Ma3 - Chapitre 4 : Dérivation 2/2

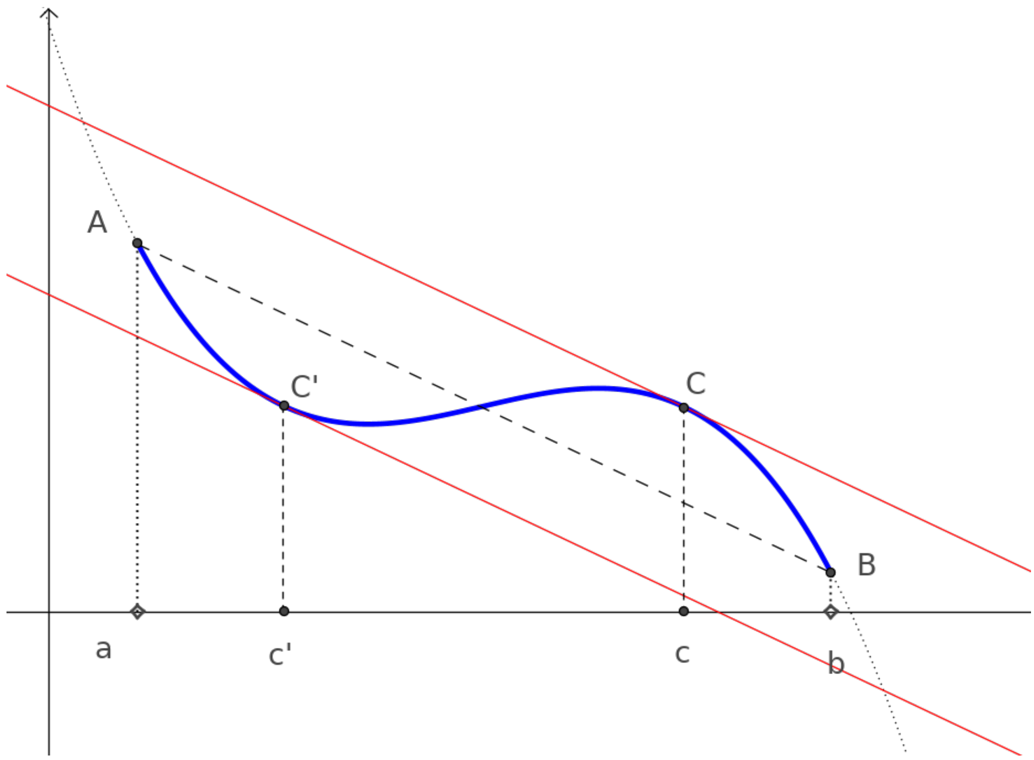


Illustration du théorème des accroissements finis

Problème

Un paysan possède un terrain qui a la forme d'un quadrilatère, avec deux côtés perpendiculaires qui mesurent 50 mètres de long et deux angles droits opposés l'un à l'autre. Les deux derniers angles sont tels que le premier mesure la moitié de l'autre. Déterminer l'aire de ce terrain (réponse arrondie au m²).

Prérequis et activités de découverte

1 [Activité] Relation continuité-dérivabilité

1. Explorer la relation entre continuité et dérivabilité en un point.

2. Enoncer un théorème puis le démontrer.

3. Que penser de la réciproque de ce théorème ?

Voir la théorie 1 à 2

2 [Activité] Une limite trigonométrique importante

1. On considère la fonction f déterminée par $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$

a. Déterminer D_f et Z_f .

b. D'après votre intuition, et/ou à l'aide de la calculatrice:

c. Que pensez-vous de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et de ? $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

d. Existe-t-il une asymptote horizontale pour cette fonction?

e. Pouvez-vous justifier ces réponses?

2. On s'intéresse maintenant à $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

a. Conjecturer une valeur pour cette limite, à partir d'essais numériques avec la calculatrice.

b. Proposer une représentation graphique de f sur la base des informations recueillies jusqu'à présent.

3. Que penser de $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}$, de $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin(z)}{z}$, de $\lim\limits_{x-a\to 0}\frac{\sin(x-a)}{x-a}$, de $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{x-a}$?

