Exercice 1

a) $\left(\frac{1}{a}\right)^3$ est le cube de l'inverse de a.

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est le quotient de deux racines

c) $a^2 - b^2$ est la différence de deux carrés

d) $a \cdot b + c \cdot d$ est la somme de deux produits.

Exercice 2

Soit n en entier :

a) $17n\,;17(n+1)\,;17(n+2)$

b) $(2n+3)^2$

c) $(2n-5)^2-(n+3)^2$

d) $4\cdot(100\cdot 1+2n)$

e) $(2n)^2$

Exercice 3

a) Le dernier chiffre est 5 ou 0, car le chiffre est un multiple de 5. Comme la somme des trois chiffres donne 21, le dernier chiffre est 5. La somme des deux premiers chiffres donne 21-5=16. On a donc les possibilités suivantes : 975 ; 885 ; 795

b) Dans la division euclidienne par 5, le reste peut être 0, 1, 2, 3 ou 4. Comme le reste et le quotient sont égaux, on obtient les nombres suivants :

$r=0,\ q=0 \Rightarrow 5q+r=0$

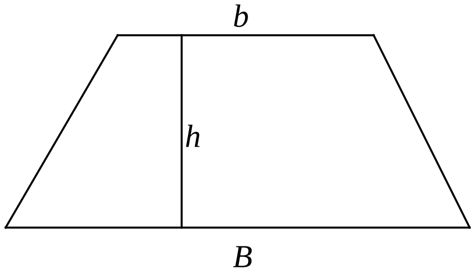
$r=1,\ q=1 \Rightarrow 5q+r=6$

$r=2,\ q=2 \Rightarrow 5q+r=12$

$r=3,\ q=3 \Rightarrow 5q+r=18$

$r=4,\ q=4 \Rightarrow 5q+r=24$

Exercice 4



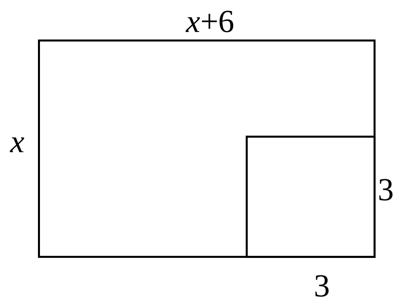
On a $2b=B$ et $b=h$.

Donc $A=\frac{b+B}{2}h=\frac{b+2b}{2}b=\frac{3b^2}{2}$

Exercice 5

$A=L\cdot l \Leftrightarrow L=\frac{A}{l}$ Ici, on a donc : $L=\frac{4a^2+8a}{2a}=\frac{\cancel{2a}(2a+4)}{\cancel{2a}}=2a+4$

Exercice 6



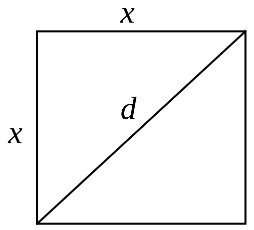
$A(x) = x(x+6) - 9 = x^2 + 6x - 9$

Exercice 8

a) La somme de 8 et de la somme de 2 et x.
b) La différence entre 8 et la somme de 2 et x.
c) La différence entre 8 et la différence entre 2 et x.
d) Le produit entre 8 et la somme de 2 et x.
e) Le produit entre 8 et la différence entre 2 et x.
f) Le produit entre 8 et le double de x
g) La différence entre 8 et le double de x.
h) La différence entre le produit de 8 avec x et le double de x.
i) Le produit entre 8 et l'opposé du double de x.
j) Le produit entre le produit de 8 et x et l'opposé du double de x.

Exercice 9

a) $V(x) = x^3$
b) $A(x) = 6x^2$
c) $L(x) = 12x$
d) On considère le triangle rectangle ci-dessous et par le théorème de Pythagore, on a :



$x^2 + x^2 = d^2 \Leftrightarrow$
$2x^2 = d^2 \Leftrightarrow$
$d = \sqrt{2}x$

Exercice 10

a) 1ère figure : $A = 8(2+a)$ sous forme de produit et $A = 8a + 16$ sous forme de somme.
2ème figure : $A = (a+4)(b+1)$ sous la forme de produit et $A = ab + a + 4b + 4$ sous forme de somme.
b) 1ère figure : $a \geq 0$ et 2ème figure : $a \geq 0; b \geq 0$
c) Oui (les figures sont des schémas).

