Chapitre 4 - Combinatoire et probabilités

Tirage de la lotterie

Dés polyhédriques

Problème

x est un nombre entier naturel et les nombres y et z sont deux nombres réels strictement positifs qui vérifient simultanément les deux égalités :
$xz+yz = 20$; $x+y+z = 15$.

Combien vaut x ?

Source : FFJM

1 [Activité] Combinatoire en vrac

1. Deux personnes jouent au tennis selon les règles suivantes : le premier qui gagne deux jeux de suite ou qui gagne trois jeux au total gagne la partie. Combien de parties différentes peuvent-ils jouer?

2. Un menu de restaurant propose 10 hors d'oeuvres, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun un de ces 4 plats?

3. On suppose qu'il n'y a pas de répétition. On emploie les 6 chiffres 2,3,5,6,7 et 9.

a. Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?

b. Combien de ces nombres sont pairs?

c. Combien de ces nombres sont inférieurs à 400?

d. Combien de ces nombres sont multiples de 5?

e. Et si on admet pouvoir choisir plusieurs fois le même chiffre, qu'est-ce que cela change pour les 4 questions précédentes ?

4. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?

5. Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe de n côtés ?

6. Combien de mots différents peut-on former :

a. avec des lettres du mot GENOVA ?

b. avec des lettres du mot GENEVA ?

c. avec des lettres du mot GENEVE ?

7. Dans un voilier, chaque signal est constitué de 8 pavillons alignés verticalement. Combien de signaux différents peut-on former à partir d'un ensemble de 4 pavillons rouges indiscernables, 3 pavillons blancs indiscernables et un pavillon bleu ?

8. 9 personnes prennent place :

a. sur un banc : de combien de manières différentes peuvent-elles se disposer ?

b. autour d'une table ronde : de combien de manières différentes peuvent-elles se disposer les unes par rapport aux autres ?

c. Même question que b), mais 2 personnes choisies à l'avance doivent être voisines.

9. Le jeu de Sport Toto consiste à effectuer des pronostics sur une grille de 13 lignes correspondant à des matches. Pour chaque match, on choisit l'une des trois possibilités suivantes : l'équipe A gagne (on coche alors la 1re colonne de cette ligne), match nul (on coche alors la 2e colonne de cette ligne), l'équipe B gagne (on coche alors la 3e colonne de cette ligne).

a. Combien de grilles différentes peut-on écrire ?

b. Parmi toutes ces grilles, combien permettent de réaliser :

i 13 points

ii 12 points

iii 4 points

iv 0 points

10. On jette 20 fois de suite une pièce de monnaie :

a. Combien de séquences différentes sont-elles possibles ?

b. Parmi celles-ci, combien contiennent exactement:

i 1 fois pile ?

ii 4 fois pile ?

iii 10 fois pile ?

iv 20 fois pile ?

11. Pour mettre sur pied le voyage d'étude d'une classe de 20 élèves, comprenant 9 filles, six organisateurs doivent être choisis parmi les élèves :

a. Combien y a-t-il de possibilités ?

b. Combien de possibilités seront-elles seulement composées de filles ?

c. Combien de possibilités seront-elles mixtes ?

12. On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Chacun reçoit 9 cartes.

a. Quel est le nombre de distributions différentes ?

b. Combien d'entre-elles permettent-elles à l'un des joueur d'avoir les 4 valets ?

2 [Aller plus loin] Combinatoire avec répétitions

Une fleuriste a cinq roses rouges et cinq roses blanches d'apparence identique. Combien de sortes de bouquets de cinq fleurs pourra-t-elle confectionner ?

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 5

3 [Activité] Introduction aux probabilités

On lance une pièce de monnaie. C'est une **expérience aléatoire** à deux **issues** possibles : pile (P) ou face (F). Si la pièce est non truquée, nous sommes tous convaincus qu'on a une chance sur deux de tomber sur P et une chance sur deux de tomber sur face, que la probabilité d'obtenir pile ou face est égale à $\frac{1}{2}$. On le note p(" obtenir pile ") = p(" obtenir face ") = $\frac{1}{2}$,ou plus simplement

$p(P)=p(F) = \frac{1}{2}$

1. On jette maintenant un dé (non truqué, à six faces)

a. Combien d'issues sont-elles possibles pour cette expérience aléatoire ?

b. Comment définir " naturellement " les probabilités d'obtenir ces différentes issues ? Comment le noter ?

c. Que penser de la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

d. Que penser de la probabilité d'obtenir au moins 5 ?

2. Dans une urne, il y a 100 boules numérotées de 00 à 99. on tire une boule au hasard et on appelle X (respectivement Y) le premier (respectivement le deuxième) chiffre de son numéro. Déterminer :

a. $p(X=3)$	**e.** $p(X\leq Y)$	**i.** $p(X+Y\neq 8)$
b. $p(Y\neq 4)$	**f.** $p(X+Y=9)$	**j.** $p(X\neq 5 \; et \; Y\neq 4)$
c. $p(X\neq Y)$	**g.** $p(X<4 \; et \; Y<3)$	**k.** $p(XY\leq 49)$
d. $p(X>Y)$	**h.** $p(X>4 \; et \; Y<4)$	**l.** $p(XY>49)$

3. Vocabulaire

a. Décrire l'**univers** Ω et les **événements aléatoires** considérés dans les exemples précédents; dire s'ils sont **élémentaires** ou non, et si on a considéré des événements **disjoints** ou non.

b. Déterminer les **événements complémentaires** des événements considérés jusque-là.

c. Qu'entend-t-on par « **événements certain** », par « **événement impossible** » ?

4 [Activité] Le problème du Grand Duc de Toscane

On jouait beaucoup, au XVIème et XVIIème siècle, au jeu de passe-dix. La règle en est très simple : on jette trois dés au hasard. L'un des joueurs gagne s'il obtient une somme de points supérieure à 10, il perd si la somme des points est inférieure ou égale à 10.

