Formule de Viète

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c \\
&\dots \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}
$$

On effectue la complétion du carré (voir la fiche précédente ...)

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est appelé le discriminant de l'expression ax^2+bx+c

Si $\Delta>0$:

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}^2}{(2a)^2}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\cdot\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] \\
&= a\left[x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\cdot\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] \\
&= a\left[x-\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\cdot\left[x-\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Cette écriture permet d'une part de **résoudre une équation** de degré 2 :

l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

d'autre part de **factoriser une expression** de degré 2 :

l'expression ax^2+bx+c est factorisable: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Si $\Delta<0$:

On a: $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

Cette écriture permet d'une part de **résoudre une équation** de degré 2 :

l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution

d'autre part de dire qu'une **expression** de degré 2 n'est **pas factorisable** :

l'expression ax^2+bx+c n'est pas factorisable

Si $\Delta=0$:

On a: $ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$

Cette écriture permet d'une part de **résoudre une équation** de degré 2 :

l'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution $x_0=-\frac{b}{2a}$

d'autre part de **factoriser une expression** de degré 2 :

l'expression ax^2+bx+c est factorisable: $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

la formule $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ où, $\Delta=b^2-4ac$ s'appelle la formule de Viète

François Viète, mathématicien français, 1540-1603

François Viète étudia le droit à l'université de Poitiers. C'est ainsi qu'il fut avocat puis fut conseiller au parlement (cour de justice) sous Henri III et Henri IV. Mais Viète s'intéresse à l'astronomie et découvre les mathématiques.

On lui doit de nombreuses publications de géométrie (coniques, problèmes de construction, trisection de l'angle, quadrature du cercle). Selon certains historiens, il aurait perçu avant Kepler la nature elliptique des orbites planétaires dans son Harmonicon Coeleste, vers 1597, mais ce traité est hélas perdu.

Viète résolut complètement l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, qu'il écrivait lui $ax^2 + bx = c$ (…)

Source: http://serge.mehl.free.fr/chrono/Viete.html