Exercice 11 :

a) A : $4 \Rightarrow (4 \cdot 2 - 8)(4+3) = 0$
$-1 \Rightarrow (-1 \cdot 2 - 8)(-1+3) = -20$
$0 \Rightarrow (0 \cdot 2 - 8)(0+3) = -24$

B : $4 \Rightarrow (4^2 - (4+12)) \cdot 2 = 0$
$-1 \Rightarrow ((-1)^2 - (-1+12)) \cdot 2 = -20$
$0 \Rightarrow (0^2 - (0+12)) \cdot 2 = -24$

b) Conjecture : Si n est un nombre quelconque, alors les deux programmes donnent toujours le même résultat.

c) $A : n \mapsto (2n-8)(n+3) = 2n^2 + 6n - 8n - 24 = 2n^2 - 2n - 24$
$B : n \mapsto (n^2 - (n+12)) \cdot 2 = 2(n^2 - n - 12) = 2n^2 - 2n - 24$

Exercice 12

a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+3$ est pair.
Fausse
Contre -exemple : $n = 2 \Rightarrow n+3 = 5$ n'est pas pair.

b) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $5n+2$ est un multiple de 3.
Fausse
Contre -exemple : $n = 0 \Rightarrow 5n+2 = 2$ n'est pas multiple de 3.

c) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $3n+3$ se termine par 3.
Fausse
Contre-exemple : $n = 1 \Rightarrow 3n+3 = 6$ ne se termine pas par 3.

d) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $3n+3$ est un multiple de 3.
Vraie
Démonstration :

- $3n+3 = 3(n+1)$ *[mise en évidence]*
- or $n+1$ est un entier *[car n est un entier par hypothèse]*
- donc $3(n+1)$ est un multiple de 3 *[définition de "multiple de 3"]*

e) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+4$ est pair.
Fausse
Contre -exemple : $n = 1 \Rightarrow n+4 = 5$ n'est pas pair.

f) Si $n > 4$, alors $n^2 - 4$ n'est pas un nombre premier.
Vraie
Démonstration :

- $n^2 - 4 = (n+2)(n-2)$ *[factorisation IR3]*
- $n^2 - 4$ s'écrit donc comme un produit et n'est donc pas premier

Exercice 13

a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + (n+1) + (n+2)$ est un multiple de 3.
Vraie
Démonstration :

- $n + (n+1) + (n+2) = 3n+3$ *[réduction]*
$= 3(n+1)$ *[mise en évidence]*
- or $n+1$ est un entier *[car n est un entier par hypothèse]*
- donc $3(n+1)$ est un multiple de 3 *[définition de "multiple de 3"]*

b) Si $n\in\mathbb{N}$, alors $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$ est un multiple de 5.
Vraie
Démonstration :

- $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)=5n+10$ *[réduction]*
  $= 5(n+2)$ *[mise en évidence]*
- or $n+2$ est un entier *[car n est un entier par hypothèse]*
- donc $5(n+2)$ est un multiple de 5 *[définition de "multiple de 5"]*

c) Si *n* est pair et *p* premier impair, alors $n+p$ est premier.
Fausse
Contre -exemple : $n=2; p=7 \Rightarrow n+p=9$. En effet, $n=2$ est pair et $p=7$ premier impair, mais $n+p=9$ n'est pas premier.
d) Si *n* est un multiple de 9 et de 12, alors *n* est un multiple de 108.
Fausse
Contre -exemple
$n=36$ est un multiple de 9 et 12 mais pas de 108.
e) Si $n\in\mathbb{N}$, alors $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ est divisible par 12
Vraie
Démonstration :

