

Equations du deuxième degré

Quoi ?

Définition

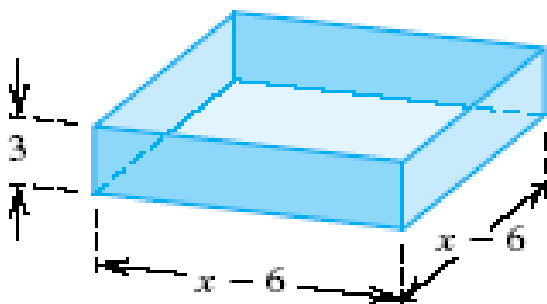
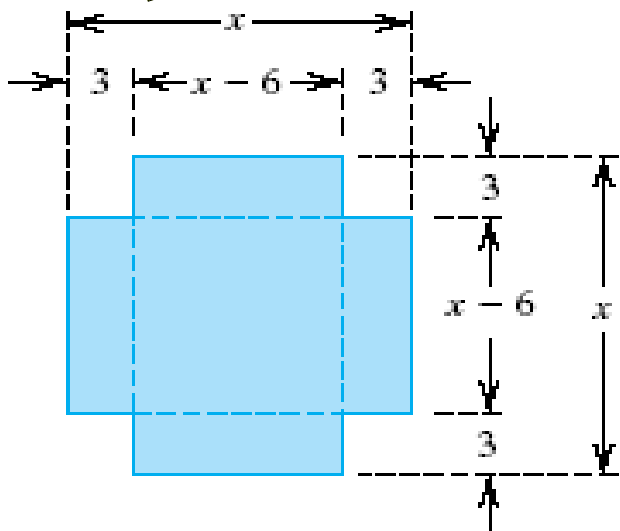
Une **équation du deuxième degré** est une équation polynomiale $p(x)=q(x)$ telle que le degré de $p(x)-q(x)$ est égal à 2. Elle est toujours équivalente à une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, où x est une **variable** réelle et a , b et c sont des **constantes** réelles ($a \neq 0$)

Exemples

$2x^2 - 3 = -3x^2 + x - 1$
 $\pi x^2 - 3 \cdot \sqrt{2} + x = 1$ } sont des équations du 2e degré

$\frac{1}{x^2 - 1} = 2$
 $\pi x^3 - 3 \cdot \sqrt{2} + x = 1$ } ne sont pas des équations du 2e degré

Pourquoi ?



Certains problèmes conduisent à devoir résoudre une telle équation :

«On veut faire une boîte ouverte de base carrée à partir d'un morceau de métal carré, en coupant à chaque coin un carré de 3 cm de côté et en pliant les côtés.

De quelle taille doit être le morceau de métal pour que la boîte ait un volume de 48 cm^3 ?»

L'équation est alors : $3(x-6)^2 = 48$

équivalente à : $x^2 - 12x + 18 = 0$

Résoudre une équation du deuxième degré

Comment ?

Cas particulier (ou équivalent) ?

$$x^2 = a \quad (\text{pas de terme en } x)$$

non

oui

Cas général ...

Si $a \geq 0$: $S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$

Si $a < 0$: $S = \emptyset$

1

on écrit l'équation sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

2

On essaye de factoriser ...



Viète avec $\Delta = b^2 - 4ac$
pour conclure

On utilise le thm du produit nul
pour conclure :
 $y \cdot z = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $z = 0$

si $\Delta > 0$

l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a deux solutions

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

si $\Delta = 0$

L'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a une solution

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

si $\Delta < 0$

L'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

n'a pas de solution

Remarque : on peut du coup aussi factoriser une expression de degré 2 :

l'expression

$$ax^2 + bx + c$$

est factorisable

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

l'expression

$$ax^2 + bx + c$$

est factorisable

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a(x - x_0)^2$$

l'expression

$$ax^2 + bx + c$$

n'est pas

factorisable

Résoudre une équation du deuxième degré

Exemples

1

$$\begin{aligned}2x^2 - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 4 \\ x &= -2 \text{ ou } x = 2 \\ S &= \{-2; 2\}\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x &= x^2 + x - 6 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &= 0 \quad \blacktriangleright -x^2 - x + 6 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 2) = 0 \text{ ou } (x - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3 \\ S &= \{2; 3\}\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x &= x^2 + x - 5 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 &= 0 \quad \blacktriangleright -x^2 - x + 5\end{aligned}$$

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 5$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 5$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Factoriser une expression du deuxième degré

Exemples

1

$$\begin{aligned}2x^2 - 8 &= 2(x^2 - 4) \\ &= 2(x - 2)(x + 2)\end{aligned}$$

2

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

3

$$6x^2 - x - 2:$$

$$a = 6, b = -1, c = -2$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2) = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x_1 = \frac{1 - 7}{12} = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1 + 7}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}6x^2 - x - 2 &= 6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \\ &= 6\left(\frac{2x + 1}{2}\right)\left(\frac{3x - 2}{3}\right) \\ &= (2x + 1)(3x - 2)\end{aligned}$$

4

$$6x^2 - x + 2:$$

$$a = 6, b = -1, c = 2$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = -47$$

$6x^2 - x + 2$ n'est pas factorisable