

Chapitre 3 - Dérivation 2/2

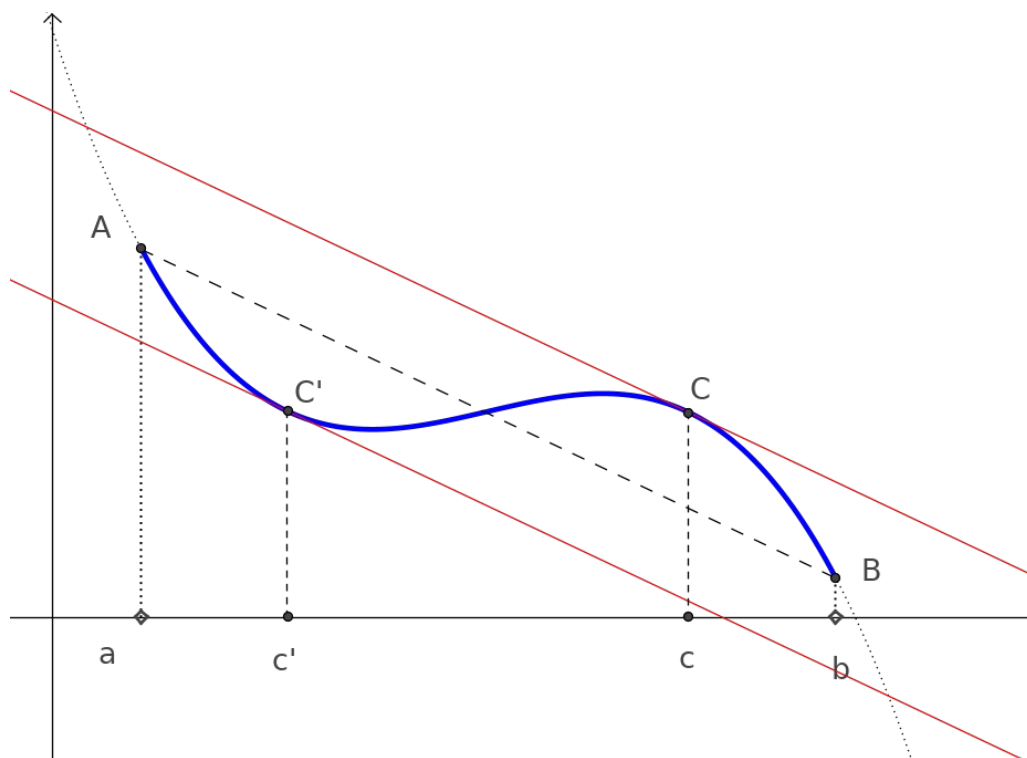


Illustration du théorème des accroissements finis

Problème

Un paysan possède un terrain qui a la forme d'un quadrilatère, avec deux côtés perpendiculaires qui mesurent 50 mètres de long et deux angles droits opposés l'un à l'autre. Les deux derniers angles sont tels que le premier mesure la moitié de l'autre. Déterminer l'aire de ce terrain (réponse arrondie au m^2).

1 [Activité] Relation continuité-dérivabilité

1. Explorer la relation entre continuité et dérivabilité en un point.
2. Énoncer un théorème puis le démontrer.
3. Que penser de la réciproque de ce théorème ?

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 2

2 [Activité] Une limite trigonométrique importante

1. On considère la fonction f déterminée par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
 - a. Déterminer D_f et Z_f .
 - b. D'après votre intuition, et/ou à l'aide de la calculatrice:
 - c. Que pensez-vous de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?
 - d. Existe-t-il une asymptote horizontale pour cette fonction ?
 - e. Pouvez-vous justifier ces réponses ?
2. On s'intéresse maintenant à $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 - a. Conjecturer une valeur pour cette limite, à partir d'essais numériques avec la calculatrice.
 - b. Proposer une représentation graphique de f sur la base des informations recueillies jusqu'à présent.
3. Que penser de $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}$, de $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z}$, de $\lim_{x-a \rightarrow 0} \frac{\sin(x-a)}{x-a}$, de $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a}$?
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$

3 [Activité] Indéterminations trigonométriques de type 0/0

1. Calculer :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(12x)}{6x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{10x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{3x-6}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(12x)}{6x}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6-3x}{\sin(x-2)}$

f. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2)}{3x-6}$

Voir la théorie 3 et les exercices 3 à 5

4 [Activité] Dérivées trigonométriques

1. Représenter graphiquement la fonction \sin et sa dérivée sur un même repère.
2. Quelle conjecture quant à $[\sin(x)]'$ peut-on énoncer ?
3. Démontrer ce résultat.