Le Grand Duc de Toscane demanda un jour à Galilée : « Pourquoi lorsqu'on lance trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces sommes soient obtenues chacune de six façons différentes ? »

C'est à Galilée que l'on attribue d'avoir levé, le premier, l'apparent paradoxe, dans un traité commandé par le Grand Duc de Toscane : « Considerazione sopra il giocco dei Dadi » (1620).

Sans forcément en faire un traité, répondre la question du Grand Duc de Toscane.

5 [Activité] Le premier problème du chevalier de Méré

"Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré; car il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre. C'est comme vous savez, un grand défaut. Il me disait donc qu'il avait trouvé difficulté sur les nombres pour cette raison: si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par quatre coups. Si l'on entreprend de faire "sonnez" (double six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups, et néanmoins 24 est à 36, qui est le nombre des faces de deux dés, comme 4 est à 6, qui est le nombre des faces d'un dé. Voilà quel était son grand scandale et qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'Arithmétique se dément."

Extrait de la lettre de B. Pascal à P. Fermat datée du 29 juillet 1654

d. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 en jetant un dé ?

e. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 (au moins) en jetant deux fois le dé ?

f. Même question en jetant le dé trois fois. Puis en le jetant n fois ...

g. Combien de fois faut-il jeter un dé pour que la probabilité d'obtenir un six (au moins) dépasse 99 % ?

h. On recommence, mais avec deux dés ! Quelle est la probabilité d'obtenir (au moins) un double six en jetant une fois les deux dés ?

i. Et deux fois ?

j. Et n fois ?

k. Expliquer alors pourquoi "si l'on entreprend de faire 6 avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre par quatre coups".

l. Combien de fois faut-il jeter deux dés pour que la probabilité d'obtenir un double six (au moins) dépasse 99 % ?

m. Expliquer enfin pourquoi "si l'on entreprend de faire "sonnez" (double six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en vingt-quatre coups".

6 [Activité] Jet de deux dés

On jette deux dés (non truqués, à six faces.

a. Pourquoi parle-t-on d'expérience aléatoire ?

b. Déterminer deux événements élémentaires E_1 et E_2 .

c. Combien d'événements élémentaires contient l'univers Ω de l'expérience?

d. Donner deux exemples de votre choix d'événements non élémentaires A et B incompatibles et déterminer p(A) , p(B) et $p(A \cup B)$

e. Donner deux exemples de votre choix d'événements non élémentaires C et D non disjoints et déterminer p(C) , p(D) et $\mathrm{p}(\mathrm{C} \cup \mathrm{D})$.

f. S'inspirer des deux points précédents pour énoncer une conjecture concernant la probabilité de l'union de deux événements aléatoires.

g. Déterminer un événement E tel que $\mathrm{p}(\mathrm{E})=\frac{35}{36}$

h. Déterminer $\mathrm{p}(\overline{\mathrm{C}})$, où C est le complémentaire de l'événement C choisi au point e).

i. S'inspirer du point précédent pour énoncer une conjecture concernant la relation entre probabilité d'un événement et de son complémentaire.

7 [Activité] Comment définir ce qu'est une probabilité ?

« Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité, opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction ?

La probabilité a-t-elle été définie ? Peut-elle même être définie ? Et, si elle ne peut l'être, comment ose-t-on en raisonner ? La définition, dira-t-on, est bien simple : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles. Un exemple simple va faire comprendre combien cette définition est incomplète. Je jette deux dés ; quelle est la probabilité pour que l'un des deux dés au moins amène un six ? Chaque dé peut amener six points différents : le nombre des cas possibles est 6x6=36 ; le nombre des cas favorables est 11 ; la probabilité est 11/36 .

C'est la solution correcte. Mais ne pourrais-je pas dire tout aussi bien : les points amenés par les deux dés peuvent former (6x7)/2=21 combinaisons différentes ? Parmi ces combinaisons, 6 sont favorables ; la probabilité est 6/21.

Pourquoi la première manière d'énumérer les cas possibles est-elle plus légitime que la seconde ? En tous cas, ce n'est pas notre définition qui nous l'apprend.

On est donc réduit à compléter cette définition en disant : "... au nombre total des cas possibles, pourvu que ces cas soient également probables". Nous voilà donc réduits à définir le probable par le probable.

Comment saurons-nous que deux cas possibles sont également probables ? Sera-ce par une convention ? Si nous plaçons au début de chaque problème une convention explicite, tout ira bien, nous n'aurons plus qu'à appliquer les règles de l'arithmétique et de l'algèbre et nous irons jusqu'au bout de calcul sans que notre résultat puisse laisser place au doute ; mais dès que nous en voudrons faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.

Dira-t-on que le bon sens suffit pour nous apprendre quelle convention il faut faire ? Hélas ! M. Bertrand s'est amusé à traiter un problème simple : "quelle est la probabilité pour que, dans une circonférence, une corde soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ?

”L’illustre géomètre a adopté successivement deux conventions que le bon sens semblait également imposer, et il a trouvé avec l’une, avec l’autre .

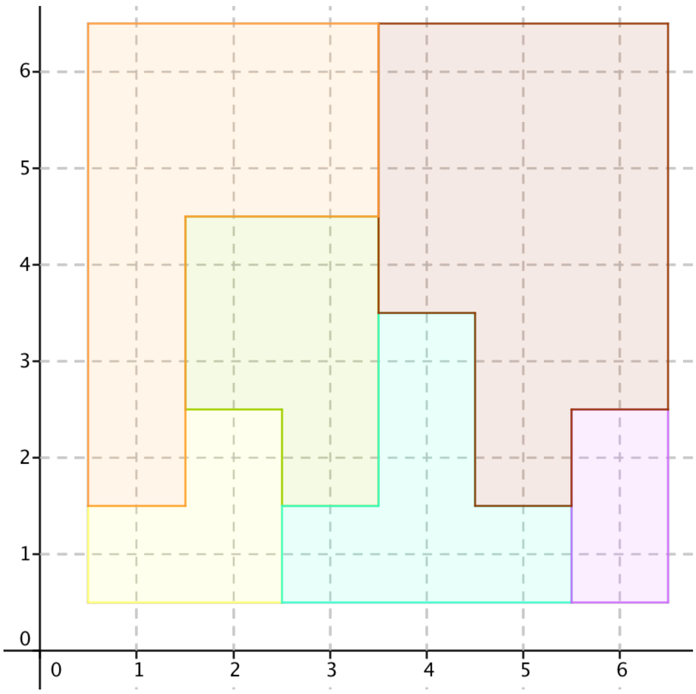
La conclusion qui semble résulter de tout cela, c’est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu’il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bon sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions.

