



Nombres rationnels

7



Narration de recherche

Quel est le quatrième chiffre après la virgule de l'écriture décimale du quotient de 1 par 7 ?
Et le 14^e ? Le 24^e ? Le 104^e ? Le 1 004^e ? Le 2 008^e ?

Activité 1 : Différentes représentations des fractions

1. Premiers partages entre amis

- Neuf barres de céréales sont à partager équitablement entre quatre enfants. Écris la part de chaque enfant sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction.
- Douze gaufres au chocolat sont à partager entre dix enfants. Schématise de deux façons différentes ce partage. Écris la part de chaque enfant sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction.

2. Des partages de pizzas !

Quatre amis (Adeline, Bertrand, Chloé et Daniel) ont commandé au total trois pizzas. La part de chacun sera identique.

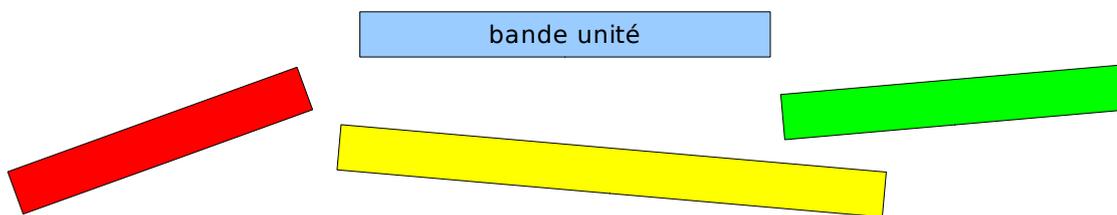
- Dessine sur ton cahier ces trois pizzas et représente la part de chacun en supposant qu'ils mangent les pizzas les unes après les autres.
- On suppose maintenant que Bertrand doit manger en premier et ne réchauffer qu'une seule pizza. Dessine cette pizza et représente sa part.
- À l'aide des questions précédentes, trouve deux écritures différentes de la part de chacun et déduis-en une égalité.

3. Des tartes aux pommes et des baguettes !

- Sami a invité neuf de ses amis pour son anniversaire. Il estime que lui et chacun d'entre eux mangeront un quart de tarte aux pommes. Combien de tartes aux pommes doit-il commander ? Et s'il en invite finalement 11 ?
- Pour un pique-nique organisé par le collège pour les classes de 6^e, on estime que chacun des 155 élèves mangera un tiers de baguette. Combien de baguettes faut-il alors prévoir pour ces élèves ?

Activité 2 : Bandes à part...

Reproduis et découpe des bandes de papier identiques à celles ci-dessous.



- En prenant comme unité la longueur de la bande bleue, exprime la longueur des bandes rouge, jaune et verte. (Tu pourras pour cela construire, plier et découper autant de bandes unités que nécessaire.)

Compare tes résultats avec ceux de tes camarades.

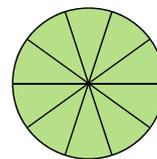
- Trace sur ton cahier une bande de longueur $\frac{3}{2}$, une autre de longueur $\frac{9}{4}$ et une dernière de longueur $\frac{5}{3}$. (L'unité choisie est toujours la bande unité bleue.)
- Donne d'autres écritures possibles de ces longueurs à l'aide de fractions.

Activité 3 : Partages et comparaisons

1. Axel vient de manger 4 carrés de chocolat sur une plaque qui en possède 24. Éloïse vient d'en manger 3 sur une plaque de 18 carrés. La plaque de chocolat d'Éloïse est identique à celle d'Axel.

- Représente sur la plaque de chocolat d'Axel, divisée en 24 carrés identiques ce qu'il a mangé.
- Effectue le même travail pour représenter ce qu'Éloïse a mangé.
- En t'aidant de **a.** et **b.**, détermine qui de Alex ou Éloïse a mangé le plus de chocolat ?

