

## « Découvrir le code de logdeu »

Fichier : sm07\_dcl\_log\_9co11po.pdf

## Fiche de présentation

<b>Titre de l'activité</b>	Découvrir le code.
<b>Sous-titre</b>	Logdeu
<b>Degré(s) concerné(s)</b>	9CO-11PO
<b>Durée estimée</b>	2h
<b>Résumé</b>	Découvrir les propriétés du log en base 2. En particulier, les relations : $\log_{\text{deu}}(ab) = \log_{\text{deu}}(a) + \log_{\text{deu}}(b)$ . $\log_{\text{deu}}(2^n) = n$ . Essayer de justifier ces relations, en s'intéressant à la fonction $f(r) = 2^r$ .
<b>Type d'usage de la calculatrice</b>	Programmer une fonction, puis utiliser la fonction programmée. Éventuellement utilisation des mémoires.
<b>Contenus mathématiques visés</b>	Fonction réciproque de la fonction exponentielle de base 2, et en prolongement de base 10 et de base $a > 0$ . Découverte des logarithmes et de leur graphe.
<b>Pré requis</b>	Les propriétés de $a^x$ pour $a > 0$ et $x$ réel $a^x a^y = a^{x+y}$ pour tout $x$ et $y$ réels
<b>Liens avec le plan d'études et moyens d'enseignement</b>	Voir contenus mathématiques visés et pré requis.
<b>Mot-clé</b>	Puissance, réciproque, logarithme.
<b>Source</b>	

## Énoncé élève : Découvrir le code de logdeu.

Après avoir programmé dans sa machine la fonction logdeu comme décrit dans la page annexe.

- I) Esquisser l'allure de cette fonction. Pour cela calculer l'image des nombres suivants : les entiers 1 à 16, 32, 64,  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $2/3$ , 0, -1, -3. Que remarquez-vous ? Que se passe-t-il pour les nombres négatifs ?
- II) Y a-t-il une relation entre  $\text{logdeu}(2^n)$  et  $\text{logdeu}(2)$ , si oui laquelle ?  
Y-a-t-il une relation entre  $\text{logdeu}(6)$ ,  $\text{logdeu}(3)$  et  $\text{logdeu}(2)$  ?  
Pouvez-vous induire une relation entre  $\text{logdeu}(ab)$ ,  $\text{logdeu}(a)$  et  $\text{logdeu}(b)$  ?
- III) Peut-on justifier une telle relation. Connaissez-vous des relations similaires pour d'autres fonctions ? Que vaut  $\text{logdeu}(2^r)$  ? Existe-t-il une relation entre les fonctions  $\text{logdeu}$  et  $f(r) = 2^r$ , si oui laquelle ? Ceci permet-il de justifier la relation observée en II) ?
- IV) Comment calculer  $\text{logdeu}(10'000'000'000)$  ?
- V) Un biologiste découvre dans une boîte de Petri une colonie d'environ 10'000'000'000 de bactéries. Connaissant ce type de bactéries, le biologiste sait qu'elles doublent leur population en 20 minutes. Depuis combien de temps cette boîte a-t-elle été infectée ?

## Programmer la fonction logdeu avec la calculatrice

Voici deux méthodes pour programmer la fonction logdeu avec la calculatrice TI34 II.

### 4.1 Programmer les touches $\boxed{OP_1}$ et $\boxed{OP_2}$

**Attention :** certaines touches nécessitent l'utilisation de la touche  $\boxed{2nd}$  pour être activées: elles sont notées entre crochets et non dans un cadre.  
Exemple 1 : pour la touche  $\boxed{\blacktriangleright OP_1}$  on appuiera sur la touche  $\boxed{2nd}$  puis sur la touche  $\boxed{OP_1}$ .  
Exemple 2 : pour la touche  $\boxed{OP_1}$  on appuiera seulement sur la touche  $\boxed{OP_1}$ .  
La touche  $\boxed{2nd}$ , en activant une deuxième fonction pour les touches, permet d'avoir un nombre réduit de touches sur la calculatrice.

- **Taper la séquence de touches, pour la première méthode** «  $\boxed{MEMVAR}$  »

$\boxed{\blacktriangleright OP_1}$  { éventuellement effacer avec  $\boxed{CLEAR}$  }

$\boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{MEMVAR} \boxed{ENTER} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER}$

(On utilise le nombre qui est dans la mémoire A comme variable de la fonction programmée.)

- **Taper la séquence de touches, pour la seconde méthode** «  $\boxed{ANS}$  »

$\boxed{\blacktriangleright OP_2}$  { éventuellement effacer avec  $\boxed{CLEAR}$  }  $\boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{ANS} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{2} \boxed{)} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER}$

(On utilise le dernier nombre qui a été affichée à l'écran comme variable de la fonction programmée.)