- $(3n+1)^2-(3n-1)^2=9n^2+6n+1-(9n^2-6n+1)$ *[développement]*
  $=12n$ *[réduction]*
- or n est un entier *[par hypothèse]*
- donc $12n$ est un multiple de 12 *[définition de "multiple de 12"]*
- donc $(3n+1)^2-(3n-1)^2$ est divisible par *12 [définition de "divisible par …"]*

Exercice 14

a) Vraie
Démonstration :

$$(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1)$$
$$=x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1$$
$$-(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x^1+1)\left[\textit{distributivité}\right]$$
$$=x^{11}+\cancel{x^{10}}+\cancel{x^9}+\cancel{x^8}+\cancel{x^7}+\cancel{x^6}+\cancel{x^5}+\cancel{x^4}+\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+\cancel{x^1}$$
$$-\cancel{x^{10}}-\cancel{x^9}-\cancel{x^8}-\cancel{x^7}-\cancel{x^6}-\cancel{x^5}-\cancel{x^4}-\cancel{x^3}-\cancel{x^2}-\cancel{x^1}-1\left[\textit{réduction}\right]$$
$$=x^{11}-1\left[\textit{réduction}\right]$$

b) On pose $x=101$ et on utilise le point a) :
$$101^{11}-1=(101-1)(101^{10}+101^9+\ldots+101+1)=100\cdot\underbrace{(101^{10}+101^9+\ldots+101+1)}_{=\text{un entier}}$$

Donc $101^{11}-1$ est divisible par 100.

Exercice 15

La conjecture est vraie

Démonstration :

- $(2n+2)^2-(2n)^2=4n^2+8n+4-4n^2=8n+4$ *[réduction]*

  $=4\cdot(2n+1)$ *[mise en évidence]*
- or $2n+1$ est un entier *[car n est un entier par hypothèse]*
- donc $4\cdot(2n+1)$ est un multiple de 12 *[définition de "multiple de 12"]*

Exercice 16

On a :

$$n=-3\Rightarrow n^3-n=-24$$
$$n=-2\Rightarrow n^3-n=-6$$
$$n=-1\Rightarrow n^3-n=0$$
$$n=0\Rightarrow n^3-n=0$$
$$n=1\Rightarrow n^3-n=0$$
$$n=2\Rightarrow n^3-n=24$$
$$n=3\Rightarrow n^3-n=60$$

Il s'agit de multiples de 3.

On pose donc la conjecture suivante : Si $n\in\mathbb{Z}$ alors n^3-n est un multiple de 3.

Démonstration :

- $n^3-n=n(n^2-1)=n(n+1)(n-1)$ *[mise en évidence et id. n°3]*

  $=(n-1)n(n+1)$ *[réécriture]*
- Comme *n* est un entier par hypothèse, $(n-1)$, *n* et $(n+1)$ sont trois entiers consécutifs par définition de « consécutif ». Un de ces trois nombres est donc divisible par 3*.
- Le produit $(n-1)n(n+1)$ est donc aussi divisible par 3.

* Il est possible de démontrer cette affirmation par récurrence.

Exercice 17

Démonstration :

- $(n-1)(n+1)+1=n^2+n-n-1+1=n^2$ *[réduction]*

Exercice 18

a) On obtient les résultats suivants : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; …

Conjecture : Si *n* est un entier, alors $(n+1)^2-n^2$ est impair.

Démonstration :

- $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$ *[réduction]*
- or n est un entier *[par hypothèse]*
- donc $2n+1$ est impair *[par définition de "impair"]*

b) On obtient les résultats suivants : 8 ; 24 ; 48 ; 80 ; …
Conjecture : Si n est un entier impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.
Démonstration :
Partie 1 :

- n est un entier impair *[par hypothèse]*
- il est donc de la forme : $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$ *[par définition de "impair"]*
- donc $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1$ *[substitution]*
  $= 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k$ *[réduction]*
  $= 4 \cdot k(k+1)$ *[mise en évidence]*
  $= 4 \cdot (k(k+1))$ *[réécriture]*
- or $k(k+1)$ est un entier *[car $k \in \mathbb{Z}$ - voir plus haut]*
- d'où $n^2 - 1$ est un multiple de 4 *[définition de "multiple de 4"]*