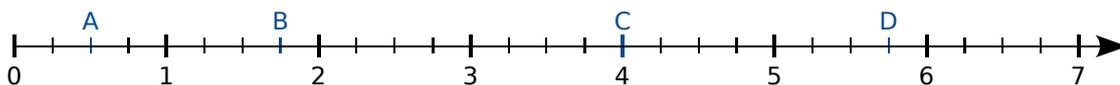
2. Utilise le disque ci-contre partagé en dix parts égales pour donner une fraction égale à $\frac{1}{2}$. Compare $\frac{1}{2}$ et $\frac{4}{10}$.



- En utilisant maintenant un disque partagé en cent parts égales, compare $\frac{7}{10}$ et $\frac{3}{4}$.
- Donne une écriture décimale de chacune des fractions des questions précédentes.

Activité 4 : Quotients et demi-droite graduée

1. On a tracé ci-dessous une demi-droite graduée.



- Donne de deux façons différentes les abscisses des points A, B, C et D.
- Donne de deux façons différentes l'abscisse du point situé exactement au milieu des points A et B puis celui du point situé exactement au milieu de C et D.

2. Dessine une demi-droite graduée et partage l'unité en 12 parts égales.

- Combien de ces parts faut-il prendre pour avoir $\frac{1}{6}$ de l'unité ? Même question pour $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ puis $\frac{1}{2}$.
- Place sur cette demi-droite les points E, F, G et H d'abscisses respectives $\frac{13}{12}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{4}$.
- Donne de deux façons différentes l'abscisse du point K situé exactement au milieu de G et H.

Méthode 1 : Utiliser la définition du quotient

À connaître

La **fraction** $\frac{a}{b}$ est le quotient de l'entier relatif a par l'entier relatif b (avec $b \neq 0$), ainsi : $\frac{a}{b} = a : b$. Le nombre a s'appelle le **numérateur**, b est le **dénominateur** et le trait horizontal est la **barre de fraction**. Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction.

Exemple 1 : Parmi les nombres suivants : $\frac{3}{4}$, $\frac{23}{2,3}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{0}{10}$, $\frac{1,2}{5}$, détermine ceux qui ne sont pas une fraction.

Une fraction possède un numérateur **et** un dénominateur entier. Donc $\frac{23}{2,3}$ et $\frac{1,2}{5}$ ne sont pas des fractions.

Remarque : Les quotients $\frac{23}{2,3}$, $\frac{1,2}{5}$ utilisent l'écriture fractionnaire mais ne sont pas des fractions. Par contre ce sont des nombres rationnels car $\frac{23}{2,3} = 10$ et $\frac{1,2}{5} = 0,24$.

À connaître

Une **fraction décimale** est une fraction dont le dénominateur est 1, 10, 100, 1 000... Un nombre pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction décimale est un **nombre décimal**. Il peut aussi se noter en utilisant une virgule ; c'est son **écriture décimale**.

Exemple 2 : Donne l'écriture décimale du nombre $\frac{567}{10}$.

L'écriture décimale est obtenue en calculant la division $567 : 10 = 56,7$.

Exemple 3 : Écris 0,25 sous la forme d'une fraction décimale.

Une fraction décimale a pour dénominateur 1, 10, 100, 1000,

Le chiffre 5 occupe la position des centièmes.

On obtient la fraction décimale, $0,25 = \frac{25}{100}$.

Exercice « À toi de jouer »

1 Donne l'écriture décimale des nombres

a. $\frac{12}{5}$

b. $\frac{2,5}{2}$

c. $\frac{4}{2,5}$

2 Écris les nombres suivants sous la forme d'une fraction décimale.

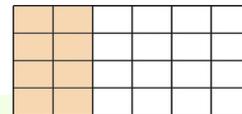
a. 0,8

b. 0,12

c. 1,541

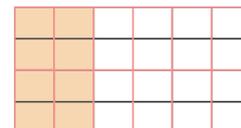
Méthode 2 : Fraction d'un tout

Exemple : Détermine quelle fraction de la figure est colorée.



