Quelques exercices récapitulatifs sur les chapitres 4 à 9

1 On considère les fonctions g et h définies par $g(x)=\frac{2x-5}{x-3}$ et $h(x)=3+\frac{1}{x-2}$.

a. Déterminer toutes les asymptotes de h.

b. Résoudre l'inéquation $h(x)\geq 6$.

c. Représenter graphiquement h et interpréter graphiquement le résultat trouvé en b.

d. Déterminer les plus grands ensembles A et B pour que h soit bijective de A dans B.

e. Déterminer les fonctions composées $h\circ g$ et $g\circ h$ en simplifiant au maximum les réponses.

f. Déterminer la fonction h^{-1} réciproque de h et la représenter graphiquement dans le même repère que h.

2 Pour une raison inconnue, Léo et Kate doivent absolument s'envoyer des messages chiffrés. Pour plus de sécurité, ils codent donc leurs messages. x désigne un nombre envoyé ou reçu par Léo et y désigne un nombre envoyé ou reçu par Kate. Ces deux nombres sont reliés par la relation $3x-2y=4$.

a. Quel est le nombre reçu par Kate si Léo envoie (-8) ?

b. Donner une fonction f qui corresponde à la transformation du nombre x envoyé par Léo en celui reçu par Kate.

c. Donner une fonction g qui corresponde à la transformation du nombre y envoyé par Kate en celui reçu par Léo.

d. Déterminer l'expression algébrique de la fonction $f\circ g$. Si vous n'avez pas trouvé les réponses en b. et c., utilisez les fonctions f et g définies par $f(x)=\frac{2}{3}x+5$ et $g(x)=\frac{3x-15}{2}$.

e. Quelle est la réciproque de g ? Justifiez votre réponse.

3 On considère les fonctions : $f(x)=\frac{4}{3x+1}$ et $g(x)=\frac{-x+4}{3x}$.

a. Calculer $(f\circ g)(x)$ et exprimer le résultat sous la forme la plus simple possible.

b. Exprimer la fonction f comme composition des fonctions suivantes :

$$a(x)=\frac{4}{3x}\ ,\ b(x)=\frac{1}{x}\ ,\ c(x)=3x\ ,\ d(x)=4(3x+1)\ ,\ h(x)=x+1\ ,\ k(x)=4x$$

4 On considère l'inéquation : $\dfrac{-2x^2+4}{x^2-2x-3} \geq -4$.

a. Montrer que cette inéquation est équivalente à $\dfrac{x^2-4x-4}{x^2-2x-3} \geq 0$.

b. Résoudre cette inéquation.

On considère maintenant les fonctions $f(x)=\dfrac{-2x^2+4}{x^2-2x-3}$ et $g(x)=-4$.

c. Déterminer le domaine de définition Df et les intersections de f avec les axes.

d. Ecrire l'équation de chacune des asymptotes de f .

e. Esquisser les représentations graphiques de f et g sur un même repère.

f. La solution de l'inéquation de a. semble-t-elle cohérente avec les représentations graphiques du point d. ? Justifier.

5 Donner la valeur exacte de $8^{-\frac{1}{6}}$ sans exposant négatif et avec un dénominateur rationnel.

6 Déterminer la valeur exacte des nombres réels a, b, c et d.

a. $\log_2(a)=16$

b. $\log_{16}(2)=b$

c. $\log_c(16)=2$

d. $\log_d(16)=\dfrac{1}{2}$

7 Résoudre en indiquant toutes les étapes les équations suivantes. Donner une réponse exacte et, si nécessaire, une approximation au centième :

a. $5^{x+2}\cdot 25^{-x}=625$

b. $5^x=100$

c. $\log(x+3)+\log(x+4)=\log(5-x)$

d. $\log(3-x)+\log(x-3)=x^3-x^2$

e. $4^{x+2}=7$

f. $\log(1-x)+\log(x+6)=\log(2)+\log(-x^2-3x+9)$

8 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Pour être évaluées, vos réponses doivent être clairement et brièvement justifiées.

a. Si $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a>0$ et $x<y$, alors $a^x \leq a^y$.

b. $\log((2+\sqrt{3})^{2016})+\log((2-\sqrt{3})^{2016})=0$

9 Une quantité initiale Q0 diminue exponentiellement de telle sorte qu'elle est divisée par 2 tous les 12 ans.

a. Déterminer le pourcentage de diminution de Q_0 après 24 ans, puis 48 ans, puis 120 ans.

b. Déterminer de quel pourcentage cette quantité diminue chaque année ?

c. Après combien de temps a-t-elle été divisée par 10 ?

10 On place 20 000 insectes dans un espace clos ne contenant aucune substance nutritive. On observe que le nombre d'insectes diminue au taux de 3% par jour.

a. Combien d'insectes restera-t-il après 11 jours ?

b. Au bout de combien de jours ne restera-t-il que 1'000 insectes ?

On place ensuite 10 000 insectes d'une autre espèce et on constate qu'après 10 jours il n'en reste que 4000.

c. Calculer le taux de décroissance (en %) de cette population.

d. Donner le résultat théorique exact et une approximation à deux chiffres après la virgule.