Indication : utiliser la formule trigonométrique $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

4. Déterminer $[\cos(x)]'$ et $[\tan(x)]'$.

5 [Activité] Une nouvelle formule de dérivation

1. Comment déterminer $[\sin(x^2)]'$? Quelle est l'opération considérée ici ?
2. Énoncer une nouvelle formule de dérivation.
3. Déterminer :
 - a. $[\sin(4x^4 - 2x)]'$
 - b. $[\sin^4(x)]'$
 - c. $[\cos^4(x)]'$
 - d. $[\tan^4(x^6 - 1)]'$
 - e. $[\sin^4(4x^4 - 2x)]'$
 - f. $[\sin(\sin(x))]'$
4. Quelle relation y a-t-il entre cette nouvelle formule et $[(f(x))^n]' = n[f(x)^{n-1}] \cdot f'(x), \forall n \in \mathbb{R}$?
5. Énoncer une formule pour déterminer $(\sqrt{f(x)})'$.

6 [Aller plus loin] Etude de fonction trigonométrique

Étudier complètement la fonction f déterminée par $f(x) = \frac{1}{2\sin(x)} + 2\sin(x)$.

[Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 6 à 8](#)

7 [Activité] Démonstration des formules de dérivation

Énoncer et démontrer les formules de dérivation connues comme des théorèmes en identifiant clairement hypothèses et conclusions, puis les démontrer.

[Voir la théorie 6](#)

8 [Activité] Image d'un fermé

On considère le théorème suivant : « Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a; b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a; b]) = [m; M]$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.
2. Expliquer pourquoi on l'appelle le théorème « Image d'un fermé par une fonction continue ».
3. Illustrer (représentation graphique, qui sont a , b , m et M ?) ce théorème dans les cas suivants :
 - a. $f: [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = x^2$

b. $f:[1;100] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$

c. $f:[0;2] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

4. Que penser de la conjecture suivante : « Si $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction sur $[a;b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a;b])=[m;M]$ ». Qu'en déduire ?

9 [Activité] Théorème de Rolle

On considère le théorème suivant : « Si $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que f est continue sur $[a;b]$, f est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a)=f(b)$, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)=0$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

2. Illustrer (représentation graphique, qui sont a , b et c ?) ce théorème dans les cas suivants :

a. $f:[-1;1] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x^2$

b. $f:[1;100] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$.

c. $f:[0;2] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

3. Discuter la pertinence des hypothèses.

4. * Pourquoi exige-t-on un intervalle ouvert pour la dérivabilité et un intervalle fermé pour la continuité ?

5. * Qui était Rolle ?

6. Démontrer le théorème de Rolle.

10 [Activité] Théorème des accroissements finis

On considère le théorème suivant : « Si $f:I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que f est continue sur $[a;b]$ et f est dérivable sur $]a;b[$, alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ »

1. Faire un schéma pour interpréter graphiquement ce résultat.

2. Illustrer (représentation graphique, qui sont a , b et c ?) ce théorème dans les cas suivants :

a. $f:[-1;2] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x^2$

b. $f:[1;100] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=2$.

c. $f:[0;3] \rightarrow \mathbb{R}$ déterminée par $f(x)=x(x-2)^2$

3. Discuter la pertinence des hypothèses.

4. Démontrer ce théorème.

11 [Activité] Application

Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des AF pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[25;36]$.

12 [Activité] Corollaire du théorème des accroissements finis

On considère le théorème suivant : « Soit f définie sur un intervalle I . Alors on a :

si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I

si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I

si $f'(x) = 0, \forall x \in I$, alors f est constante sur I

1. Illustrer ce théorème.

2. A quoi est-il utile ?

3. Démontrer ce théorème.

[Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 10 à 12](#)

1 [Souvenirs] Continuité

Définition

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$) et $a \in I$.
Un **voisinage de a** est un intervalle ouvert J tel que $a \in J$.

Définition mathématique de la continuité en un point

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$) et $a \in I$.

f est continue en a \Leftrightarrow $\begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 2) f(a) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$

Si on veut être plus concis, on écrira plus simplement:

f est continue en a $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Remarque : quand on préfère travailler avec la variable x , on écrit :

$$f \text{ est continue en } x \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$$

Théorème [Fonctions continues] (sans démonstration)

Toutes les fonctions suivantes sont continues sur leur domaine de définition : polynomiales, rationnelles, racines, trigonométriques, exponentielles, logarithmes.