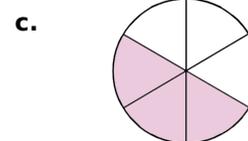
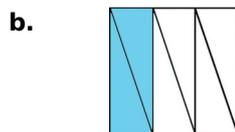
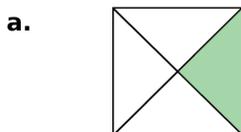
La figure est divisée en 24 parties identiques et 8 sont colorées. On a coloré les $\frac{8}{24}$ de la figure.

Remarque : La division de la figure aurait pu être en 12 parties identiques dont 4 sont colorées, c'est-à-dire, $\frac{4}{12}$ de la figure ou les $\frac{2}{6}$ de la figure ou les $\frac{1}{3}$ de la figure. Mais toutes ces fractions sont égales.



Exercice « À toi de jouer »

3 Pour chaque figure donne la fraction de la partie colorée.

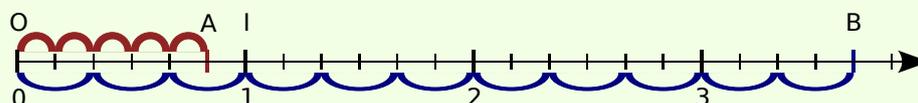


Méthode 3 : Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée

Exemple : Place sur une même demi-droite graduée les points A et B d'abscisses respectives $\frac{5}{6}$ et $\frac{11}{3}$.

On choisit une longueur unité OI que l'on partage en six parts égales. Chacune de ces parts correspond donc à $\frac{1}{6}$ de l'unité.

- Pour placer le point A, on utilise $\frac{5}{6} = 5 \cdot \frac{1}{6}$ et on reporte donc cinq **sixièmes** à partir du point O.



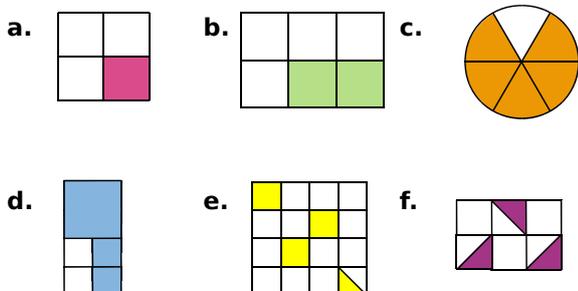
- Pour placer le point B, on remarque que deux parts correspondent à $\frac{1}{3}$ de l'unité et on utilise $\frac{11}{3} = 11 \cdot \frac{1}{3}$. On reporte donc 11 **tiers** à partir du point O.

Exercice « À toi de jouer »

4 Sur une même demi-droite graduée, place les points $E\left(\frac{3}{4}\right)$; $F\left(2 - \frac{1}{4}\right)$ et $G\left(\frac{5}{2}\right)$.

Fractions et partage

1 Pour chaque figure, indique la fraction de la surface totale qui est colorée.

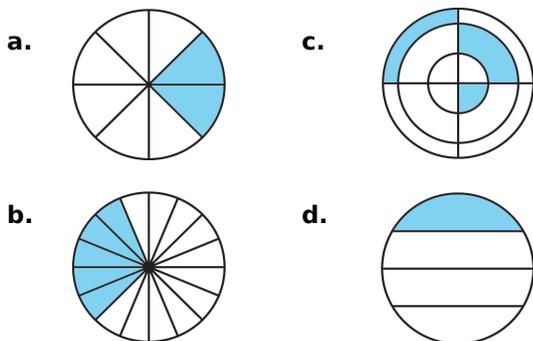


2 Dans quelle(s) figure(s) la surface colorée est-elle égale au quart de la surface totale ?



3 Drôles de partages

Dans quelle(s) figure(s) la surface colorée est-elle égale au quart de la surface totale ?



4 Avec des quadrilatères

- a. Trace un carré de côté 5 cm et colorie trois quarts de sa surface.
- b. Trace un rectangle de largeur 3 cm et de longueur 7 cm. Colorie $\frac{7}{21}$ de sa surface.
- c. Trace un carré de côté 3 cm et colorie un sixième de sa surface.