4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$

3 [Activité] Indéterminations trigonométriques de type 0/0

1. Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(12x)}{6x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(8x)}{10x^2}$

c. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{3x-6}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(12x)}{6x}$

e. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{6-3x}{\sin(x-2)}$

f. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)}{3x-6}$

Voir la théorie 3 et les exercices 1 à 3

4 [Activité] Dérivées trigonométriques

1. Représenter graphiquement la fonction sin et sa dérivée sur un même repère.

2. Quelle conjecture quant à [sin(x)]' peut-on énoncer ?

3. Démontrer ce résultat.

Indication : utiliser la formule trigonométrique $\sin(a)-\sin(b)=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

4. Déterminer [cos(x)]' et [tan(x))]'.

5 [Activité] Une nouvelle formule de dérivation

1. Comment déterminer $[\sin(x^2)]'$? Quelle est l'opération considérée ici ?

2. Enoncer une nouvelle formule de dérivation.

3. Déterminer :

a. $[\sin(4x^4-2x)]'$

b. $[\sin^4(x)]'$

c. $[\cos^4(x)]'$

d. $[\tan^4(x^6-1)]'$

e. $[\sin^4(4x^4-2x)]'$

f. $[\sin(\sin(x))]'$

4. Quelle relation y a-t-il entre cette nouvelle formule et $\left([f(x)]^n\right)'=n[f(x)^{n-1}]\cdot f'(x), \forall n\in\mathbb{R}$

5. Enoncer une formule pour déterminer $\left(\sqrt{f(x)}\right)'$.

6 [Avancé] Etude de fonction trigonométrique

Etudier complètement la fonction f déterminée par $f(x)=\frac{1}{2\sin(x)}+2\sin(x)$.

Voir la théorie 4 et les exercices 4 à 6

7 [Activité] Démonstration des formules de dérivation

1. Enoncer les formules de dérivation connues comme des théorèmes en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

2. Démontrer les théorèmes pour $\alpha\cdot f$, $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{1}{f}$.

3. Démontrer le théorème pour $\frac{f}{g}$.

8 [Avancé] Démonstration des formules de dérivation

Enoncer et démontrer $(x^n)'$ comme un théorème en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

Voir la théorie 5 et l'exercice 7

9 [Activité] Image d'un fermé

On considère le théorème suivant : « Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a\,;b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a\,;b])=[m\,;M]$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

2. Expliquer pourquoi on l'appelle le théorème « Image d'un fermé par une fonction continue ».

3. Illustrer (représentation graphique, qui sont a, b, m et M ?) ce théorème dans les cas suivants :

a. $f:[-1\,;1]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x^2$

b. $f:[1\,;100]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$

c. $f:[0\,;2]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

4. Que penser de la conjecture suivante : « Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction sur $[a\,;b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a\,;b])=[m\,;M]$ ». Qu'en déduire ?

10 [Activité] Théorème de Rolle

On considère le théorème suivant : « Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est telle que f est continue sur $[a;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$, alors il existe au moins un nombre $c\in]a\,;b[$ tel que $f'(c)=0$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

2. Illustrer (représentation graphique, qui sont a, b et c ?) ce théorème dans les cas suivants :

a. $f:[-1\,;1]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x^2$

b. $f:[1\,;100]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$.

c. $f:[0\,;2]\rightarrow\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

3. Discuter la pertinence des hypothèses.

4. * Pourquoi exige-t-on un intervalle ouvert pour la dérivabilité et un intervalle fermé pour la continuité ?

5. * Qui était Rolle ?

6. Démontrer le théorème de Rolle.

11 [Activité] Théorème des accroissements finis

On considère le théorème suivant : « Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est telle que f est continue sur $[a;b]$ et f est dérivable sur $]a;b[$, alors il existe au moins un nombre $c\in]a\,;b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

2. Illustrer (représentation graphique, qui sont a, b et c ?) ce théorème dans les cas suivants :

a. $f:[-1\,;2]\to\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x^2$

b. $f:[1\,;100]\to\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$.

c. $f:[0\,;3]\to\mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

3. Discuter la pertinence des hypothèses.

4. Démontrer ce théorème.

12 [Activité] Application

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des AF pour la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$ sur l'intervalle [25;36].