Remarque : une fonction continue sur son D_f ne l'est pas forcément sur \mathbb{R} : par exemple la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$; une fonction telle que $D_f = \mathbb{R}$ n'est pas forcément continue

(par exemple la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0 \\ -1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$).

Théorème [Opérations avec des fonctions continues] (sans démonstration)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues en $a \in I$. Alors on a :
les fonctions λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a .

Soit $a \in I$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue en $f(a)$.

2 [A savoir] Relation continuité - dérivabilité

Théorème [Relation continuité/dérivabilité]

Si f est dérivable en x , alors f est continue en x .

Remarque : la réciproque de ce théorème est fautive. La fonction valeur absolue en $x=0$ est un contre-exemple.

Voir les exercices 1 à 2

3 [A savoir] Limites trigonométriques

Théorème [Limites de fonctions élémentaires] (rappel du ch1 - sans démonstration)

$$\text{[L3]} \quad \lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Théorème [Propriétés des limites - suite] (rappel du ch1 - sans démonstration)

$$\text{[PrL8]} \quad \text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux fonctions réelles telles que } f(x) < g(x) \text{ pour } x \in I, \text{ et}$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ existent, alors on a: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ pour } x \in I$$

Théorème [Limite sinus x sur x]

$$\text{Soit } f \text{ la fonction déterminée par } f(x) = \frac{\sin(x)}{x}. \text{ Alors on a } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Indéterminations trigonométriques de type 0/0

Le principe consiste en principe à se ramener à l'utilisation de $\lim_{* \rightarrow 0} \frac{\sin(*)}{*} = 1$

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-20x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-20x)}{x} = " \frac{0}{0} " \quad \text{on substitue } x \text{ par } 0 \text{ et on constate un « type } \frac{0}{0} \text{ »}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-20x)}{x} \quad \text{on observe que l'expression qui « pilote » le calcul est } -20x$$

$$\hookrightarrow \lim_{-20 \cdot x \rightarrow 0} \frac{-20 \cdot \sin(-20x)}{-20x} \quad \text{on fait apparaître cette expression apparaisse au}$$

dénominateur et comme (...) $\rightarrow 0$

$$\hookrightarrow -20 \lim_{-20 \cdot x \rightarrow 0} \frac{\sin(-20x)}{-20x} \quad \text{on utilise une propriété des limites}$$

$$\hookrightarrow -20 \cdot 1 \quad \text{on utilise } \lim_{* \rightarrow 0} \frac{\sin(*)}{*} = 1$$

$$\hookrightarrow -20$$

On est parfois amené à devoir utiliser des propriétés trigonométriques ou des idées plus subtiles :

Exemple * : calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x} \quad \text{on substitue } x \text{ par } 0 \text{ et on constate un « type } \frac{0}{0} \text{ »}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} \quad \text{on multiplie par le conjugué}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \cos(x))}{3x^2(1 + \cos(x))} && \text{on effectue la multiplication des fractions} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{3x^2(1 + \cos(x))} && \text{on utilise la 3^e identité remarquable} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{3x^2(1 + \cos(x))} && \text{on utilise la propriété trigonométrique } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)} && \text{on sépare en produit de fractions} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} && \text{on utilise les propriétés des limites} \\
 & && \text{[ok si les nouvelles limites existent]} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + \cos(0)} && \text{on utilise } \lim_{* \rightarrow 0} \frac{\sin(*)}{*} = 1 \text{ et on calcule la 3^e limite facilement} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Voir les exercices 3 à 5

4 [A savoir] Dérivées de sin, cos et tan

Théorème [Dérivée du sinus]

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}, \text{ alors } [\sin(x)]' = \cos(x)$$

Théorème [Dérivée du cosinus]

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}, \text{ alors } [\cos(x)]' = -\sin(x)$$

Théorème [Dérivée de la tangente]

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}, \text{ alors } [\tan(x)]' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Remarque : de même que pour $[\sin(x)]^2 = \sin^2(x)$ on note plus simplement $[\sin(x)]' = \sin'(x)$, $[\cos(x)]' = \cos'(x)$ et $[\tan(x)]' = \tan'(x)$.

5 [A savoir] Dérivées d'une composition

Théorème [dérivée d'une composition] (sans démonstration)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in I$.

