

a. Un cube de côté 1,2 m est percé de part en part par un trou fait à partir d'un carré de côté 12 cm. Calcule le volume du solide obtenu.

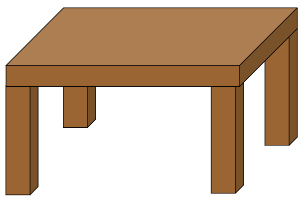


b. Calcule en cm³ le volume de ce solide.



5 *Des tables*

Une table est composée d'un plateau rectangulaire de 3 cm d'épaisseur qui mesure 1,3 m de long et 0,8 m de large. Les pieds ont une base carrée de 9 cm de côté et une hauteur de 72 cm.



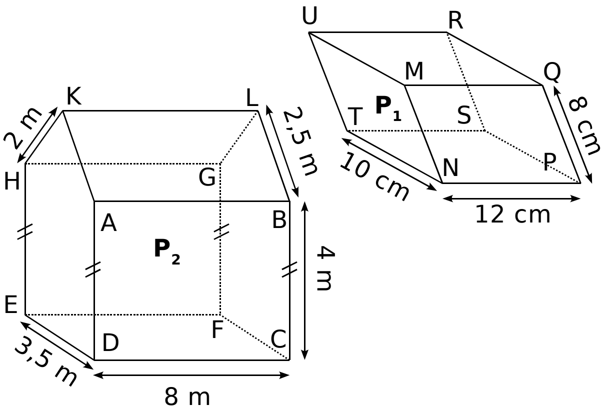
a. Calcule le volume de bois nécessaire pour fabriquer cette table.

b. Le chêne qui constitue cette table a une densité d'environ 0,7, ce qui signifie qu'un mètre cube de chêne pèse 700 kg. Combien pèse cette table si on la construit en chêne ?

c. Une autre table construite en ébène (densité = 1,10) a une masse de 60,5 kg. Quel est le volume de cette table ?

Aires latérales

6 *Reconnaître la base*



P_1 et P_2 sont des prismes droits. Pour chacun détermine une base et calcule son périmètre.

7 Calcule le périmètre des bases puis l'aire latérale des prismes droits suivants :

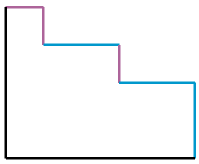
Solide	base	hauteur
Prisme 1	Carré de côté 6 cm	12 cm
Prisme 2	Rectangle de 8 m sur 2,5 m	1,5 m
Prisme 3	Triangle équilatéral de côté 6 cm	20,5 cm

8 *Ne pas se fier à la taille ni à la forme*

P_1 est un prisme droit de hauteur 8 cm ayant pour base un pentagone dont tous les côtés mesurent 14,4 cm. P_2 est un prisme droit de hauteur 6 cm ayant pour base un triangle équilatéral de côté 32 cm. Compare les aires latérales de ces deux prismes.

9 *Plan d'une surface*

Sur le schéma ci-contre, les segments roses mesurent 0,5 cm, les bleus mesurent 1 cm et tous les angles sont droits.



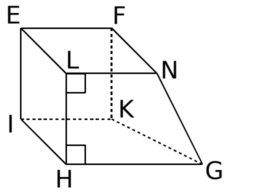
Représente la surface latérale d'un prisme droit qui a ce polygone pour base et une hauteur de 9 cm, puis calcule son aire et son volume.

Prismes droits (≥**)

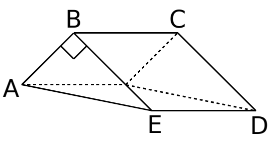
10 *Bien observer*

On a représenté ci-dessous des prismes droits. Donne la nature des bases et nomme une hauteur dans chaque cas.

a.



b.



11 *Appliquer les formules*

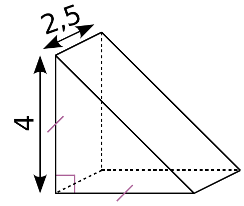
Un prisme droit de hauteur 10 cm a pour base un polygone d'aire 7,4 cm². Calcule son volume.

