La construction mathématique

Outils de base pour justifier les étapes d'une démonstration

Définitions
- entiers consécutifs
- entier multiple de …
- entier est pair/impair

« Axiomes »
- les manipulations numériques
- Les manipulations algébriques de base (réduire, simplifier, distribuer, ...)

«Axiome » entre guillemets, car nous les considérons comme des axiomes, alors que les mathématiques peuvent les démontrer (en se basant sur d'autres axiomes plus complexes)

Théorèmes démontrés (démontrables)
- propriétés des puissances
- identités remarquables
- ...

Conjecture

Le plus souvent sous forme d'une implication (si…,alors ...) ou (…⇒...) avec hypothèse(s) et conclusion(s)

Attention aux hypothèses implicites !

? → ouverte

Exemple : la conjecture de Goldbach (1742)
Tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.
Personne aujourd'hui encore n'a réussi à démontrer cette conjecture !

Contre-exemple → fausse

Exemple : si n est pair alors n est multiple de 4
Contre-exemple : 6 est pair *[car 6 = 2*3]*,
mais 6 n'est pas multiple de 4 *[car 6 ≠ 2*k pour tout k entier]*
On n'exige pas de justification pour les arguments de type «calcul numérique»

Démonstration → vraie

Exemple : si n est multiple de 4, alors n est pair
démonstration :
n est multiple de 4 [par hypothèse]
donc $n = 4*k$, avec k entier [par déf «multiple»]
= 2*(2*k) *[décomposition et parenthésage]*
= 2*m *[on pose $2*k=m$ qui est entier]*
donc n est pair [par déf «pair»]

On exige pour chaque affirmation une justification quant elle peut être basée sur les outils du socle ; on n'exige pas de justification pour les arguments de type « calcul numérique »

Une démonstration est un raisonnement argumenté établissant la véracité d'une conjecture à partir des axiomes posés, des définitions connues et des résultats déjà démontrés.
Une fois démontrée, une conjecture devient un **Théorème**

qui alors devient immédiatement une nouvelle ressource disponible pour argumenter dans une nouvelle démonstration

La construction mathématique : un exemple

Problème Question	**« Si on ajoute l'unité au triple d'un nombre quelconque, et qu'on ajoute au triple de cette somme le même nombre, On obtient un nombre qui se termine par 3 »**

traduction FR<->Maths

Le plus souvent sous forme d'une implication (si…,alors ...) ou (…⇒...) avec hypothèse(s) et conclusion(s)

hypothèse implicite : le nombre doit être un entier naturel

Conjecture	**Si n est un nombre entier naturel, alors $3(3n + 1) + n$ se termine par 3**

Démonstration

$3(3n + 1) + n = 9n + 3 + n$ [distributivité]
$= 10n + 3$ [réduction]

or n est entier [par hypothèse]
donc $10n + 3$ se termine par 3
[par thm « se termine par ... »]

Outils de base pour justifier les étapes d'une démonstration

Définitions

- entiers consécutifs
- entier multiple de …
- entier est pair/impair

« Axiomes »

- les manipulations numériques
- Les manipulations algébriques de base (réduire, simplifier, distribuer, ...)

«Axiome » entre guillemets, car nous les considérons comme des axiomes, alors que les mathématiques peuvent les démontrer (en se basant sur d'autres axiomes plus complexes)

Théorèmes démontrés (démontrables)

- propriétés des puissances
- identités remarquables
- ...

La construction mathématique

Implication I	si [A], alors [B] ou $[A] \Rightarrow [B]$ où [A]=hypothèse(s) et [B]=conclusion(s)

Exemple : (I) si n est pair, alors n est multiple de 4

Réciproque de I	si [B], alors [A] ou $[B] \Rightarrow [A]$ où [B]=hypothèse(s) et [A]=conclusion(s)

Exemple : réciproque de (I) :
si n multiple de 4, alors n est pair

On inverse donc les rôles respectifs des hypothèses et conclusions

Il n'y a pas de relation entre la véracité d'une implication et de sa réciproque : les deux peuvent être vraies, ou les deux fausses, ou l'une vraie et l'autre fausse.

Contraposée de I	si [nonB], alors [nonA] ou $[\text{nonB}] \Rightarrow [\text{nonA}]$ où [nonB]=hypothèse(s) et [nonA]=conclusion(s)

Exemple : contraposée de (I)
si n n'est pas un multiple de 4, alors n n'est pas pair

On commence par prendre la négation des hypothèses et conclusions puis on inverse leurs rôles respectifs

Il y a une relation entre la véracité d'une implication et de sa contraposée: les deux sont soit vraies ensemble, soit fausses ensemble ; il suffit donc de déterminer la véracité/fausseté de l'une pour être certain de celle de l'autre.

Il arrive qu'on n'arrive pas à démontrer une implication … mais qu'on arrive à démontrer sa contraposée. C'est le principe de la démonstration par l'absurde !