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, alors la fonction $[g \circ f]$ est aussi dérivable en x et on a : $[g \circ f]'(x) = [g(f(x))]' = [g' \circ f](x) \cdot f'(x)$

Exemple : déterminer $[\sin(-20x^3+x)]'$, $[\cos^5(x)]'$, $[\sin^3(x^2-1)]'$

$$\sin(-20x^3+x)=g(f(x)) \text{ avec } f(x)=-20x^3+x \text{ et } g(x)=\sin(x)$$

$$[\sin(-20x^3+x)]' = \cos(-20x^3+x) \cdot (-20x^3+x)' = \cos(-20x^3+x) \cdot (-60x^2+1)$$

$$\cos^5(x)=[\cos(x)]^5=g(f(x)) \text{ avec } f(x)=\cos(x) \text{ et } g(x)=x^5$$

$$[\cos^5(x)]' =$$

$$[[\cos(x)]^5]' = 5[\cos(x)]^4 \cdot [\cos(x)]' = 5[\cos(x)]^4 \cdot [-\sin(x)] = 5 - [\cos(x)]^4 \cdot \sin(x)$$

$$\sin^3(x^2-1)=[\sin(x^2-1)]^3=g(f(x)) \text{ avec } f(x)=\sin(x^2-1) \text{ et } g(x)=x^5$$

$$[[\sin(x^2-1)]^3]' = 3[\sin(x^2-1)]^2 [\sin(x^2-1)]'$$

et on doit recommencer pour dériver $[\sin(x^2-1)]'$:

$$[\sin(x^2-1)]' = \cos(x^2-1) \cdot (x^2-1)' = \cos(x^2-1) \cdot (2x)$$

$$\text{d'où enfin : } [[\sin(x^2-1)]^3]' = 3[\sin(x^2-1)]^2 \cos(x^2-1) \cdot 2x = 6x \sin^2(x^2-1) \cos(x^2-1)$$

Voir les exercices 6 à 8

6 [A savoir] Théorèmes « formules de dérivation »

Nous avons utilisé dans le chapitre précédent les formules de dérivation et les acceptant telles quelles. Il s'agit maintenant de les énoncer comme des théorèmes et de les démontrer.

Théorème [dérivée du produit par une constante]

Si f est dérivable en x , alors la fonction $\alpha \cdot f$ est aussi dérivable en x et on a :

$$(\alpha \cdot f)'(x) = \alpha \cdot f'(x)$$

Théorème [dérivée d'une somme]

Si f et g sont dérivables en x , alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable en x et on a :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Théorème [dérivée d'une différence]

Si f et g sont dérivables en x , alors la fonction $f-g$ est aussi dérivable en x et on a :

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Théorème [dérivée d'un produit]

Si f et g sont dérivables en x , alors la fonction $f \cdot g$ est aussi dérivable en x et on a :

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Théorème [dérivée d'un inverse]

Si f est dérivable en x et si il existe un voisinage V de x tel que $f(x) \neq 0$ pour tout

$$x \in V, \text{ alors la fonction } \frac{1}{f} \text{ est aussi dérivable en } x \text{ et on a : } \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Théorème [dérivée d'un quotient]

Si f et g sont dérivables en x et si il existe un voisinage V de x tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in V$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en x et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Pour simplifier l'écriture, on note plus simplement ainsi : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Remarque : l'hypothèse que demande que les fonctions soient dérivables en x implique que ces fonctions soient bien définies dans un voisinage de x ; en effet, sinon, on ne pourrait pas considérer de $\lim_{x+h \rightarrow x}$, c'est-à-dire $\lim_{h \rightarrow 0}$ pour des expressions contenant x ...

Voir l'exercice 9

7 [Souvenirs] Extrema de f et points critiques

Définition

Soit f définie sur un intervalle I et $x \in I$

f admet un **minimum (local)** en $a \Leftrightarrow \exists$ un voisinage V de a tel que $f(a) \leq f(x), \forall x \in V$

f admet un **maximum (local)** en $a \Leftrightarrow \exists$ un voisinage V de a tel que $f(a) \geq f(x), \forall x \in V$

f admet un **minimum global** en $a \Leftrightarrow f(a) \leq f(x), \forall x \in D_f$

f admet un **maximum global** en $a \Leftrightarrow f(a) \geq f(x), \forall x \in D_f$

Remarque : désormais, lorsqu'on parlera de minimum ou de maximum, sans plus de précision, on pensera toujours minimum ou maximum local.