Mais, cette conclusion, nous ne pouvons non plus y souscrire ; cet instinct obscur, nous ne pouvons nous en passer ; sans lui la science serait impossible, sans lui nous ne pourrions ni découvrir une loi, ni l’appliquer. Avons-nous le droit, par exemple, d’énoncer la loi de Newton ? Sans doute, de nombreuses observations sont en concordance avec elle ; mais n’est-ce pas là un simple effet du hasard ?
Comment savons-nous d’ailleurs si cette loi, vraie depuis tant de siècles, le sera encore l’an prochain ? À cette objection, vous ne trouverez rien à répondre, sinon : “Cela est bien peu probable.” »

Henri Poincaré, La Science et l’Hypothèse, Flammarion, Paris, 1918

8 [Activité] Paradoxal ?

Six régions ont été matérialisées sur le quadrillage ci-dessous, inscrites dans un carré de coordonnées (0.5;0.5), (6.5;0.5), (6.5;6.5) et (0.5;6.5) ; Les points représentent les points du quadrillage. Ils peuvent être repérés par une abscisse x et une ordonnée y toutes deux entières et comprises entre 1 et 6 :



Problème : on choisit une région “au hasard”. À votre avis, quelle est la région qui a le plus de chances d’être choisie ?

- Première réponse : on jette un dé (bien équilibré) et on choisit la région correspondant au nombre obtenu. Déterminer les probabilités d’obtenir chacune des six régions.
- Deuxième réponse : on jette un dé une première fois : le nombre obtenu est une abscisse x. On jette le dé une deuxième fois : le nombre obtenu est une abscisse y. On choisit la région contenant le point de coordonnées $(x;y)$. Déterminer les probabilités d’obtenir chacune des six régions.
- Troisième réponse : on fixe au milieu du carré l’axe d’une aiguille de longueur 3 unités, qui peut pivoter autour de cet axe. On fait tourner l’aiguille : la région choisie est celle où la pointe de l’aiguille s’immobilisera. Que peut-on dire de les probabilités respectives d’obtenir chacune des six régions ?

Commentaires : la modification des conditions de l'expérience modifie les probabilités des régions. On peut néanmoins considérer que l'ensemble Ω des résultats possibles reste le même : c'est l'ensemble des 6 régions dessinées. Les 36 coordonnées du deuxième tirage au hasard peuvent être considérées comme un résultat intermédiaire. Par contre, les probabilités associées aux 6 éléments de Ω ne sont pas les mêmes. Dans le troisième tirage, il y a même un élément de probabilité nulle !

Ce type de situation permet de mettre en évidence le fait que la probabilité dépend des conditions de l'expérience, des conditions du “tirage au hasard” et n'est pas attachée à l'élément en tant que tel : on peut munir un même ensemble Ω de plusieurs probabilités différentes !

Source : Enseigner les probabilités en classe de première. Claire Dupuis ... [et al.]
I.R.E.M. de Strasbourg, 1992.

Il s'agit donc pour les mathématiques - sur la base des notions suivantes: expérience aléatoire, issues, univers Ω,, événement aléatoire, impossible, certain, élémentaire, événements incompatibles (ou disjoints) - de proposer un modèle apte à modéliser cette notion de probabilité.

9 [Activité] Axiomatique pour un ensemble probabilisé fini

Soit un univers Ω. On dit qu'on définit **une probabilité** sur Ω si et seulement si on associe à chaque événement aléatoire A une probabilité P(A) de telle sorte que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

- Axiome 1 : $P(A) \geq 0$ pour tout événement A
- Axiome 2 : P(Ω) = 1
- Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles, alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Illustrer cette construction dans le cas où :

a. On lance une pièce de monnaie non truquée.

b. On lance une pièce de monnaie truquée.

c. On lance deux dés non truqués.

Souvent, les caractéristiques physiques d'une expérience suggèrent que tous les probabilités des événements élémentaires $p(A_i)$ soient toutes égales. Un tel ensemble probabilisé fini Ω est alors appelé **ensemble fini équiprobable**.

d. Donner des exemples ensembles finis équiprobables.

e. Donner des exemples ensembles finis non équiprobables.

Dans le cas d'un ensemble fini équiprobable Ω contenant n éléments (correspondant à une expérience aléatoire à n issues), et où A est un événement aléatoire ($A \subseteq \Omega$), on a $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, ou encore $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables (à la réalisation de A)}}{\text{nombre de cas possibles (dans } \Omega \text{)}}$, ce qui correspond à la notion intuitive de probabilité.

10 [Activité] Hasard ?

Qu'est-ce que le hasard ? L'expression “au hasard” s'emploie généralement pour qualifier des événements appartenant à un espace équiprobable ; la phrase "choisir un élément au hasard dans un ensemble *E*” signifie donc à priori que chaque élément de *E* a la même probabilité d'être choisi, mais en mathématique, il est possible de définir un ensemble probabilisé de différentes façons ...

11 [Activité] Théorèmes

A partir de nos trois axiomes, démontrer les théorèmes suivants :

a. Théorème 1 : $p(\emptyset)=0$

b. Théorème 2 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$

c. Théorème 3 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

d. Théorème 4 : Soit $A\subseteq\Omega$. Alors $p(\overline{A})=1-p(A)$

12 [Activité] Un exemple

Un dé à six faces est pipé de telle sorte que chaque chiffre sort avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

a. Quelles sont les probabilités d'obtenir chacun des six chiffres ?

b. Quelle est la probabilité d’obtenir un nombre pair ?