12 Le dessin ci-dessous représente un prisme droit dont la base est un triangle rectangle isocèle (l'unité est le centimètre).

a. Quelle est la hauteur de ce prisme ?

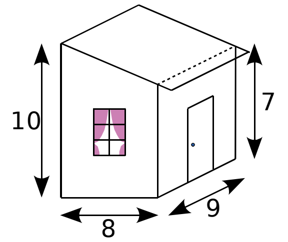
b. Calcule l'aire d'une base.

c. Calcule le volume du prisme.



13 *Choix d'un poêle*

On veut chauffer la maison représentée ci-contre à l'aide d'un poêle à bois (l'unité est le mètre).



Les caractéristiques de ce poêle à bois sont :

- puissance : 10 000 W ;
- Capacité de chauffage : 420 m³ ;

La capacité du poêle choisi est-elle suffisante ?

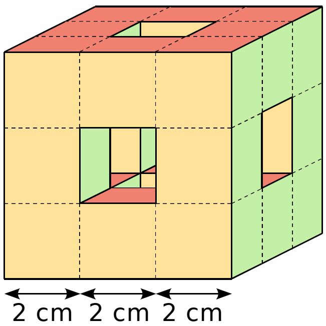
Exercices d'approfondissement

14 *Chasse d'eau*

Un réservoir de chasse d'eau a la forme d'un pavé droit de 30 cm de longueur, 24 cm de largeur et 18 cm de hauteur. Il est rempli aux trois quarts de sa hauteur. Combien de litres d'eau sont utilisés lorsqu'on tire cette chasse d'eau ?

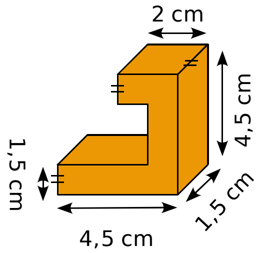
15 *Cube percé*

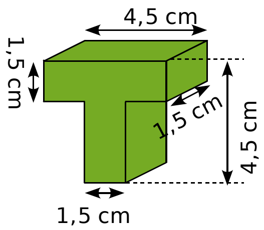
Calcule le volume de ce solide qui est un cube percé de part en part au centre de chaque face.



16 *Des pièces*

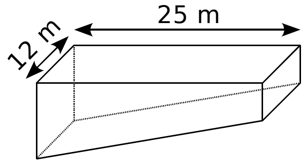
Les figures ci-dessous représentent deux pièces d'un jeu. Ces pièces sont des prismes droits. Compare leurs volumes respectifs.





17 *(≥**) Piscine*

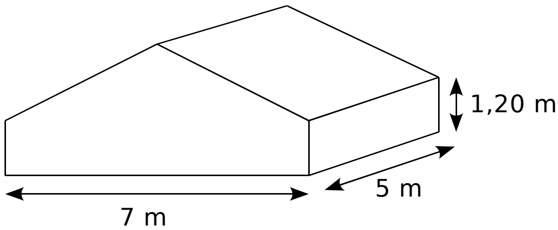
Une piscine a la forme du prisme droit ci-contre. Sa profondeur va de 0,80 m à 2,20 m.



Quel volume d'eau contient-elle ?

18 *(≥**) Hauteur d'une pièce*

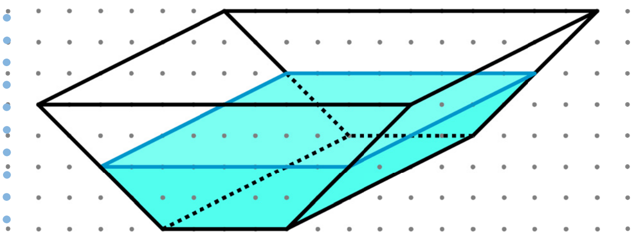
Le volume de la pièce mansardée ci-dessous est de 77 m^3.



Quelle est sa hauteur au point le plus haut ?

19 *(≥**) Véhicule de transport en vrac*

Un tombereau a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle de petite base 40 cm et de grande base 80 cm. On l'a représenté en perspective cavalière sur papier pointé.