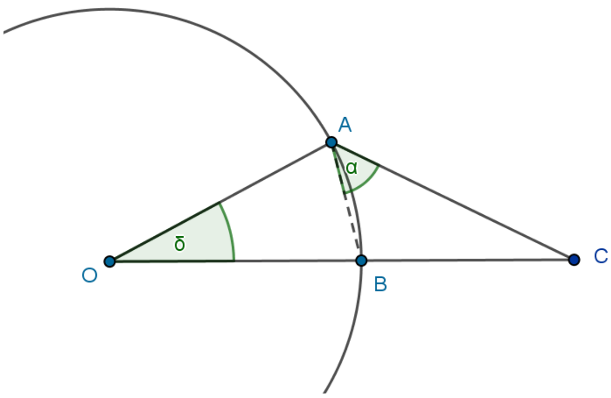
11 La forêt de Saussland s'étend exponentiellement. Elle occupe aujourd'hui $72\,342\text{ m}^2$. Il y a 40 ans, elle occupait $24\,114\text{ m}^2$.

a. Déterminer le taux de croissance annuel de la forêt sur les 40 dernières années. Répondre en valeur exacte puis en pourcent arrondi au centième.

b. Quelle surface occupera-t-elle dans 40 ans si elle continue à croître au même taux ? Si vous n'avez pas trouvé la réponse en a), utilisez T = 3,21%. Réponse arrondie au mètre carré.

c. Dans combien de temps sa surface aura-t-elle doublé par rapport à aujourd'hui ? Répondre en valeur exacte puis arrondie à l'année près.

12 $[OA]$ et $[OB]$ sont des rayons du cercle, $\Delta\, OAC$ est un triangle quelconque et les points O, B et C sont alignés.



De plus, $\overline{OA}=6\ cm$, $\delta=28\,°$ et $\alpha=40\,°$.

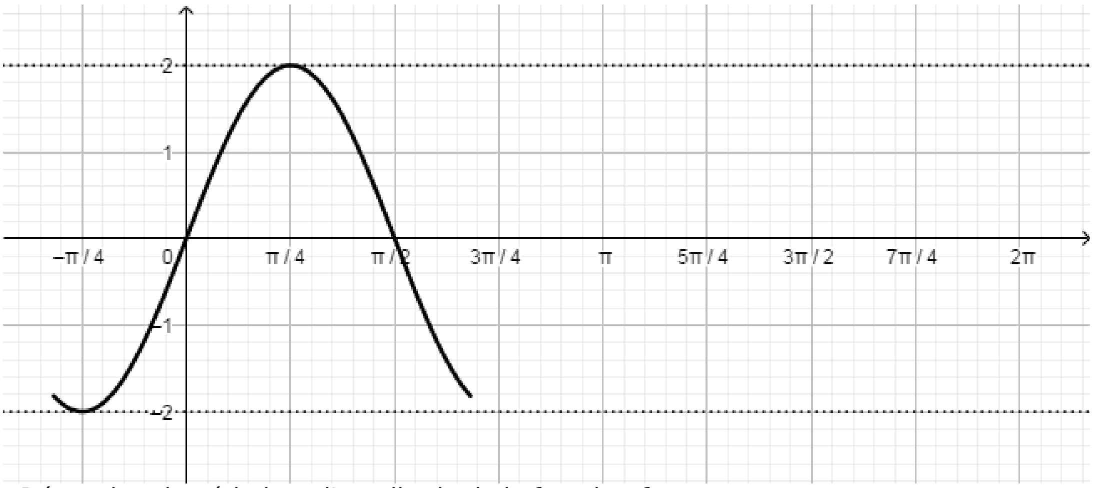
a. Calculer la longueur du segment $[AB]$. Réponse arrondie au centième.

b. Calculer la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$.

c. Calculer la longueur du segment $[BC]$. Réponse arrondie au centième.

13 Résoudre dans ℝ l'équation $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$ puis identifier et représenter les solutions comprises dans $[0;2\pi[$ sur un cercle trigonométrique.

14 Le graphique ci-dessous représente la fonction f définie par $f(x)=2\sin(2x)$:



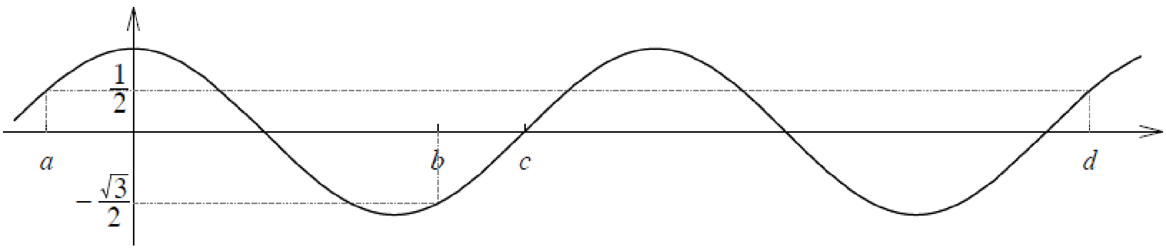
a. Déterminer la période et l'amplitude de la fonction *f*.

b. Compléter la représentation graphique de cette fonction sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

c. Résoudre dans ℝ l'équation $f(x)=1$.

d. Donner les solutions de l'équation précédente qui appartiennent à l'intervalle $[0;2\pi]$ et les représenter dans le graphique ci-dessus.

15 Voici une partie d'une représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=cos(x)$.



Déterminer en expliquant les valeurs exactes de a, b, c et d.

16 On considère la fonction f définie par $f(x)=4\sin(2x)$.

a. Déterminer l'amplitude et la période de f

b. La représenter graphiquement pour $x\in[-\pi;\frac{5\pi}{2}]$.

c. Résoudre algébriquement dans ℝ l'équation $4\sin(2x)=2$.