13 [Activité] Corollaire du théorème des accroissements finis

On considère le théorème suivant : « Soit f définie sur un intervalle I. Alors on a :

si $f'(x)>0, \forall x\in I$, alors f est strictement croissante sur I

si $f'(x)<0, \forall x\in I$, alors f est strictement décroissante sur I

si $f'(x)=0, \forall x\in I$, alors f est constante sur I

a. Illustrer ce théorème.

b. A quoi est-il utile ?

c. Démontrer ce théorème.

d. Que penser de sa réciproque ?

Voir la théorie 6 à 7 et les exercices 8 à 11

14 [Aller plus loin] Monstres

Il existe en analyse mathématique des fonctions dont le comportement n'est pas très intuitif … On les appelle parfois les « monstres analytiques » !

1. Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

a. Essayer avec GeoGebra de la représenter graphiquement (en particulier près de 0) …

b. Est-elle continue en $x\neq 0$?

c. Est-elle continue en $x=0$?

Prérequis et activités de découverte

2. Soit la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

a. Essayer avec GeoGebra de la représenter graphiquement (en particulier près de 0) …

b. Montrer que f est dérivable en $x=0$.

c. Montrer que sa dérivée f' n'est pas continue en $x=0$.

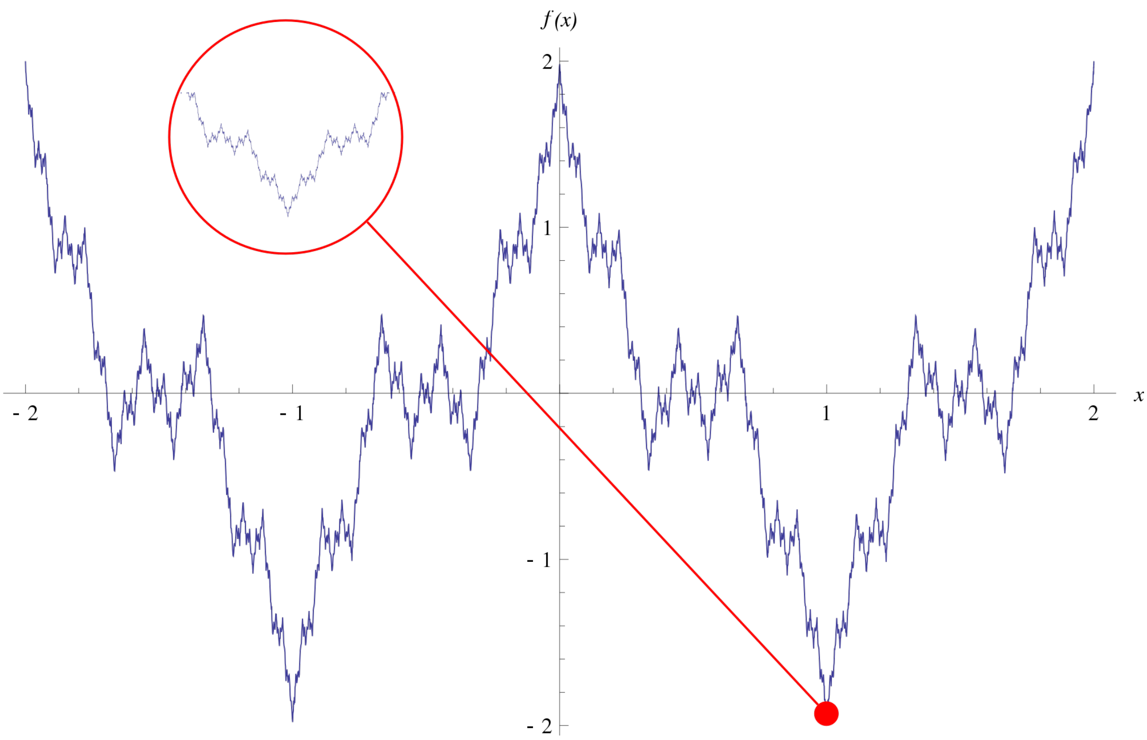
d. On peut considérer d'autres types de fonctions … et de courbes ! Voir les exemples proposés avec GeoGebra …

3. Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)\cos(3\pi x)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos(3^2\pi x)+\left(\frac{1}{2}\right)^3\cos(3^3\pi x)+\ldots \quad =\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i\cos(3^i\pi x)$$

a. Essayer avec GeoGebra de la représenter graphiquement…

b. Commenter le graphe ci-dessous :



Source : https://weekly-geekly-es.imtqy.com/articles/fr407883/index.html

4. D'autres monstres :
http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/alachal/diaporamas/diaporama_Lhopital/Lhopital5.html#Lhopital11b

1 [Souvenirs] Continuité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$) et $a \in I$.
Un **voisinage de a** est un intervalle ouvert J tel que $a \in J$

Définition mathématique de la continuité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$) et $a \in I$.

f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1)\ \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 2)\ f(a) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 3)\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$

Si on veut être plus concis, on écrira plus simplement:

f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque : quand on préfère travailler avec la variable x, on écrit :

f est continue en x $\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

Théorème [Fonctions continues] (sans démonstration)

Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition : polynomiales, rationnelles, racines, trigonométriques, exponentielles, logarithmes.

Remarque : une fonction continue sur son D_f ne l'est pas forcément sur $\mathbb{R}$: par exemple la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$); une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}$ n'est pas forcément continue (par exemple la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1, \text{si } x < 0 \\ -1, \text{si } x \geq 0 \end{cases}$).

Théorème [Opérations avec des fonctions continues] (sans démonstration)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues en $a \in I$. Alors on a :
les fonctions $\lambda f\ (\lambda \in \mathbb{R}), f+g, f-g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}\ (\text{si } g(a) \neq 0)$ sont continues en a.

Soit $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en $f(a)$.

2 [A savoir] Relation continuité - dérivabilité

Théorème [Relation continuité/dérivabilité]

Si f est dérivable en x, alors f est continue en x.

Remarque : la réciproque de ce théorème est fausse. La fonction valeur absolue en $x=0$ est un contre-exemple.

Voir les exercices 1 à 2

3 [A savoir] Limites trigonométriques

Théorème [Limites de fonctions élémentaires] (rappel du ch1 - sans démonstration)

[L3] $\lim_{x\to a}\sin(x)=\sin(a)$ et $\lim_{x\to a}\cos(x)=\cos(a)$ $\forall a\in\mathbb{R}$

Théorème [Propriétés des limites - suite] (rappel du ch1 - sans démonstration)

[PrL8] Si f et g sont deux fonctions réelles telles que $f(x)<g(x)$ pour $x\in I$, et si $\lim_{x\to a}f(x)$ et $\lim_{x\to a}g(x)$ existent, alors on a: $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$ pour $x\in I$

Théorème [Limite sinus x sur x]

Soit f la fonction déterminée par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$. Alors on a $\lim_{x\to 0}f(x)=1$

Indéterminations trigonométriques de type 0/0

Le principe consiste en principe à se ramener à l'utilisation de $\lim_{*\to 0}\dfrac{\sin(*)}{*}=1$

Exemple : calculer $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(-20x)}{x}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(-20x)}{x}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$	on substitue x par 0 et on constate un « type $\dfrac{0}{0}$ »
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(-20x)}{x}$	on observe que l'expression qui « pilote » le calcul est -20x
$=\lim_{-20\cdot x\to 0}\dfrac{-20\cdot\sin(-20x)}{-20x}$	on fait apparaître cette expression apparaisse au dénominateur et comme (...)->0
$=-20\lim_{-20\cdot x\to 0}\dfrac{\sin(-20x)}{-20x}$	on utilise une propriété des limites
$=-20\cdot 1$	on utilise $\lim_{*\to 0}\dfrac{\sin(*)}{*}=1$
$=-20$	

On est parfois amené à devoir utiliser des propriétés trigonométriques ou des idées plus subtiles ...