Voir la théorie 3 à 5 et les exercices 6 à 18

13 [Activité] Conditionnelle

Un grand collège est équipé d'un système d'alerte ultra-moderne. S'il y a incendie, l'alerte est donnée avec 99% de certitude; s'il n'y a aucun danger, l'alarme peut se déclencher avec probabilité 0,005. La probabilité d'incendie est 0,0001. L'alarme se déclenche. Quelle est la probabilité que ce soit une fausse alerte ?

14 [Activité] Indépendance

La table suivante donne la répartition de 150 élèves en formation en fonction de leur option spécifique principale d'enseignement et de leur intérêt marqué ou non pour les nouvelles technologies :

	OC Sport	OC Arts	OC Informatique
OS Langue	45	18	27
OS BC	33	9	18

On considère les événements suivants :

A : « avoir une OS BC »
C : « avoir une OC Sport »
E : « avoir une OC Informatique »
B : « avoir une OS Langue »
D : « avoir une OC Arts »

a. On choisit un élève au hasard. Déterminer p(A), p(B), p(C), p(D) et p(E) ?

b. Quels sens donner au concept d'indépendance de deux événements ?

c. Les événements A et C sont-ils indépendants ?

d. Les événements B et E sont-ils indépendants ?

Voir la théorie 6 à 7 et les exercices 19 à 26

1 [A savoir] Combinatoire

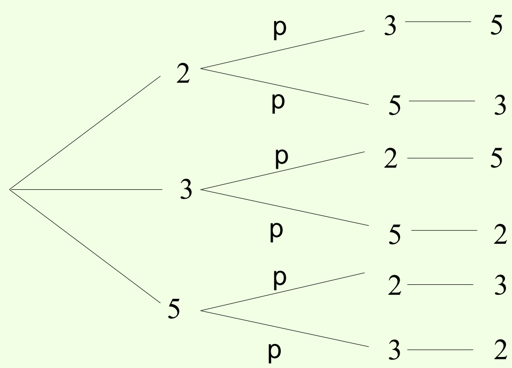
Arbres de classement, principe multiplicatif

On **essaye souvent de décomposer un problème de combinatoire en *k* étapes successives** indépendantes les unes des autres; on utilise alors le **principe multiplicatif** :

- ☐ si $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les nombres de choix possibles correspondants à chacune des k étapes, alors le nombre de choix total est égal $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$;
- ☐ on peut parfois recourir à un **arbre de classement** pour représenter la situation.

Exemple 1 : en supposant qu'il n'y a pas de répétition, combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 2,3 et 5 ?

On peut utiliser un arbre :



ou décomposer en étapes successives :

on commence par choisir un chiffre : 3 choix possibles,

puis on choisit un 2e chiffre différent du 1er : 2 choix possibles,

et enfin encore un 3e chiffre différent des 2 premiers : 1 choix possible.

Finalement, il y a $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilités.

On peut le représenter ainsi : $\underbrace{3}_{\text{1er ch.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2e ch.}} \cdot \underbrace{1}_{\text{3e ch.}} = 6$

Exemple 2 : combien de mots différents de 4 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former si la première lettre est une consonne et qu'on ne peut jamais utiliser deux fois la même lettre ?

On décompose en étapes successives :

on commence par choisir une consonne : 10 choix possibles,

puis on choisit une voyelle : 6 choix possibles,

encore une consonne, mais différente de la 1re : 9 choix possibles,

et enfin encore une voyelle différente de la 1re choisie : 5 choix possibles.

Finalement, il y a $10 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5 = 2700$ possibilités.

On peut le représenter ainsi : $\underbrace{10}_{\text{1re cons.}} \cdot \underbrace{6}_{\text{1re voy.}} \cdot \underbrace{9}_{\text{2e voy.}} \cdot \underbrace{5}_{\text{3e cons.}} = 2700$

Ici, l'arbre serait trop grand !

Factorielle

On appelle **factorielle** du nombre entier (positif) n le nombre produit des n entiers de 1 à n, et on écrit : $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (n-1)\cdot n$.

On étend la définition à 0 en posant $0!=1$

Exemple : calculer $8!$

$8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot 7\cdot 8=40320$

Remarque : on peut calculer directement $n!$ avec la calculatrice.

Permutations de *n* objets distincts

On appelle **permutations de *n* objets tous différents** les divers groupements que l'on peut former en prenant chaque fois tous les objets, deux groupements ne différant que par l'ordre des objets.

On note P_n .

Théorème [Permutations de *n* objets]

$P_n=n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!$

Exemple : de combien de façons peut-on mélanger un jeu de 36 cartes ?

Il s'agit de dénombrer les permutations de 36 objets tous distinguables : $P_{36}\simeq 3{,}7\cdot 10^{41}$

Permutations de *n* objets dont seuls *k* sont distinguables

Si l'on dispose de *n* objets se répartissant en *k* sous-ensembles à l'intérieur desquels les objets sont indistinguables, et si $n_1+n_2+...+n_j+...+n_k=n$, les n_j représentant le nombre d'objets du *j*-ème sous-ensemble, on parle de **permutations de *n* objets partiellement identiques** (deux permutations différant par l'ordre des objets).

On note $\overline{P}_{n;\, n_1, n_2, ..., n_k}$.

Théorème [Permutations de *n* objets dont seuls *k* sont distinguables]

Le nombre de permutations différentes de *n* objets partiellement identiques se répartissant en k sous-ensembles à l'intérieur desquels les objets sont indistinguables avec $n_1+n_2+...+n_j+...+n_k=n$ est égal à $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_j!\cdot ...\cdot n_k!}$.

Exemple : combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot saussure» ?