5 Avec un segment

a. En utilisant le quadrillage de ton cahier, reproduis le segment suivant.



b. Construis un segment dont la longueur par rapport à celle du segment de la question a. est :

• $\frac{1}{4}$ • $\frac{1}{6}$ • $\frac{5}{4}$

Différentes écritures

6 Donne une écriture fractionnaire des nombres suivants.

- a. une demie e. trois quarts
 b. cinq douzièmes f. cent dix-neuvièmes
 c. deux tiers g. (\geq **) moins un quart
 d. sept demis h. (\geq **) moins trois septièmes

7 Donne une écriture décimale des nombres.

- a. deux centièmes f. neuf tiers
 b. quarante dixièmes g. (\geq **) moins vingt-deux dixièmes
 c. trois dixièmes h. (\geq **) moins cent vingt-trois millièmes
 d. cinq cent millièmes
 e. cinq cent-millièmes

8 Détermine la fraction dont le dénominateur est le numérateur de $\frac{41}{17}$ et dont le numérateur est le triple du dénominateur de $\frac{53}{9}$.

9 Recopie et complète par deux entiers consécutifs les encadrements suivants.

- a. ... $< \frac{36}{10} < \dots$ c. ... $< \frac{11}{3} < \dots$
 b. ... $< \frac{2}{7} < \dots$ d. ... $< \frac{49}{8} < \dots$

10 (\geq^{**}) Recopie et complète par deux entiers consécutifs les encadrements suivants.

a. $\dots < -\frac{12}{10} < \dots$ c. $\dots < -\frac{44}{3} < \dots$

b. $\dots < -\frac{18}{7} < \dots$ d. $\dots < -\frac{35}{8} < \dots$

11 Parmi les fractions suivantes, indique celles qui sont égales à des nombres entiers puis celles qui sont inférieures à 1.

$\frac{42}{10}$; $\frac{8}{2}$; $\frac{36}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{27}{3}$; $\frac{126}{9}$; $\frac{87}{2}$; $\frac{132}{4}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{33}{42}$.

12 Recopie et complète.

a. $\frac{\dots}{9} = 1$ c. $0 = \frac{\dots}{6}$ e. $\frac{1}{\dots} = 0,001$

b. $5 = \frac{\dots}{8}$ d. $\frac{\dots}{2} = 4,5$ f. $2,5 = \frac{\dots}{4}$

13 On considère le quotient $12 : 5$.

a. Donne une écriture fractionnaire de ce quotient. Quel est le numérateur ? Le dénominateur ?

b. Donne une écriture décimale de ce quotient.

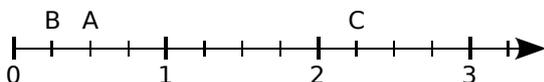
c. Reprends les questions a. et b. en considérant maintenant le quotient $7 : 8$.

14 Donne l'écriture décimale de chaque nombre.

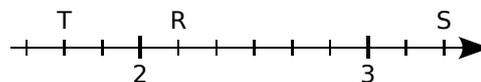
a. $\frac{1}{8}$ b. $\frac{46}{5}$ c. $\frac{56}{70}$ d. $\frac{11}{16}$ e. $\frac{153}{12}$

Demi-droite graduée

15 Donne, sous forme d'une fraction, l'abscisse de chacun des points A, B et C placés sur la demi-droite graduée ci-dessous.



16 Donne, sous forme d'une fraction, l'abscisse de chacun des points R, S et T placés sur la demi-droite graduée ci-dessous.



17 Trace une demi-droite graduée en prenant 10 cm pour une unité et place les points M, N, P et Q d'abscisses respectives $\frac{3}{10}$; 0,7 ; $\frac{12}{10}$ et $\frac{2}{5}$.

18 (\geq^{**}) Trace une demi-droite graduée en prenant 10 cm pour une unité et place les points M, N, P et Q d'abscisses respectives $-\frac{7}{10}$; -0,3 ; $-\frac{2}{10}$ et $-\frac{8}{5}$.

