Systèmes 3x3

Résoudre un système 3x3 – càd un système de trois équations (linéaires) à trois Inconnues, c'est déterminer tous les **triplets** (*x;y;z*) qui vérifient les trois équations

exemple

Résoudre le système 3x3 suivant :

$$\begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array}\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ -4x + 3y + z = 5 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

on commence par identifier une des trois variables qu'on souhaite éliminer

La situation étant relativement symétrique, on choisit – par exemple - d'éliminer *z* :

pour cela, on choisit deux des trois équations, on les multiplie si nécessaire afin que lorsqu'on les additionne, la variable *z* soit éliminée

$$\begin{array}{l} 1\cdot ① \\ 2\cdot ② \end{array}\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ -8x + 6y + 2z = 10 \end{cases}$$

on obtient ainsi une nouvelle équation – la 4e – qui n'a plus que *x* et *y* comme inconnues!

$$④ \quad -5x + 7y - 0z = 9$$

on recommence à l'identique avec deux autres des trois équations de départ … et on obtient une 5e équation, qui n'a elle aussi plus que *x* et *y* comme inconnues

$$\begin{array}{l} (-3)\cdot ② \\ 1\cdot ③ \end{array}\begin{cases} 12x - 9y - 3z = -15 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$⑤ \quad 14x - 11y + 0z = -8$$

Si on considère maintenant le système 2x2 constitué des deux équations ④ et ⑤, on a affaire à un système 2x2 classique qu'on sait résoudre !

$$\begin{array}{l} ④ \\ ⑤ \end{array}\begin{cases} -5x + 7y = 9 \\ 14x - 11y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} 11\cdot ④ \\ 7\cdot ⑤ \end{array}\begin{cases} -55x + 77y = 99 \\ 98x - 77y = -56 \end{cases}$$

$$⑥ \quad 43x = 43$$

$$x = 1$$

on choisit l'équation ④ ou ⑤ pour déterminer *y*

$$\text{dans } ④: \ -5\cdot 1 + 7y = 9$$
$$7y = 14$$
$$y = 2$$

on choisit l'équation ①, ② ou ③ pour déterminer *z*

$$\text{dans } ②: \ -4\cdot 1 + 3\cdot 2 + z = 5$$
$$z = 3$$

La solution est un ensemble qui contient – dans ce cas ! - un unique triplet

$$S = \{(1;2;3)\}$$

Parfois, on remplace le système initial par un système équivalent de la forme d'un **système triangulé :** on garde une des équations de départ a 3 inconnues, un des deux nouvelles équations ④ ou ⑤ à deux inconnues et la dernière à une inconnue. Un tel système est facile à résoudre !

Un système triangulé équivalent au syst. initial :

$$\begin{array}{l} ① \\ ④ \\ ⑥ \end{array}\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ \quad -5x + 7y = 9 \\ \qquad 43x = 43 \end{cases}$$

Remarque : comme pour les systèmes 2x2, il peut arriver qu'il n'y ait pas de solution … ou qu'il y ait beaucoup de solutions ! Ces situations particulières et leur interprétation géométrique seront étudiées en 3e et 4e années.