Conjecture fausse

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$

Contre-exemple : f définie par $f(x) = |x|$ et $a = 0$

Théorème [Relation extremum de f en a - dérivée $f'(a)$]

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que f est dérivable en a et f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$

Remarque : ce théorème n'est guère utile car notre objectif d'utilisation de la dérivée est de nous aider à trouver les extrema de f ; si nous les connaissons déjà, plus besoin de dérivée !

Conjecture fausse

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a

Contre-exemple : f définie par $f(x) = x^3$ et $a = 0$

La « simple » connaissance des zéros de la dérivée f' ne suffit donc pas à pouvoir affirmer avec certitude que ceux-ci sont des extrema locaux de f ! L'ensemble des points critiques de f contient mais n'est pas forcément égal à celui des zéros de f'



8 [A savoir] La solution

Théorème [Image d'un fermé par une fonction continue]

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[a; b]$, alors il existe m et M deux nombres réels tels que $f([a; b]) = [m; M]$

Remarque : si l'hypothèse de continuité n'est pas vérifiée, le théorème n'est plus vrai !

Théorème [de Rolle] (sans démonstration)

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que :
 f est continue sur $[a; b]$
 f est dérivable sur $]a; b[$
 $f(a) = f(b)$
 alors il existe au moins un nombre $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Michel Rolle, né à Ambert le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719, est un mathématicien français. Il est principalement connu pour avoir établi, en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable, une première version du théorème qui porte maintenant son nom.



Théorème [des accroissement finis]

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que :
 f est continue sur $[a; b]$
 f est dérivable sur $]a; b[$
 alors il existe au moins un nombre $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Définition

Soit f définie sur un intervalle I .
 f est **croissante** sur $I \Leftrightarrow f(x) \geq f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
 f est **strictement croissante** sur $I \Leftrightarrow f(x) > f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
 f est **décroissante** sur $I \Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$
 f est **strictement décroissante** sur $I \Leftrightarrow f(x) < f(y), \forall x, y \in I$ tels que $x > y$

Théorème [corollaire des accroissement finis]

Soit f définie sur un intervalle I .
 Alors on a :
 si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, alors f est strictement croissante sur I
 si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I
 si $f'(x) = 0, \forall x \in I$, alors f est constante sur I

Remarque : c'est ce théorème qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation et d'étudier complètement des fonctions !

Voir les exercices 10 à 12

Continuité

1 Représenter graphiquement une fonction f satisfaisant à toutes les conditions suivantes:

- f est définie mais pas continue en $x=2$
- f n'est pas définie en $x=-3$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -2$
- f n'est pas définie en $x=-1$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ n'existe pas
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -\infty$
- $f'(1) = 1$
- f n'est pas dérivable en $x=-4$

2 Une fonction compliquée !

Soit f la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Que penser de la continuité de cette fonction ?

Voir la théorie 1 à 2

Limites trigonométriques

3 Calculer :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(8x)}{10x}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2+1)}{x^4-1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(2x-4)}{16-8x}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(3x-3)}{9-9x}$

4 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les réponses :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\sin(bx)}$

5 Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement les réponses :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) + \sin(2x) - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2 + x^3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2 + x^3}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - \sin(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$

Voir la théorie 3

Dérivées de fonctions trigonométriques et de compositions

6 Déterminer les dérivées des fonctions f suivantes :

- $f(x) = \sin(x) + 2 \cos(x)$
- $f(x) = \sin(x) \cos(x)$
- $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x)) \cos(x)$
- $f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{\sin(x) - 1}$
- $f(x) = \frac{\cos(x) + 2}{\cos(x) + 3}$
- $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$
- $f(x) = 2 \cos(x) - \cos(2x)$
- $f(x) = 2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) - 3$
- $f(x) = 3 \sin^4(x) + \cos^4(x) - 1$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$
- $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}$
- $f(x) = \sqrt{\cos(2x) + 3 \sin^2(x)}$
- $f(x) = x - \sin(x) \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x) (\sin^2(x) + 2)$

- o. $f(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x \sin(x) + \cos(x)}$
 p. $f(x) = \frac{x \sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - x \cos(x)}$
 q. $f(x) = 2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x)$