19 Trace une demi-droite graduée en prenant une unité de 3 cm. Place les nombres $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{3}$; 0,2 ; $\frac{4}{5}$; $\frac{17}{5}$ et 1,5.

20 En choisissant judicieusement la longueur d'une graduation, place précisément sur une demi-droite graduée les points A, B, C, D et E d'abscisses respectives $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{4}$.

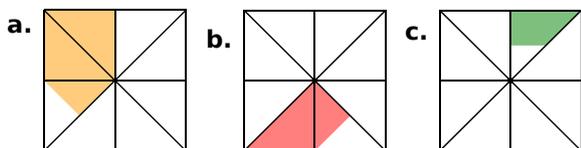
21 Trace une demi-droite graduée en prenant 7 cm pour une unité et place les points E, F et G d'abscisses respectives $\frac{2}{7}$, $1 + \frac{3}{7}$ et $1 - \frac{4}{7}$.

22 Place précisément sur une demi-droite graduée les points U, V et W d'abscisses respectives $2 + \frac{1}{3}$, $6 - \frac{2}{3}$ et $3 + \frac{4}{3}$.

Exercices d'approfondissement

23 Quelques partages

Pour chaque figure, indique la fraction de la surface totale qui est colorée.



24 Coloriage

Trace trois rectangles de 9 cm sur 4 cm.

- Partage le premier pour colorier les cinq sixièmes de sa surface.
- Partage le second pour colorier les sept douzièmes de sa surface.
- Partage le troisième pour colorier les trois huitièmes de sa surface.

25 Transforme les nombres suivants en écriture décimale puis entoure d'une même couleur ceux qui sont égaux.

$7 + \frac{1}{4}$	2	$\frac{29}{4}$	$\frac{156}{78}$	$\frac{84}{10}$	29,4
$8 - \frac{3}{4}$	8,4	$\frac{8}{4}$	$8 + \frac{4}{10}$	$\frac{147}{5}$	7,25

26 À la chasse aux décimaux

a. Parmi les fractions suivantes, lesquelles sont des nombres décimaux ?

$$A = \frac{1}{2} ; C = \frac{1}{7} ; E = \frac{1}{13} ; G = \frac{1}{16} ; I = \frac{1}{4} ;$$

$$B = \frac{1}{3} ; D = \frac{1}{10} ; F = \frac{1}{25} ; H = \frac{1}{12} ; J = \frac{1}{15} .$$

Tu pourras utiliser un tableau pour présenter tes résultats.

b. Donne deux fractions de numérateur 1 (différentes des fractions ci-dessus) : une décimale et une non décimale.

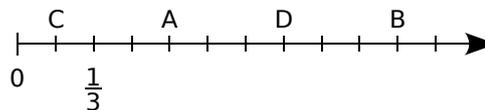
c. Quelles remarques peux-tu faire concernant les fractions décimales ?

d. Sans calculer les quotients, indique si les fractions suivantes sont décimales ou non, en justifiant ta réponse : $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{35}$.

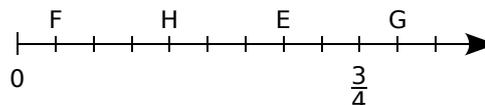
e. Soulimane affirme que toute fraction décimale peut s'écrire avec un dénominateur égal à 10, 100, 1 000, ... Est-ce vrai ?

27 Demi-droites graduées

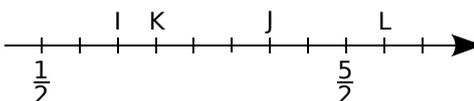
a. Quelles sont les abscisses respectives des points A, B, C et D ?



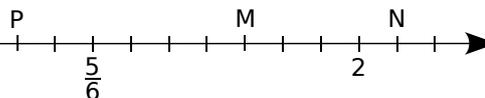
b. Même question pour les points E, F, G et H.



c. Même question pour les points I, J, K et L.