Dans le mot « saussure », il y a 3 «s» et 2 «u», les trois autres lettres «a», «e» et «r» n'apparaissent qu'une fois. Il s'agit donc d'une permutation $\overline{P}_{8;3,2,1,1,1}$. En général, on ne note pas les «1 », donc on a : $\overline{P}_{8;3,2}=\dfrac{8!}{3!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2}=2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=3360$

Arrangements sans répétition de *p* objets choisis parmi *n*

On appelle **arrangements (sans répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois *p* objets choisis parmi *n* (chaque objet ne pouvant figurer qu'une seule fois), deux groupements différant par l'ordre des objets ou par leur nature. On note A_p^n .

Théorème [Arrangements sans répétition de *p* objets choisis parmi *n*]

$$A_p^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(p-1)] = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque : on peut le plus souvent calculer directement A_p^n avec la calculatrice.

Exemple : Après les prolongations d'un match de football, l'entraîneur doit choisir les 5 tireurs de penaltys parmi les onze joueurs ainsi que l'ordre de passage. Combien de choix a-t-il ?

On choisit 5 joueurs parmi 11, sans répétition, l'ordre étant important : $A_5^{11} = 55440$

Arrangements avec répétition de *p* objets choisis parmi *n*

On appelle **arrangements (avec répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois *p* de ces *n* objets (chaque objet pouvant figurer plusieurs fois), deux groupements quelconques différant par l'ordre des objets ou par leur nature .

On note. $\overline{A_p^n}$

Théorème [Arrangements de *p* objets parmi *n* avec répétition]

$$\overline{A_p^n} = n^p$$

Exemple : combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ?

Il faut choisir 7 chiffres parmi les 10 chiffres existants, les répétitions sont possibles et l'ordre est important : $\overline{A_7^{10}} = 10^7 = 10000000$

Remarque : quand on parle d'arrangement sans autre indication, on fait référence à un arrangement sans répétition.

Combinaison sans répétition de *p* objets choisis parmi *n*

On appelle **combinaisons (sans répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements que l'on peut former en prenant chaque fois *p* de ces *n* objets, deux groupements différant par la nature mais pas par l'ordre des objets.

On note C_p^n ou $\binom{n}{p}$; ces nombres s'appellent aussi les **coefficients binomiaux**.

Théorème [Combinaisons de *n* objets sans répétition]

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{A_p^n}{P_p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Remarque : on peut le plus souvent calculer directement C_p^n avec la calculatrice.

Exemple : au jass, on reçoit 9 cartes d'un jeu de 36 cartes. Combien de combinaisons différentes existe-t-il ?

Il faut choisir 9 cartes parmi 36 toutes différentes ; les répétitions sont impossibles et l'ordre n'est pas important : $C_9^{36} = \frac{36!}{9!(36-9)!} = \frac{36!}{9!(27)!} = 94143280$

2 [Aller plus loin] Combinaisons avec répétition

Combinaison avec répétition de *p* objets choisis parmi *n*

On appelle **combinaisons (avec répétition) de *p* objets choisis parmi *n*** les groupements formés en prenant chaque fois *p* de ces *n* objets (chaque objet pouvant figurer plusieurs fois), deux groupements différant par la nature mais pas par l'ordre des objets.

On note. $\overline{C}_p^n$

Théorème [Combinaisons de *n* objets avec répétition] – sans démonstration

$$\overline{C}_p^n=\binom{n+p-1}{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple : combien y a-t-il de dominos si 10 symboles différents sont possibles ?

Les 10 symboles différents représentent les chiffres de 0 à 9 (le 0 est représenté par une absence de marquage sur le domino). Il faut choisir pour chaque domino deux symboles ; la répétition est possible et l'ordre n'est pas important :

$$\overline{C}_2^{10}=\frac{(10+2-1)!}{2!(10-1)!}=\frac{11!}{2!9!}=\frac{10\cdot 11}{2}=55$$

Voir les exercices 1 à 5

3 [A savoir] Introduction aux probabilités

Définitions

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont l'issue (le résultat) dépend du hasard. L'ensemble de toutes les **issues** possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience. On le note Ω.

Le nombre d'éléments de Ω est noté card(Ω), $|\Omega|$ ou #(Ω).

Un **événement aléatoire** est un sous-ensemble de Ω . Deux événements aléatoires particuliers sont : $\emptyset$ l'**événement impossible** et Ω lui-même, l'**événement certain**.

Un événement qui ne comprend qu'une seule issue est appelé **événement élémentaire**.

Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$ deux événements aléatoires tels que $A\cap B=\emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** (ou **disjoints**).

Le **complémentaire** d'un événement E, noté $\overline{E}$, est défini par $\overline{E}=\Omega\setminus E$

Exemple : on jette un dé (non truqué) à quatre faces. Décrire l'univers Ω et les événements aléatoires élémentaires. Illustrer les notions d'événements élémentaires ou non, disjoints ou non, ainsi que celle d'événement complémentaire.

L'univers est Ω ={«obtenir un 1», «obtenir un 2»,«obtenir un 3»,«obtenir un 4»}.

Les 4 événements élémentaires sont : A={«obtenir un 1»}, B={«obtenir un 2»}, C={«obtenir un 3»}, D={«obtenir un 4»} », qu'on peut également noter plus simplement A={«1»}, B={«2»}, C={«3»}, D={«4»} » ou même A={1}, B={2}, C={3}, D={4}.

L'événement impossible est {} [on n'obtient pas de résultat!] et l'événement certain est Ω ={1;2;3 ;4}.

L'événement E : « obtenir un nombre pair » est E ={2;4}

L'événement F : «: « obtenir un nombre inférieur ou égal à 1» est F ={1}.

L'événement G : «: « obtenir un nombre premier» est G ={2;3}.

F est un événement élémentaire, alors que E et G ne sont pas des événements élémentaires.