Exemple * : calculer $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x}$	on substitue x par 0 et on constate un « type $\dfrac{0}{0}$ »
$=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{3x^2}\cdot\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$	on multiplie par le conjugué

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{3x^2(1+\cos(x))}$ on effectue la multiplication des fractions

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))}$ on utilise la 3e identité remarquable

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x)}{3x^2(1+\cos(x))}$ on utilise la propriété trigonométrique $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin^2(x)}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ on sépare en produit de fractions

$=\dfrac{1}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos(x)}$ on utilise les propriétés des limites
[ok si les nouvelles limites existent]

$=\dfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 1\cdot\dfrac{1}{1+\cos(0)}$ on utilise $\lim\limits_{*\to 0}\dfrac{\sin(*)}{*}=1$ et on calcule la 3e limite facilement

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

Voir les exercices 3 à 5

4 [A savoir] Dérivées de sin, cos et tan

Théorème [Dérivée du sinus]

Si $x\in\mathbb{R}$, alors $[\sin(x)]'=\cos(x)$

Théorème [Dérivée du cosinus]

Si $x\in\mathbb{R}$, alors $[\cos(x)]'=-\sin(x)$

Théorème [Dérivée de la tangente]

Si $x\in\mathbb{R}$, alors $[\tan(x)]'=1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$

Remarque : de même que pour $[\sin(x)]^2=\sin^2(x)$ on note plus simplement $[\sin(x)]'=\sin'(x)$, $[\cos(x)]'=\cos'(x)$ et $[\tan(x)]'=\tan'(x)$.

Exemple : déterminer $[\sin(-20x^3+x)]'$, $[\cos^5(x)]'$, $[\sin^3(x^2-1)]'$

$\sin(-20x^3+x)=g(f(x))$ avec $f(x)=-20x^3+x$ et $g(x)=\sin(x)$

$[\sin(-20x^3+x)]' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-20x^3+x)' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-60x^2+1)$

$\cos^5(x)=[\cos(x)]^5=g(f(x))$ avec $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=x^5$

$[\cos^5(x)]' =$

$[[\cos(x)]^5]'=5[\cos(x)]^4\cdot[\cos(x)]'=5[\cos(x)]^4\cdot[-\sin(x)]=5-[\cos(x)]^4\cdot\sin(x)$

$\sin^3(x^2-1)=[\sin(x^2-1)]^3=g(f(x))$ avec $f(x)=\sin(x^2-1)$ et $g(x)=x^5$

$[[\sin(x^2-1)]^3]'=3[\sin(x^2-1)]^2[\sin(x^2-1)]'$

et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2-1)]'$:

$[\sin(x^2-1)]'=\cos(x^2-1)\cdot(x^2-1)'=\cos(x^2-1)\cdot(2x)$

d'où enfin : $[[\sin(x^2-1)]^3]'=3[\sin(x^2-1)]^2\cos(x^2-1)\cdot 2x=6x\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)$

Voir les exercices 3 à 5

5 [A savoir] Théorèmes « formules de dérivation »

Nous avons utilisé dans le chapitre précédent les formules de dérivation et les acceptant telles quelles. Il s'agit maintenant de les énoncer comme des théorèmes et de les démontrer.

Théorème [dérivée d'une composition] (sans démonstration)

Soit $f:I\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et $x\in I$.
Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $[g\circ f]$ est aussi dérivable en x et on a : $[g\circ f]'(x)=[g(f(x))]'=[g'\circ f](x)\cdot f'(x)$

Exemple : déterminer $[\sin(-20x^3+x)]'$, $[\cos^5(x)]'$, $[\sin^3(x^2-1)]'$

$\sin(-20x^3+x)=g(f(x))$ avec $f(x)=-20x^3+x$ et $g(x)=\sin(x)$

$[\sin(-20x^3+x)]' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-20x^3+x)' = \cos(-20x^3+x)\cdot(-60x^2+1)$

$\cos^5(x)=[\cos(x)]^5=g(f(x))$ avec $f(x)=\cos(x)$ et $g(x)=x^5$

$[\cos^5(x)]' =$
$[[\cos(x)]^5]'=5[\cos(x)]^4\cdot[\cos(x)]'=5[\cos(x)]^4\cdot[-\sin(x)]=5-[\cos(x)]^4\cdot\sin(x)$