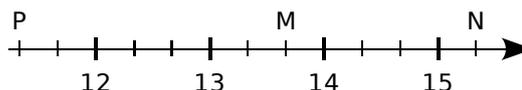
d. Même question pour les points P, M et N.



28 En choisissant judicieusement une unité de longueur, place précisément sur une demi-droite graduée les points A d'abscisse $\frac{5}{6}$, B d'abscisse $\frac{1}{2}$, C d'abscisse $\frac{11}{6}$, D d'abscisse $\frac{3}{4}$ et E d'abscisse $1 + \frac{1}{3}$.

29 Encore une demi-droite graduée

a. Reproduis la demi-droite graduée ci-dessous en prenant trois centimètres pour unité.



b. Donne deux écritures de chacune des abscisses des points M, N et P.

c. Sur la demi-droite graduée, place le point Q d'abscisse $14 + \frac{1}{3}$, le point R d'abscisse

$13 - \frac{1}{6}$ et le point S d'abscisse $\frac{71}{6}$.

1 Écriture décimale illimitée périodique

1^{re} Partie : Écriture décimale illimitée

a. En vous partageant le travail, posez et effectuez les divisions de 5 par 7 et de 8 par 13. Pour chaque quotient, recherchez les dix premières décimales.

b. On dit que ces écritures sont périodiques. Comment expliquez-vous cette appellation ?

c. Déterminez la période de chacun de ces quotients.

d. Pour chaque quotient, trouvez le vingtième chiffre de la partie décimale. Trouvez le centième ainsi que le millième.

2^e Partie : Le premier défi

Inventez un quotient dont l'écriture décimale est illimitée et périodique. Transmettez-le à un autre groupe et demandez-leur de trouver l'un des chiffres de la partie décimale dont vous aurez donné le rang. (Par exemple trouvez le 587^e chiffre.)

3^e Partie : À la recherche du quotient

e. Un quotient a pour écriture décimale illimitée et périodique $0, \overline{12}$. La longueur de la période est 2. Vérifiez que $\frac{12}{99}$ vaut $0, \overline{12}$.

f. Donnez l'écriture décimale illimitée périodique de $\frac{781}{999}$ avec la notation vue à la question e..

g. Quelle fraction a pour écriture décimale illimitée périodique $0, \overline{3654}$?

4^e Partie : Le second défi

Choisissez trois écritures décimales illimitées périodiques dont la période n'excédera pas quatre chiffres et devra commencer tout de suite après la virgule.

Échangez-les avec un autre groupe et retrouvez les écritures fractionnaires qui correspondent aux nombres que vous avez reçus.

2 Image d'une fraction

Le travail est inspiré d'une activité trouvée sur Bloop Maths & Science

Construction de l'image

a. Choisissez trois des fractions ci-dessous :

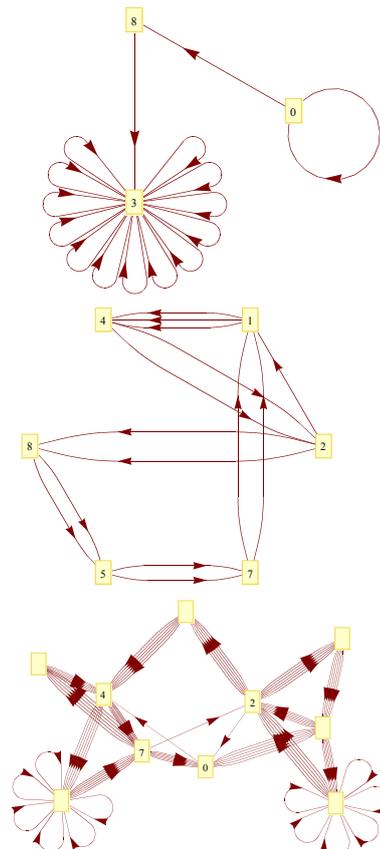
$$\frac{5}{12} ; \frac{115}{101} ; \frac{373}{120} ; \frac{71}{65} ; \frac{5}{229} ; \frac{152}{999} ; \frac{10}{41}$$

b. Calculez leurs quotients avec une précision de 15 chiffres après la virgule.

c. Marquez sur une feuille les chiffres des décimales que vous avez trouvés.

d. Reliez les chiffres dans l'ordre où ils apparaissent dans l'écriture décimale.