E et G ne sont pas des événements disjoints, car $E \cap G = \{2\} \neq \emptyset$

E et F sont des événements disjoints, car $E \cap F = \emptyset$

Le complémentaire $\overline{E}$ de E est {1;3}

Remarques :

□ Désormais, on sera explicite si on a affaire à une pièce, un dé, ... qui est truqué. Dans le cas contraire d'objets non truqués, on dira simplement : un dé, une pièce, ...

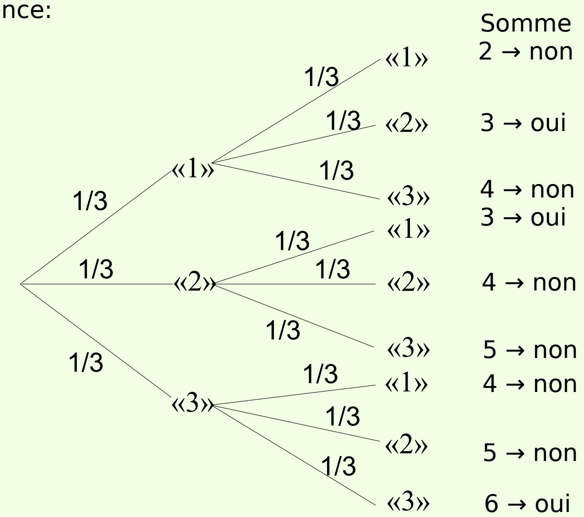
□ On utilise quand on le peut un arbre de classement pour représenter la situation. On indique le long de chaque branche la probabilité associée.

□ Dans un arbre de classement, le principe multiplicatif dit que la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités le long de ce chemin.

□ Dans un arbre de classement, puisque les événements élémentaires sont forcément disjoints, la probabilité de plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chaque chemin.

Exemple : on jette deux dés à trois faces. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme qui soit un multiple de 3

On construit l'arbre de l'expérience:



$$p=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

4 [Aller plus loin] Un peu d'histoire

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme Cardan (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait Cardan était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise Pascal par son ami le Chevalier de Méré, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ?

Gerolamo Carano
(1501-1576)

Pierre de Fermat
(1601-1665)

Blaise Pascal
(1623-1662)

Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre Pascal et Fermat, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans « Tractatus de ratiociniis in aleae ludo » (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan Huygens, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques. [1]

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques Bernoulli, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit « Ars Conjectandi », qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Jakob Bernoulli
(1654-1705)

Au 19ème siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au- delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

Pierre-Simon Laplace
(1749-1827)

C'est Laplace qui s'en charge dans son ouvrage « Théorie analytique des probabilités », paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham de Moivre (1667-1754), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Denis Poisson (1781-1840), Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894), Andrei Andreeivich Markov (1856-1922) et Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987).

Source : MADIMU
http://www.apprendre-en-ligne.net/MADIMU2/PROBA/PROBA2.PDF

1 Nous étudierons la réponse à cette question dans un futur chapitre qui complétera nos connaissances concernant les probabilités.

5 [A savoir] Construction mathématique

Axiomes

Soit un univers Ω. On dit qu'on définit **une probabilité** sur Ω si et seulement si on associe à chaque événement aléatoire A une probabilité $P(A)$ de telle sorte que les 3 axiomes suivants soient satisfaits :

Axiome 1 : $P(A)\geq 0$ pour tout événement A

Axiome 2 : $P(\Omega) = 1$

Axiome 3 : Si A et B sont incompatibles, alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

Remarques :

□ Souvent, les caractéristiques physiques d'une expérience suggèrent que les probabilités des événements élémentaires $p(A_i)$ soient toutes égales. On parle alors d'**événements élémentaires équiprobables** et un tel ensemble probabilisé fini Ω est alors appelé **ensemble fini équiprobable**.

□ Dans le cas d'un ensemble fini équiprobable Ω contenant n éléments (correspondant à une expérience aléatoire à n issues), et où A est un événement aléatoire ($A\subseteq\Omega$), on a $p(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$, ou encore $p(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables (à la réalisation de A)}}{\text{nombre de cas possibles (dans }\Omega\text{)}}$, ce qui correspond à la notion intuitive de probabilité.

□ Mais attention, on peut parfaitement, comme nous l'avons vu dans les activités, définir une probabilité qui vérifie les axiomes requis sans forcément être intuitive !

Théorèmes

Théorème 1 : $p(\varnothing)=0$

Théorème 2 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cup\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)$

Théorème 3 : Soient $A\subseteq\Omega$ et $B\subseteq\Omega$. Alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

Théorème 4 : Soit $A\subseteq\Omega$. Alors $p(\overline{A})=1-p(A)$

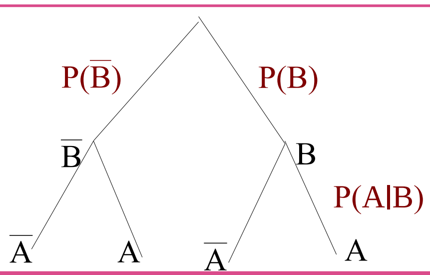
Voir les exercices 6 à 18

6 [A savoir] Probabilité conditionnelle

Définition

Soit B un événement de probabilité non nulle. La **probabilité [conditionnelle]** qu'un événement A se réalise sachant que B est réalisé, ce qu'on notera par $P(A|B)$, est donnée par :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$



Exemple : on lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?

Lorsqu'on lance deux dés, il y a 36 issues possibles. On pose : E : «la somme des dés est supérieure à 6» et F : «un des deux dés indique un 2».

On a : $E \cap F$: «la somme des dés est supérieure à 6 **et** un des deux dés indique un 2». En explorant les possibilités, on voit que $E \cap F = \{(2;5);(5;2);(2;6);(6;2)\}$, donc $P(E \cap F)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

Par ailleurs, $F = \{(2;1);(1;2);(2;2);(2;3);(3;2);(2;4);(4;2);(2;5);(5;2);(2;6);(6;2)\}$, donc $P(F)=11/36$ [Attention : les issues apparaissent par paires, sauf (2;2)!]