Partie 2 :

- or k et $k+1$ sont deux entiers *[car $k \in \mathbb{Z}$ - voir plus haut]*
- donc k et $k+1$ sont deux nombres consécutifs *[définition de "entiers consécutifs"]*
- donc l'un des deux est pair *[car les nombres pairs sont alternés avec les impairs]*
- donc $k(k+1)$ est pair *[car un produit qui contient au moins un nombre pair est pair]*

Partie 3 : en mettant ensemble les parties 1 et 2, on obtient

- $4 \cdot (k(k+1))$ est un multiple de 8 *[car $k(k+1)$ est pair]*

c) On obtient les résultats suivants : 49 ; 169 ; 441 ; …
Conjecture : Si n est un entier, alors $n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = (n(n+1)+1)^2$
Démonstration :

- $n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2$
  $= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2(n+1)^2$ $\left[\textit{réduction}\right]$
  $= 2n^2 + 2n + 1 + n^4 + 2n^3 + n^2$ $\left[\textit{réduction}\right]$
  $= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ $\left[\textit{réduction}\right]$
- $(n(n+1)+1)^2$
  $= n^2(n+1)^2 + 2n(n+1) + 1$ $\left[\textit{réduction}\right]$
  $= n^4 + 2n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 1$ $\left[\textit{réduction}\right]$
  $= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$ $\left[\textit{réduction}\right]$
- les deux expressions sont bien égales

Exercice 19

a) et b)

Si $\underbrace{\text{on a un corbeau}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{il possède la propriété « noir »}}_{\text{conclusion}}$

Si $\underbrace{\text{il pleut}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{mon jardin est mouillé}}_{\text{conclusion}}$

Si $\underbrace{\text{on est Suisse}}_{\text{hypothèse}}$, alors $\underbrace{\text{on possède la propriété «aime le chocolat»}}_{\text{conclusion}}$

c)

Si on observe la propriété « noir », alors il s'agit d'un corbeau.

Si mon jardin est mouillé, alors il pleut.

Si on possède la propriété « aime le chocolat », alors on est Suisse.

d)

Si on n'observe la propriété « noir », alors il ne s'agit pas d'un corbeau.

Si mon jardin n'est mouillé, alors il ne pleut pas.

Si on ne possède pas la propriété « aime le chocolat », alors on n'est pas Suisse.

e)

Si les implications sont vraies alors les contraposées sont aussi vraies.
Si les implications sont vraies alors les réciproques peuvent être vraies ou fausses.

Exercice 20

a) contraposée
b) réciproque

Exercice 21

a) Réciproque : $x^3 < y^3 \Rightarrow x < y$ Contraposée : $x^3 \geq y^3 \Rightarrow x \geq y$
b) Réciproque : $x < 1 \Rightarrow x^2 < x$ Contraposée : $x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq x$
c) Réciproque : $x < 0 \Rightarrow x^2 < 0$ Contraposée : $x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 0$

Exercice 22

On teste la conjecture avec différentes valeurs de n :

$n = 0 \Rightarrow 0^2 + 0 + 131 = 131$ et 131 est un nombre premier.

$n = 1 \Rightarrow 1^2 + 1 + 131 = 133$ et 133 n'est pas un nombre premier car $133 = 7 \cdot 19$

La conjecture est donc fausse car $n = 1$ est un contre-exemple.

Remarque : $n = 131$ est aussi un contre-exemple car

$n = 131 \Rightarrow 131^2 + 131 + 131 = 131(131 + 1 + 1) = 131 \cdot 133$

Exercice 23

a) Par définition de *"impair"* et de *"entiers consécutifs"*, il s’agit de résoudre $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=66$ avec $k\in\mathbb{N}$.