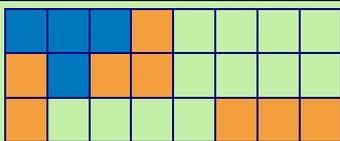
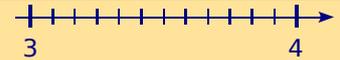
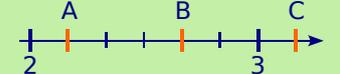
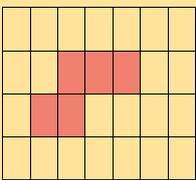
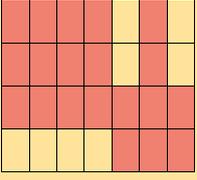
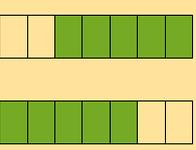
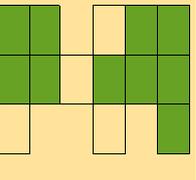
Les exemples ci-dessous ont été obtenus pour les fractions $\frac{1}{12}$, $\frac{15}{7}$ et $\frac{321}{680}$.



Les dessins ont été obtenus par un Wolfram project :

<http://demonstrations.wolfram.com/GraphsOfTheSuccessiveDigitsOfRationalNumbers/>

Se tester avec le QCM!

		R1	R2	R3	R4
1		Un tiers du rectangle est en orange	$\frac{4}{20}$ du rectangle sont en bleu	$\frac{8}{16}$ du rectangle sont en orange	La moitié du rectangle est coloriée
2	L'écriture décimale du quotient de 25 par 4 est...	$\frac{25}{4}$	$\frac{4}{25}$	6,25	0,16
3	$\frac{29}{7}$ est...	égal à $4 + \frac{1}{7}$	le nombre qui multiplié par 7 donne 29	compris entre 4,1 et 4,2	un nombre décimal
4	$\frac{17}{3}$ est égal...	à 5,66	à 17,3	à $5 + \frac{2}{3}$	au nombre qui multiplié par 17 donne 3
5	$\frac{31}{14}$...	n'est pas un nombre	est plus grand que 2	est égal à 2,214 285 7	a pour valeur approchée 2,214
6	 Sur cette partie de demi-droite graduée, on peut placer précisément...	$3 + \frac{1}{11}$	$2 + \frac{13}{12}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{43}{12}$
7	Sur la demi-droite graduée ci-dessous... 	B a pour abscisse $\frac{4}{6}$	C a pour abscisse 4	A a pour abscisse $2 + \frac{1}{6}$	le point d'abscisse $\frac{5}{2}$ est entre A et B
8	Dans quelle(s) figure(s), la surface coloriée représente les $\frac{5}{7}$ de l'aire totale ?				

Récréation mathématique

Drôles de résultats !

a. Donne une valeur approchée au dix-millième près de chacun des quotients suivants :
 $\frac{1\ 000\ 000\ 000}{81}$, $\frac{10\ 000\ 000\ 000}{891}$ et $\frac{100\ 000\ 000\ 000}{8\ 991}$.
 Que remarques-tu ?

b. Propose un quotient de deux nombres entiers dont une valeur approchée au dix-millième près est 11 112 222,333 3.

Des fractions historiques

a. Détermine les cinq premières décimales des quotients suivants : $\frac{22}{7}$ et $\frac{355}{113}$. De quel nombre célèbre se rapprochent ces quotients ?

b. Trouve, en faisant une recherche sur Internet, d'autres fractions qui sont aussi des valeurs approchées historiques de ce nombre. Existe-t-il une fraction égale à ce nombre ?

Ce nombre a-t-il une écriture décimale illimitée périodique (voir le travail de groupe) ?