D'où $P(E|F)=\dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}}=\frac{4}{11}$

7 [A savoir] Indépendance de deux événements

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** $\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$ et $P(B|A)=P(B)$

Théorème

Deux événements A et B sont indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)$

Exemple : on tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A :«La carte tirée est un as» et B : «La carte tirée est un pique» sont-ils indépendants ?

On a : $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$, $P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$ et $P(A \cap B)=\frac{1}{52}$.

On teste : $P(A \cap B)\stackrel{?}{=}P(A)\cdot P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{52}\stackrel{?}{=}\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}$: oui, ils sont indépendants.

Voir les exercices 19 à 26

Combinatoire

1 Lettres

a. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot MISSISSIPI?

b. Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par S?

2 Autres lettres

a. Combien de mots peut-on écrire avec les lettres du mot TOULOUSE

b. Et si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième positions?

3 On choisit 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes

a. De combien de façons différentes peut-on procéder ?

b. De combien de façons différentes peut-on procéder de manière à ce que ces 5 cartes comprennent:

i les 4 as ?

ii 2 as et 2 rois exactement ?

iii aucun as ?

iv au moins un as ?

4 Loterie

a. De combien de façon peut-on remplir une feuille de loterie à numéro ? (marquer 6 numéros sur 45) ?

b. Combien permettent-elles de réaliser .

i 6 points ? ii 3 points ? iii 0 point ?

5 Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

a. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{0}=0$

b. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $C_0^n=1$

c. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $C_n^n=1$

d. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{p}=\binom{n}{n+p}$

e. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $C_p^n=C_{n-p}^n$

f. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p+1}+\binom{n}{p}$

g. Si $n, p \in \mathbb{N}$, alors $C_{p+1}^{n+1}=C_{p+1}^n+C_{p+1}^{n+1}$

Voir la théorie 1 à 2

Probabilités

6 Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On en tire deux au hasard.

a. Déterminer l'arbre de toutes les possibilités et les probabilités de chacune des issues.

b. On considère les événements suivants : A=«obtenir au moins une blanche» et B=«obtenir au moins une noire».

Calculer $P(A \cup B)$.

7 Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On en tire une au hasard, qu'on remet dans l'urne avant d'en tirer une deuxième. Calculer les probabilités de chacune des 4 issues possibles.

8 On a trois urnes. L'urne 1 contient une boule blanche, l'urne 2 contient 4 boules noires et l'urne 3 contient 4 boules blanches et une noire. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard. Calculer la probabilité que ce soit une boule blanche.

9 On estime à 90 milliards le nombre total d'humains nés sur cette terre depuis qu'il en existe, et à 6 milliards le nombre de ceux qui vivent encore aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'un homme rencontré au hasard dans la rue soit vivant?

10 On tire une boule au hasard dans une urne. Quelle est la probabilité que le chiffre 9 ne figure pas dans son numéro si les boules de l'urne sont numérotées:

a. de 0 à 9 ?

b. de 0 à 99 ?

c. de 0 à 999 ?

d. de 0 à 999999 ?

11 On lance 2 dés. Simon parie que le produit des chiffres obtenus sera 12, et Jean qu'il sera 20. Lequel a les meilleures chances de l'emporter ?

12 Dans un tiroir il y a 4 chaussettes bleues, 6 rouges et 2 blanches. Nicolas prend 2 chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles soient de la même couleur?

13 Les statistiques montrent qu'il y a environ 105 naissances de garçons pour 100 naissances de filles. (On supposera que le sexe des nouveaux-nés n'est dû qu'au hasard). Ceci nous amène à poser :

$$P(\text{“}\mathit{avoir\ une\ fille}\text{”})=P(F)=\frac{100}{205}$$

$$\text{et } P(\text{“}\mathit{avoir\ un\ garçon}\text{”})=P(G)=\frac{105}{205}$$

Sur une famille de 4 enfants, quelle est la probabilité qu'il y ait (sans tenir compte de l'ordre) :

a. 4 filles **b.** 3 F et 1 G **d.** 1 F et 3 G

c. 2 F et 2 G **e.** 4G

14 Noémie touche une cible une fois sur deux (en moyenne). Combien de fois doit-elle tirer pour être sûre à 99% d'atteindre au moins une fois la cible ?

15 Jean et Simon visent alternativement une bouteille jusqu'à ce qu'elle tombe pour la première fois. Jean commence. Les probabilités de réussite lors d'un jet de balle sont de 1/3 pour Jean et de 1/4 pour Simon. Ils ont 2 balles chacun

a. quelle est la probabilité que Jean fasse tomber la bouteille ?

b. quelle est la probabilité que Simon fasse tomber la bouteille ?

c. pourquoi la somme de ces deux probabilités n'est-elle par égale à 1 ?

16 Même question qu'à l'exercice précédent s'ils ont autant de balles que possible !

17 Dans une pièce, il y a 21 personnes. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 personnes aient la même date d'anniversaire ? Combien faudrait-il de personnes au minimum pour que cette probabilité soit plus grande que 0,5 ?

18 On laisse tomber une pièce de 5 cm de diamètre sur un sol carrelé. Les carreaux sont des carrés de 10cm de côté. On appelle P(n) la probabilité que la pièce s'immobilise à cheval sur n carreaux exactement. Calculer P(1), P(2), ...

Voir la théorie 3 à 5

Probabilité conditionnelle et indépendance

19 On a trois urnes. L'urne 1 contient trois boules blanches et sept noires, l'urne 2 contient quatre boules blanches et autant de boules noires et l'urne 3 contient quatre boules blanches et une noire. On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard. La boule est noire. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1.

20 Le tiers des coureurs du vélo club Saussure sont suisses-allemands. 2 Suisses-allemands sur 3 et 1 non Suisse-allemand sur 24 mangent du birchermuesli au petit déjeuner. Sachant que le meilleur grimpeur du club mange du birchermuesli au petit déjeuner, quelle est la probabilité pour qu'il soit suisse-allemand ?