$\sin^3(x^2-1)=[\sin(x^2-1)]^3=g(f(x))$ avec $f(x)=\sin(x^2-1)$ et $g(x)=x^5$

$[[\sin(x^2-1)]^3]'=3[\sin(x^2-1)]^2[\sin(x^2-1)]'$

et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2-1)]'$:

$[\sin(x^2-1)]'=\cos(x^2-1)\cdot(x^2-1)'=\cos(x^2-1)\cdot(2x)$

d'où enfin : $[[\sin(x^2-1)]^3]'=3[\sin(x^2-1)]^2\cos(x^2-1)\cdot 2x=6x\sin^2(x^2-1)\cos(x^2-1)$

Voir les exercices 6 à 8

Théorème [dérivée du produit par une constante]

Si f est dérivable en x , alors la fonction $\alpha\cdot f$ est aussi dérivable en x et on a:
$(\alpha\cdot f)'(x)=\alpha\cdot f'(x)$

Théorème [dérivée d'une somme]

Si f et g sont dérivables en x , alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable en x et on a:

$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$

Théorème [dérivée d'une différence]

Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction $f-g$ est aussi dérivable en x et on a: $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

Théorème [dérivée d'un produit]

Si f et g sont dérivables en x, alors la fonction $f\cdot g$ est aussi dérivable en x et on a: $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Théorème [dérivée d'un inverse]

Si f est dérivable en x et si il existe un voisinage V de x tel que $f(x)\neq 0$ pour tout $x\in V$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dérivable en x et on a: $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

Théorème [dérivée d'un quotient]

Si f et g sont dérivables en x et si il existe un voisinage V de x tel que $g(x)\neq 0$ pour tout $x\in V$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en x et on a:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Pour simplifier l'écriture, on note plus simplement ainsi : $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

Remarque : l'hypothèse que demande que les fonctions soient dérivables en x implique que ces fonctions soient bien définies dans un voisinage de x ; en effet, sinon, on ne pourrait pas considérer de $\lim\limits_{x+h\to x}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{h\to 0}$ pour des expressions contenant x ...

Théorème [dérivée de x^n]

Si f est la fonction définie par $f(x)=x^n$, avec $n\in\mathbb{R}$, alors $f'(x)=nx^{n-1}$

Voir l'exercice 9

6 [Souvenirs] Extrema de f et points critiques

Définition

Soit f définie sur un intervalle I et $x\in I$

f admet un **minimum (local)** en a ⇔ ∃ un voisinage V de a tel que $f(a)\leq f(x), \forall x\in V$

f admet un **maximum (local)** en a ⇔ ∃ un voisinage V de a tel que $f(a)\geq f(x), \forall x\in V$

f admet un **minimum global** en a ⇔ $f(a)\leq f(x), \forall x\in D_f$

f admet un **maximum global** en a ⇔ $f(a)\geq f(x), \forall x\in D_f$

Remarque : désormais, lorsqu'on parlera de minimum ou de maximum, sans plus de précision, on pensera toujours minimum ou maximum local.

Conjecture fausse

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que f admet un extremum local en a , alors $f'(a)=0$

Contre-exemple : f définie par $f(x)=|x|$ et $a=0$

Théorème [Relation extremum de f en a - dérivée $f'(a)$]

Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tels que f est dérivable en a et f admet un extremum local en a, alors $f'(a)=0$

Remarque : ce théorème n'est guère utile car notre objectif d'utilisation de la dérivée est de trouver les extrema de f ; si nous les connaissons déjà, plus besoin de dérivée !

Conjecture fausse

Si $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ et $a\in\mathbb{R}$ tel que $f'(a)=0$, alors f admet un extremum local en a

Contre-exemple : f définie par $f(x)=x^3$ et $a=0$

La « simple » connaissance des zéros de la dérivée f' ne suffit donc pas à pouvoir affirmer avec certitude que ceux-ci sont des extrema locaux de f ! L'ensemble des points critiques de f contient mais n'est pas forcément égal à celui des zéros de f'

7 [A savoir] La solution

Théorème [Image d'un fermé par une fonction continue]

Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a;b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a;b])=[m;M]$

Remarque : si l'hypothèse de continuité n'est pas vérifiée, le théorème n'est plus vrai !