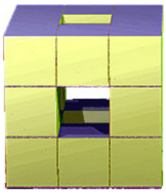
Sachant que ce tombereau est profond de 120 cm et haut de 40 cm, détermine le volume de la partie bleue correspondant au tombereau rempli à mi-hauteur.

Eponge de Menger

1re Partie : Réalisation

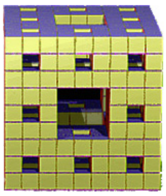
a. Réalisez 20 cubes identiques en papier d'arêtes 4 cm.

b. Placez ces 20 copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de 12 cm d'arêtes sans les parties centrales. Comme le dessin ci-dessous :



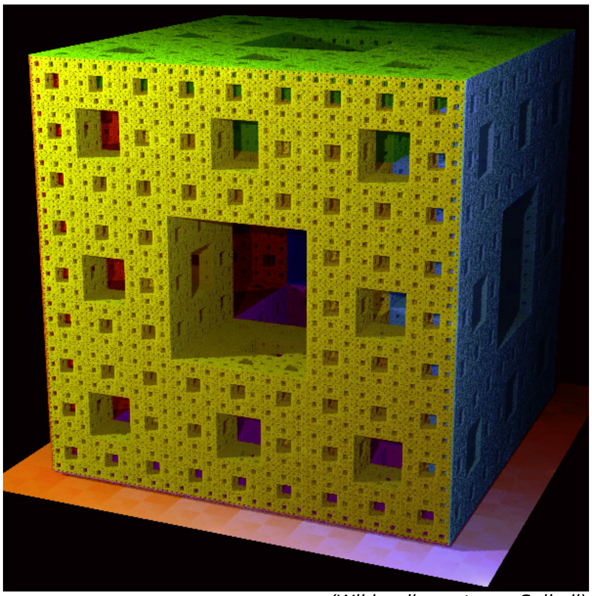
Étape 1

c. Regroupez toutes les copies des cubes réalisées et complétez leurs nombres pour en avoir 400. Placez ces 400 copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de 36 cm d'arêtes sans les parties centrales. Comme le dessin ci-dessous :



Étape 2

d. Combien de cubes seraient nécessaire pour construire la 3ème étape ? Quelle hauteur atteindrait l'éponge de Menger ?



(Wikipedia, auteur : Solkoll)

2ème Partie : Volumes

La construction d'une éponge de Menger peut être décrite de la manière suivante :

- débuter par un cube,
- réduire le cube au tiers et en faire 20 copies,
- placer ces copies de telle façon qu'elles forment un nouveau cube de la même taille que l'original, sans les parties centrales,
- répéter le processus à partir de l'étape 2 pour chacun des 20 cubes ainsi créés.

Le solide obtenu à la limite, après un nombre infini d'itérations, est l'éponge de Menger.

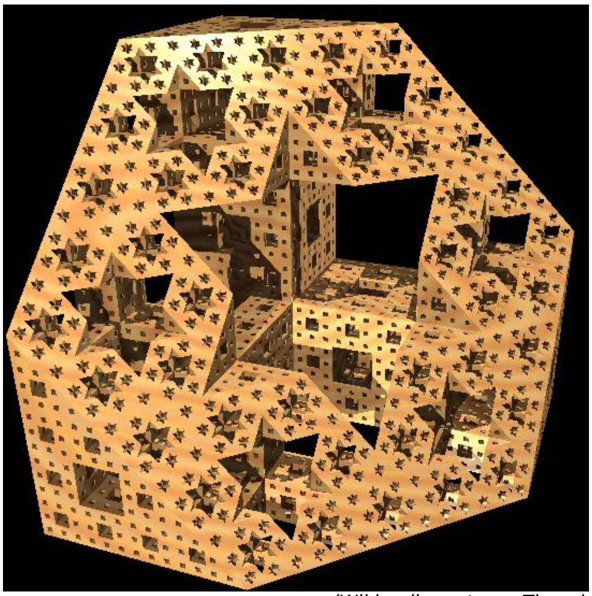
e. Que vaut le volume de l'étape 0, si on prend un cube d'arête 9 cm ?

f. Que vaut le volume de l'étape 1 ? l'étape 2 ? et l'étape 3 ?

g. Que dire du volume à l'étape 10 ? et 100 ?