21 Subtilité ! Dans cet exercice, on considère que les probabilités d'avoir un garçon ou une fille sont égales et qu'il n'y a pas de « mémoire » de descendance dans un famille..

22 Madame Gontrand a 2 enfants. L'un au moins est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit aussi un garçon ?

23 Monsieur Armand a 2 enfants. L'aîné est un garçon. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit aussi un garçon ?

24 On dispose de 3 cartes. L'une a deux faces rouges, une autre deux noires et la troisième a une face rouge et une face noire. On tire une carte au hasard et on la pose sur la table: la face visible est rouge. Quelle est la probabilité pour que l'autre face soit noire ?

25 La famille Robert a 2 enfants, la famille Foret en a 3. On considère les événements suivants:

A: la famille a des enfants des 2 sexes

B: la famille a au plus un garçon.

A et B sont-ils indépendants :

a. chez les Robert ? **b.** chez les Foret ?

26 On lance 2 dés et on considère les événements suivants :

A: on obtient 2 chiffres différents

B: on obtient une somme paire

A et B sont-ils indépendants ?

Voir la théorie 6 à 7

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

27 Un appareil produit en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B. Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète un des appareils produits.

a. Calculer la probabilité pour que cet appareil ne présente aucun défaut.

b. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut A seulement.

c. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut B seulement.

28 On tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes (4 couleurs avec 13 cartes chacune du 2 au 10 puis valet,dame, roi et as). Calculer la probabilité d'obtenir :

a. le roi de trèfle **b.** un roi

c. un trèfle

d. un roi ou un trèfle

e. ni roi ni trèfle.

29 On lance deux fois un dé non pipé à 8 faces. On désigne par x le numéro obtenu sur le premier dé, par y le numéro obtenu sur le deuxième dé. Calculer la probabilité des événements :

a. $x = 4$

b. $y < 5$

c. $x = y$

d. $x < y$

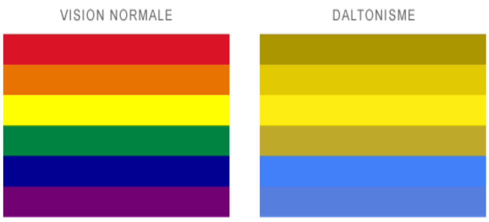
e. $x = 1$ et $y = 2$

f. $x = 1$ ou $y = 2$

g. il sort un 3 et un 5

h. $x + y = 8$

30 Une personne sur 1500 est daltonienne. Combien doit-on prendre de personnes pour être sûr à 95 % d'avoir au moins un daltonien ?



31 Un appareil produit en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B. Dans un lot de 1000 appareils prélevés, on a constaté que 100 appareils présentaient le défaut A (et peut-être aussi le défaut B), 80 appareils présentaient le défaut B (et peut-être aussi le défaut A) et 40 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète un des appareils produits.

a. Calculer la probabilité pour que cet appareil ne présente aucun défaut.

b. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut A seulement.

c. Calculer la probabilité pour que cet appareil présente le défaut B seulement.

32 Une étude statistique portant sur l'absentéisme chez les élèves d'un collège a conduit aux résultats suivants :

- 25 % ont été absents au moins un jour (donc soit 1 jour, soit plus);
- 12 % ont été absents au moins deux jours (donc soit 2 jours, soit plus)
- 8 % ont été absents au moins trois jours (donc soit 3 jours, soit plus);
- 6 % ont été absents au moins quatre jours (donc soit 4 jours, soit plus);
- 5 % ont été absents au moins cinq jours (donc soit 5 jours, soit plus).

On choisit au hasard un élève de ce collège. Quelle est la probabilité qu'il ait été absent :

a. au moins un jour ?

b. jamais ?

c. exactement deux jours ?

d. moins de trois jours ?

e. deux ou trois jours ?

33

a. On jette en l'air une pièce de monnaie bien équilibrée. Cinq fois de suite, on obtient « pile ». Quelle est la probabilité d'obtenir encore pile au 6e jet ?

b. On lance une pièce 4 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

c. On lance une pièce 7 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir plus de faces que de piles ?

d. Quel est l'événement le plus probable : A = « obtenir exactement un "pile" au cours de deux lancers » ou B = « obtenir exactement deux "piles" au cours de quatre lancers » ?

34 Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5. Quelle probabilité y a-t-il :

a. que la première salle soit libre ?

b. que les deux salles soient libres ?

c. que l'une des deux salles au moins soit libre ?

d. qu'une seule salle soit libre ?

e. que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?

f. Les événements A : «la 1re salle est occupée» et B : «la seconde salle est occupée» sont-ils indépendants ?

« Je n'ai pas besoin de croire. Pas envie d'être sûr. La probabilité me suffit. »

Didier Van Cauwelaert, «Le Père adopté»
écrivain français (1960-...)

A savoir en fin de chapitre

Combinatoire

- ✔ décomposition en étapes successives ; arbre de classement ; principe multiplicatif ;
- ✔ factorielle ;
- ✔ permutations et arrangements avec et sans répétitions ;
- ✔ combinaisons sans répétitions ;
- ✔ * combinaisons avec répétitions ;

Voir la théorie 1 à 2 et les exercices 1 à 5

Introduction aux probabilités

- ✔ notions d'expérience aléatoire, d'événement aléatoire élémentaire ou non, d'univers, d'événements disjoints (incompatibles) ;
- ✔ arbres, règles du produit et de la somme ;
- ✔ ensemble probabilisé fini, fini équiprobable : axiomes, théorèmes, exemples ;

Voir la théorie 3 à 12 et les exercices 6 à 18

Probabilité conditionnelle et indépendance

- ✔ probabilité conditionnelle : définition, exemples ;
- ✔ Indépendance de 2 événements aléatoires : définition, exemples, théorème

Voir la théorie 13 à 14 et les exercices 19 à 26

Quelques exercices types en vidéo

en particulier des vidéos explicatives ...

http://sesamath.ch/manuel-matugym-3e/complements/ch04