## 2. Utiliser les touches programmées

Ici, pour calculer la valeur de la fonction on choisit comme exemple le nombre 7.

- **Avec la première méthode** «  $\boxed{MEMVAR}$  », taper la séquence de touches:

$7 \boxed{STO} \boxed{ENTER} \boxed{OP_1}$

- **Avec la seconde méthode** «  $\boxed{ANS}$  », taper la séquence de touches:

$7 \boxed{ENTER} \boxed{OP_2}$

## 3. Pour aller plus loin

- Méthode «  $\boxed{MEMVAR}$  » : remplacer la séquence de touches par la suivante,

$\boxed{\blacktriangleright OP_1}$  { éventuellement effacer }  $\boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{MEMVAR} \boxed{ENTER} \boxed{)} \boxed{\div} \boxed{LOG} \boxed{ENTER} \boxed{MEMVAR} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{ENTER} \boxed{)} \boxed{ENTER} \boxed{ENTER}$

(On utilise le nombre qui est dans la mémoire A comme variable de la fonction programmée, et le nombre qui est dans la mémoire B pour la base du logarithme.) Pour utiliser la fonction programmée, il faut mettre la base dans la mémoire B, puis on calcule la valeur du logarithme du nombre que l'on met dans la mémoire A. Ceci permet de programmer  $\log_a$  ou même  $\log_{10}$  pour comprendre explicitement ce qui se fait.

<b>Prolongement possible : logdix, loga.</b>
--

Programmez maintenant la fonction logdix et loga comme décrit dans la page annexe.

I) Calculer logdix pour les valeurs entières de 1 à 10; 100; 1000; 0,1; 0,01; 0; -1.

Remarquez-vous des relations analogues à celles découvertes pour logdeu ?  
En particulier, existe-t-il une relation entre logdix et la fonction  $g(x) = 10^x$ .

II) Pour un nombre  $a > 0$  fixé différent de 1, on connaît la fonction  $h(x) = a^x$ , comment définiriez-vous loga ?

Commentaires pour le maître

(activité *Découvrir le code de logdeu*, 9CO-11PO)

<p><b>Analyse à priori de l'activité (enjeux de l'activité, démarches possibles, difficultés, relances, mise en commun)</b></p>	<p><u>Intentions</u>            Programmer une fonction, découvrir le logarithme, manipuler des fonctions réciproques non élémentaires.</p> <p><u>Variables didactiques</u>            Choix d'une des deux manières de programmer la fonction. L'une permettant (la découverte et) l'usage des mémoires. Le désavantage de cette méthode est qu'il faut mettre chaque valeur dans la mémoire choisie, ce qui nécessite plus de frappe, mais qui entraîne la mise en mémoire d'un nombre.</p> <p>L'autre manière est plus rapide et met en évidence la possibilité d'utiliser le dernier résultat, ce qui est plus efficace dans le cas d'itérations.</p> <p>Pour la question V), il est possible de préciser qu'« infecter » signifie : apparition de la première bactérie.</p>
<p><b>Proposition(s) de déroulement</b></p>	<p>Par petits groupes (2 à 3 personnes)</p>
<p><b>Prolongements possibles</b></p>	<p>Ceux proposés dans la feuille de l'élève. Il est possible d'utiliser la programmation du log en base a de x pour faire comprendre la formule de changement de base des log.</p>

## Corrigé (activité *Découvrir le code de logdeu*, 9CO-11PO)

Comme, en essayant, on remarque que logdeu et la fonction  $f(x) = 2^x$  sont des fonctions réciproques, et que l'on sait que  $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$ , on déduit que

$$\logdeu(x) + \logdeu(y) = \logdeu(x \cdot y).$$

On peut supposer que la boîte a été infectée par une unique bactérie, après 20 minutes, il y a 2 bactéries, après 40 = 2 fois 20 minutes, il y a 4 =  $2^2$  bactéries, après 60 = 3 fois 20 minutes, il y a 8 =  $2^3$  bactéries, on voit donc qu'après x fois 20 minutes, il y a  $2^x$  bactéries. Il faut donc résoudre l'équation  $2^x = 10\,000\,000\,000$ , c'est-à-dire appliquer logdeu des deux côtés de l'égalité.

Comme  $\logdeu(10\,000\,000\,000) = \logdeu(10^{10}) = 10 \logdeu(10) = 10 \logdeu(5 \cdot 2) = 10(\logdeu(5) + \logdeu(2)) = 10(\logdeu(5) + 1) = 33,22$ , ceci implique que  $x = 33,22$ .

Il faut donc  $33,22 \cdot 20 = 664,4$  minutes, c'est-à-dire 11h 4 minutes et 24 secondes. 😊 😊

Est-il pertinent de donner les secondes ?