Théorème [de Rolle]

Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est telle que :
f est continue sur $[a;b]$
f est dérivable sur $]a;b[$
$f(a)=f(b)$
alors il existe au moins un nombre $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$.

Michel Rolle, né à Ambert le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719, est un mathématicien français. Il est principalement connu pour avoir établi, en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable, une première version du théorème qui porte maintenant son nom.

Théorème [des accroissement finis]

Si $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ est telle que :
f est continue sur $[a;b]$
f est dérivable sur $]a;b[$
alors il existe au moins un nombre $c\in]a;b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Définition

Soit f définie sur un intervalle I.
f est **croissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
f est **strictement croissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
f est **décroissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
f est **strictement décroissante** sur $I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$

Théorème [corollaire des accroissement finis]

Soit f définie sur un intervalle I.
Alors on a :
□ si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I
□ si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I
□ si $f'(x) = 0, \forall x \in I$, alors f est constante sur I

Remarque : c'est ce théorème qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation et d'étudier complètement des fonctions !

Remarque : la réciproque de ce théorème est également vraie :

Théorème [réciproque du corollaire des accroissement finis]

Soit f définie sur un intervalle I.
Alors on a :
□ si f est strictement croissante sur I, alors $f'(x) > 0, \forall x \in I$
□ si f est strictement décroissante sur I, alors $f'(x) < 0, \forall x \in I$
□ si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0, \forall x \in I$

Voir les exercices 10 à 13

Limites trigonométriques

1 Calculer :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{3x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(8x)}{10x}$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$

d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2+1)}{x^4-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(2x-4)}{16-8x}$

f. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin(3x-3)}{9-9x}$

2 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les réponses :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{2x}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$

3 Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)+\sin(2x)-1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^2+x^3}}$

e. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

f. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

Voir la théorie 3

Dérivées de fonctions trigonométriques et de compositions

4 Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

a. $f(x)=\sin(x)+2\cos(x)$

b. $f(x)=\sin(x)\cos(x)$

c. $f(x)=(\sin(x)+2\cos(x))\cos(x)$

d. $f(x)=\dfrac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$

e. $f(x)=\dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

f. $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

g. $f(x)=2\cos(x)-\cos(2x)$

h. $f(x)=2\sin^2(x)+5\sin(x)-3$

i. $f(x)=3\sin^4(x)+\cos^4(x)-1$

j. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\sin(x)+\cos(x)}$

k. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

l. $f(x)=\sqrt{\cos(2x)+3\sin^2(x)}$

m. $f(x)=x-\sin(x)\cos(x)$

n. $f(x)=\cos(x)(\sin^2(x)+2)$

o. $f(x)=\dfrac{\sin(x)-x\cos(x)}{x\sin(x)+\cos(x)}$

p. $f(x)=\dfrac{x\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)-x\cos(x)}$

q. $f(x)=2x\cos(x)+(x^2-2)\sin(x)$

5 Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

a. $\left(\sin\left(x^4-\dfrac{1}{x}\right)\right)'$

b. $(\cos(5\sqrt{x}))'$

c. $(\tan(\cos(x)))'$

d. $(\sin^4(x))'$

e. $(\sqrt{\cos(x)})'$

f. $(\sin^4(2x))'$

6 Etudier les fonctions suivantes :

a. $f(x)=2\cos(x)-\cos(2x)$

b. $f(x)=\sin^2(x)-\sin(x)$

c. $f(x)=2\cos^3(x)-3$

d. $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(2x)}$

e. $f(x)=\dfrac{\tan(2x)}{\tan^2(x)}$

f. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-2\sin^2(x)}}$

Voir la théorie 4

Théorèmes-formules

7 On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

a. L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.

b. Illustrer son utilité par des exemples.

c. On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration : $(f-g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f-g)(x+h)-(f-g)(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-g(x+h))-(f(x)-g(x))}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-g(x+h)+g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-(g(x+h)-g(x))}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$= f'(x)-g'(x)$

Justifier chaque étape de la démonstation.