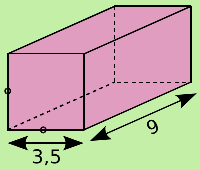
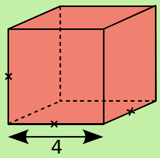
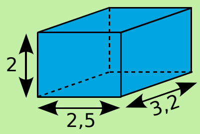
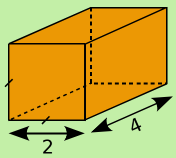
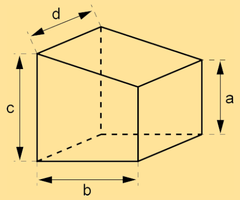
h. Que peut-on conclure ?

Ci-dessous, une éponge de Menger, coupée par un plan transversal passant par les milieux des six côtés du cube



(Wikipedia, auteur : Theon)

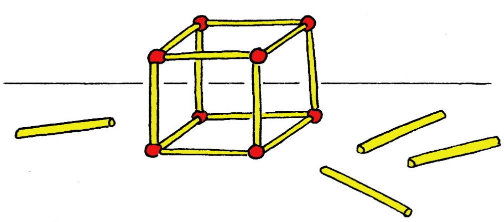
Se tester avec le QCM !

		R1	R2	R3	R4
1	Le volume d'un cube de 3 cm d'arête est...	3 cm^3	9 cm^3	27 cm^3	12 cm^3
2	Quelle phrase est vraie ?	Si on double la longueur de l'arête d'un cube alors son volume double aussi	Si on double la longueur de l'arête d'un cube alors son volume est multiplié par 4	Si on double la longueur de l'arête d'un cube alors son volume est multiplié par 8	Si on double la longueur de l'arête d'un cube alors son volume est multiplié par 16
3	Mon volume est 16 m^3. Qui puis-je être ? (Les solides sont des pavés droits et les longueurs sont exprimées en mètres.)				
4	Mon volume est de 12 cm^3 et la longueur totale de mes arêtes est de 28 cm. Qui puis-je être ?	Je suis un pavé de dimensions 2 ; 2 et 3 en centimètres	Je suis un cube d'arête 3 cm	Je suis un pavé de dimensions 2 ; 7 et 2 en centimètres	Je suis un pavé de dimensions 6 ; 2 et 1 en centimètres
5	Quelle(s) phrase(s) te semble(nt) raisonnable(s) ?	Mesurer la contenance d'une bouteille en cL	Mesurer le volume d'une pièce en km^3	Mesurer le volume de la Terre en km^3	Mesurer le volume d'une piscine en mm^3
(≥**) 6	Sur ce prisme droit quel segment est sa hauteur ? 	a	b	c	d

Récréation mathématique

Un petit jeu de construction

Comme cadeau de Noël, Zohra a eu un jeu avec des petites tiges aimantées et des boules métalliques. Au bout de chaque tige, on peut aimanter une autre tige ou une boule.



Elle dispose de 48 tiges et de 8 boules. Elle cherche à construire, en utilisant tout ce matériel, le pavé droit le plus volumineux possible.

a. Quels pavés droits peut-elle construire ?

b. Quel est celui qui a le plus grand volume ? Le plus petit volume ?

À pleins poumons...

a. Recherche, sur Internet ou ailleurs, la quantité d'air moyenne expirée, à chaque respiration, par un adulte. Puis recherche la quantité moyenne d'air expirée par un adulte en une minute.

b. Calcule alors le volume moyen d'air expiré par un adulte en une journée (24 h).

c. Cherche une approximation de la population sur Terre.

d. Calcule alors une approximation de la quantité d'air expirée par les humains sur Terre en une journée. Compare avec le volume de la Lune !