7 Etudier les fonctions suivantes :

- a. $f(x) = 2 \cos(x) - \cos(2x)$
 b. $f(x) = \sin^2(x) - \sin(x)$
 c. $f(x) = 2 \cos^3(x) - 3$
 d. $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(2x)}$
 e. $f(x) = \frac{\tan(2x)}{\tan^2(x)}$
 f. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - 2 \sin^2(x)}}$

8 Déterminer les dérivées suivantes et donner la réponse sans exposant négatif ou fractionnaire :

- a. $(\sin(x^4 - \frac{1}{x}))'$
 b. $(\cos(5\sqrt{x}))'$
 c. $(\tan(\cos(x)))'$
 d. $(\sin^4(x))'$
 e. $(\sqrt{\cos(x)})'$
 f. $(\sin^4(2x))'$
 g. $(\sqrt{\sin^{45}(\tan(\cos(3x)))})'$
 h. $(\sqrt{x^4 + x^2})'$

Voir la théorie 4 à 5

Théorèmes-formules

9 On considère le théorème « Dérivée de la différence de deux fonctions »

- a. L'énoncer en identifiant clairement hypothèses et conclusions.
 b. Illustrer son utilité par des exemples.
 c. On donne ci-dessous une démonstration :

Démonstration : $(f - g)'(x) =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f - g)(x+h) - (f - g)(x)}{h}$, car [1]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - g(x+h)) - (f(x) - g(x))}{h},$$

car [2]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - g(x+h) + g(x)}{h},$$

car [3]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

car [4]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

car [5]

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

car [6]

$$= f'(x) - g'(x), \text{ car [7]}$$

Donner les arguments qui manquent.

Voir la théorie 6

Les théorèmes

10 Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des AF pour la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 9$ sur l'intervalle $[-3; 4]$

11 Trouver la ou les valeurs prévues par le théorème des AF pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x-7}$ sur l'intervalle $[7.1; 7.2]$

12 Énoncer et démontrer le théorème suivant : « Si f est dérivable en a et f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$ ».

13 Vrai ou faux ? Justifier.

- a. Il n'existe pas de fonction à la fois croissante et décroissante sur un intervalle I .
 b. Si f est nulle sur un intervalle ouvert I , alors $f'(x) > 0$ sur I .
 c. Si f est strictement croissante sur un intervalle ouvert I , alors $f'(x) > 0$ sur I .
 d. Si f est strictement décroissante et dérivable sur un intervalle ouvert I , alors $f'(x) < 0$ sur I .

Voir la théorie 7 à 8

« Ne tenez pour certain que ce qui est démontré. »

Isaac Newton, 1643-1727,
philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais

A savoir en fin de chapitre

Continuité

- ✓ rappel : approche intuitive de la continuité en un point, sur un intervalle ; définition mathématique de la continuité en un point, sur un intervalle ; interpréter graphiquement la (non)continuité en un point ;
- ✓ théorème « relation continuité-dérivabilité en a » et sa réciproque ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 2

Limites et dérivées trigonométriques élémentaires

- ✓ La fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$: propriétés, représentation graphique ;
- ✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$: énoncer sous forme de théorème, démontrer ;
- ✓ calculs de limites trigonométriques ;

Voir la théorie 3 et les exercices 3 à 5

Dérivées de fonctions trigonométriques et de compositions

- ✓ dérivées de sin, cos et tan ;
- ✓ dérivées de fonctions composées ;
- ✓ dérivées de fonctions trigonométriques ;

Voir la théorie 4 à 5 et les exercices 6 à 8

Formules de dérivation (suite)

- ✓ théorèmes « dérivée du produit par une constante, d'une somme, d'une différence, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient » : énoncer sous forme de théorèmes avec hypothèses et conclusions et démontrer en justifiant précisément ;

Voir la théorie 6 et l'exercice 9

Les théorèmes

- ✓ théorèmes « image d'un fermé » et « Rolle » : énoncer, avoir compris la démonstration, discuter les hypothèses ;
- ✓ théorème « AF » : énoncer, démontrer, discuter les hypothèses ; applications ;
- ✓ « corollaire AF » (dé/croissance d'une fonction sur un intervalle) : définitions et interprétation graphique ;
- ✓ corollaire du théorème des accroissements finis [relation entre «(dé)croissance de f et "signe de f' "] : énoncer, démontrer ; applications ;

Voir la théorie 7 à 8 et les exercices 10 à 12

Quelques compléments

en particulier des vidéos explicatives ...

<http://sesamath.ch/post-obligatoire/matugym/manuel-matugym-3e/complements/ch03>