Voir la théorie 5 à 6

Les théorèmes importants

8 Soit la fonction polynomiale P définie par $P(x)=3x^4-11x^3+12x^2-4x+2$. Montrer que P' s'annule au moins une fois sur]0 ;1[.

9 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{\sin(x)+\cos(x)}{1+\cos^{(x)}}$. Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, f' s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]a\,;\,a+2\pi[$.

10 Soient p et q deux réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que la fonction polynomiale P définie par $P(x)=x^n+px+q$ admet au plus trois racines réelles si n est impair et au plus deux racines réelles si n est pair.

11 Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction f définie par $f(x)=x^3-9$ sur l'intervalle [-3;4]

12 Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des accroissements finis pour la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{x-7}$ sur l'intervalle [7,1;7,2]

13 Soit la fonction $f(x)=mx^2+kx+q\ (m\neq 0)$. On considère f dans l'intervalle [0;3].

a. Poser $m = -1$, $k = 2$ et $q = 3$ et calculer le point $c\in]0;\ 3[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

b. Représenter graphiquement la situation du point a.

On considère f dans l'intervalle [1;5].

c. Calculer le point $c\in]1;5[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

On considère f dans l'intervalle [2;8].

d. Calculer le point $c\in]2;8[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

On considère f dans l'intervalle $[a;b]$.

e. Formuler et démontrer une conjecture sur le point $c\in]a;b[$ annoncé par le théorème des accroissements finis.

14 La vitesse maximale autorisée sur une route nationale est de 110 [km/h]. L'indicateur de vitesse d'une voiture marque 80 [km/h] au moment où elle passe à hauteur d'une borne kilométrique le long d'une route. Quatre minutes plus tard, elle est 8 [km] plus loin et son compteur marque 88 [km/h]. Montrer qu'à un moment au moins, entre ces deux repères, la voiture a dépassé la vitesse de 118 [km/h].

15 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Il n'existe pas de fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I.

b. Si f est nulle sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)>0$ sur I.

c. Si f est strictement croissante sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)>0$ sur I.

d. Si f est strictement décroissante et dérivable sur un intervalle ouvert I, alors $f'(x)<0$ sur I.

Voir la théorie 7 à 8

« Ne tenez pour certain que ce qui est démontré. »

Isaac Newton, 1643-1727,philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais

A savoir en fin de chapitre

Continuité

✔ rappel : approche intuitive de la continuité en un point, sur un intervalle ; définition mathématique de la continuité en un point, sur un intervalle ; interpréter graphiquement la (non)continuité en un point ;

✔ théorème « relation continuité-dérivabilité en a » et sa réciproque ;

Voir la théorie 1 à 2

Limites et dérivées trigonométriques élémentaires

✔ La fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$: propriétés, représentation graphique ;

✔ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$: énoncer sous forme de théorème, démontrer ;

✔ calculs de limites trigonométriques ;

Voir la théorie 3 et les exercices 1 à 3

Dérivées de fonctions trigonométriques et de compositions

✔ dérivées de sin, cos et tan ;

✔ dérivées de fonctions composées ;

✔ dérivées de fonctions trigonométriques ;

Voir la théorie 4 et les exercices 4 à 6

Formules de dérivation (suite)

✔ théorèmes « dérivée du produit par une constante, d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient » : énoncer sous forme de théorèmes avec hypothèses et conclusions et démontrer em justifiant précisément ;

Voir la théorie 5 et l'exercice 7

Les théorèmes

✔ théorèmes « image d'un fermé » et « Rolle » : énoncer, avoir compris la démonstration, discuter les hypothèses

✔ théorème « AF » : énoncer, démontrer, discuter les hypothèses ; applications ;

✔ « corollaire AF » (dé/croissance d'une fonction sur un intervalle) : définitions et interprétation graphique ;

✔ corollaire du théorème des accroissements finis [relation entre «(dé)croissance de f et "signe de f'"] : énoncer, démontrer ; applications ;

Voir la théorie 6 à 7 et les exercices 8 à 11

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...

http://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-3e/complements/ch03