On a $(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)=66 \Leftrightarrow 6k+9=66 \Leftrightarrow 6k=57 \Leftrightarrow k=\frac{57}{6}\notin\mathbb{N}$

Il est donc impossible de trouver trois nombres impairs consécutifs dont la somme est égale 66.

b) On procède de la même manière et on a
$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+(2k+9)=405$ *[déf. "impair", "consécutifs"]*
$\Leftrightarrow 10k+25=405$ *[réduction]*
$\Leftrightarrow 10k=380 \Leftrightarrow k=38\in\mathbb{N}$ *[réduction]*
Donc k est donc un entier et on a bien
$(2\cdot 38+1)+(2\cdot 38+3)+(2\cdot 38+5)+(2\cdot 38+7)+(2\cdot 38+9)=77+79+81+83+85=405$

Exercice 24

a) Si n est un multiple de 10, alors n est un multiple de 30.
b) Fausse
Contre -exemple : $n=20$ est bien un multiple de 10 car $20=10\cdot k \Leftrightarrow k=2\in\mathbb{N}$ mais 20 n’est pas un multiple de 30 car $20=30\cdot k \Leftrightarrow \frac{2}{3}=k\notin\mathbb{N}$
c) Si n est un multiple de 30, alors n est un multiple de 10.
d) Vraie
Démonstration :

- n est un multiple de 30 *[par hypothèse]*
- il est donc de la forme : $n=30k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ *[par définition de "multiple"]*
- donc $n=30k=10\cdot(3k)$ *[réécriture]*
- on pose $m=3k$ et on a $m\in\mathbb{N}$ *[car k est un entier par hypothèse]*
- donc $n=10\cdot(3k)=10m$ est un multiple de 10 *[définition de "multiple"]*

e) Si n n’est pas un multiple de 30, alors n n’est pas un multiple de 10.
f) La contraposée de la conjecture est fausse car la conjecture est fausse (une conjecture et sa contraposée sont liées).

Exercice 25

a) Il s'agit de la proposition iii) : Si n et m sont consécutifs, alors $m^2 - n^2$ est impair.
b) Démonstration :

- $n \in \mathbb{N}$ et $m = n + 1$ *[par hypothèse et par définition de "consécutifs"]*
- $m^2 - n^2$
- $= (n+1)^2 - n^2$ *[par substitution]*
- $= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ *[id. rem n°1 et réduction]*
- or n est un entier *[par hypothèse]*
- donc $2n + 1$ est impair *[par définition de "impair"]*

Exercice 26

a) Fausse
Contre-exemple : $p = 2$ est bien un nombre premier mais $3p = 3 \cdot 2 = 6$ n'est pas impair.
b) Si $3p$ est impair, alors p est un nombre premier.
c) Fausse
Contre-exemple : $3p = 27$ est bien impair mais $3p = 27 \Leftrightarrow p = 9$ et 9 n'est pas premier.

Exercice 27

a) Prenons, par exemple, $n = 16$ qui est un multiple de 8 car $16 = 2 \cdot 8$ et $m = 15$ qui termine bien par 5 car $15 = 1 \cdot 10 + 5$.
On a $16 \cdot 15 = 240$ et 240 est bien un multiple de 10 car $240 = 24 \cdot 10$
b) Démonstration :

- n est un multiple de 8 *[par hypothèse]* il est donc de la forme : $n = 8k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{N}$ *[par définition de "multiple"]*
- m est un entier terminant par 5 *[par hypothèse]* il est donc de la forme : $m = 10k_2 + 5$ avec $k_2 \in \mathbb{N}$ *[par définition de "terminant par"]*
- donc $P = m \cdot n = 8n \cdot (10k + 5)$ *[par substitutions]*
- $= 80nk + 40n$ *[par distributivité]*
  $= 10 \cdot (8nk + 4n)$ *[mise en évidence]*
- on pose $k' = 8nk + 4n$ et on a $k' \in \mathbb{N}$ *[car k_1 et k_2 sont des entiers par hyp.]*
- donc $P = 10 \cdot (8nk + 4n) = 10k'$ est un multiple de 10 *[par déf. de "multiple"]*