Nombres

Pourquoi ?

navigation, astronomie, physique, commerce, …

quantifier-mesurer-ordonner

Le gardien prend et conserve un caillou pour chaque chèvre qui passe devant lui le matin et vérifie le soir qu'à chaque caillou correspond bien une chèvre !	remarque : les animaux comptent … un peu...

Où ? Quand ?

Sumériens (-3000) → sédentarisation/écriture
Mésopotamie (-2000/-1000) → calculs (en base 60)
Egypte (-2000/-1000) → géométrie/fractions
Grèce (-600/-200) → géométrie/argumentation
Civilisations islamiques (800/1500) → algèbre/trigo
Occident (1500…) → analyse
mais aussi Chine, Mayas(0-800), Inde (le zéro)
Arabie (800/1500) → algèbre
Europe (XV siècle)

Comment ?

Les chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 … et 0	fruit d'une longue évolution ...

Les nombres avec deux opérations : + et *

10, 234, 343729, …

$2345 = 2\cdot1000 + 3\cdot100 + 4\cdot10 + 5\cdot1$

entiers naturels, addition/somme, multiplication /produit, division avec reste, ppmc/pgdc, système de numération positionnel en base 10/autres bases

en commerce il y a aussi des pertes … et on doit parfois fractionner des quantités ...

deux nouvelles opérations : - et ÷

-2 ; -67 ; $\frac{1}{3}$; $-\frac{5}{12}$

entiers relatifs, soustraction/différence, division/quotient, opposé – inverse

Équivalence « fraction irréductible » ↔ « écriture décimale avec partie fractionnaire finie ou infinie périodique »

$\frac{1}{2}=0.5\,;\ \frac{2231}{1000}=2.231\,;\ \frac{1}{3}=0.\overline{3}\,;\ \frac{2}{7}=0.\overline{3285714}\ldots$

fractions, fractions irréductibles, écriture décimale, nombre rationnel

avec les nombres rationnels, tout est mesurable
avec une très grande précision … mais pas toujours de façon exacte !

CC BY NC SA

Nombres (suite)

Puissances entières

a un nombre quelconque et n entier naturel non nul : $a^n \overset{\text{déf}}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$

a un nombre quelconque non nul : $a^0 \overset{\text{déf}}{=} 1$

a un nombre quelconque et n entier naturel négatif : $a^n \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{1}{a^{-n}}$

a, b nombres quelconques, n et m entiers relatifs (et exclusion des cas 0^0)

$a^n \cdot a^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n+m}$ $\quad (a^n)^m \overset{\text{thm}}{=} a^{n \cdot m}$ $\quad \dfrac{a^n}{a^m} \overset{\text{thm}}{=} a^{n-m}$ (pour $a \neq 0$)

$a^n \cdot b^n \overset{\text{thm}}{=} (ab)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} \overset{\text{thm}}{=} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (pour $b \neq 0$)

Racines carrées

a un nombre quelconque positif : $\sqrt{a} = b \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} b^2 = a$ et $b \geq 0$

a, b nombres quelconques positifs : $\sqrt{a}\sqrt{b} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt{a \cdot b}$ $\quad \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \overset{\text{thm}}{=} \sqrt{\dfrac{a}{b}}, (b \neq 0)$ $\quad \sqrt{a^2} \overset{\text{thm}}{=} (\sqrt{a})^2 \overset{\text{thm}}{=} a$

Mais attention : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

D'autres nombres

la longueur de la diagonale du carré ne peut pas être écrite comme fraction irréductible !

il existe donc des nombres non rationnels … les nombres irrationnels

leur écriture décimale a une partie fractionnaire infinie non périodique

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, 2 \cdot \sqrt{2}, 13 \cdot \sqrt{19}$; π est aussi un nombre irrationnel

nombres irrationnels, nombres réels

la droite réelle est un modèle pour mesurer de façon exacte les grandeurs

il n'existe pas de nombre réel « le plus proche » d'un autre ...

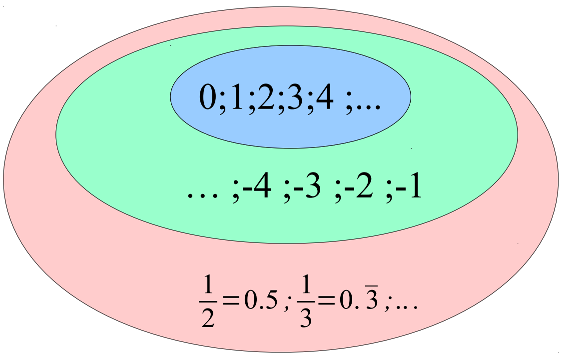
il y a une infinité de nombre rationnels … et de nombres irrationnels …
tous « mélangés » de façon très complexe ...

compétences essentielles

ordre des opérations	règle des signes	calcul de fractions	proportions	gestion des parenthèses	utiliser efficacement la calculatrice
simplifier/réduire des expressions (fractionnaires) avec puissances					
simplifier/réduire des racines carrées			écrire une expression sans racine au dénominateur		

CC BY NC SA

Nombres (suite)



Attention : les relatifs sont aussi des naturels, les rationnels des relatifs et des natures !

Leur écriture décimale a une partie fractionnaire :

entiers naturels → nulle

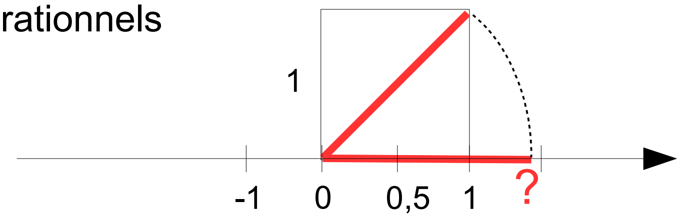
entiers relatifs → nulle

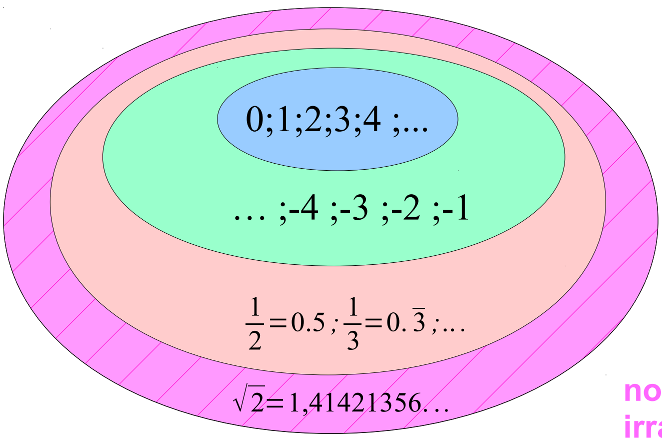
nombres rationnels → finie ou infinie périodique

Théorème : La longueur de la diagonale du carré de côté 1 ne peut pas être écrite sous forme de fraction

Démonstration : par l'absurde ...

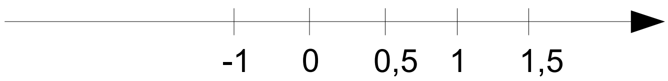
Conséquence : certaines longueurs ne peuvent être mesurées avec les nombres rationnels





nombres irrationnels → leur écriture décimale a une partie fractionnaire infinie non périodique

Les <u>nombres réels</u> sont les nombres rationnels ou irrationnels ;
On peut les représenter à l'aide de la <u>droite réelle</u> :



Quelques questions intéressantes :
- quel est le nombre réel différent de 0 le plus proche de 0 ?
- combien y a-t-il d'irrationnels ?
- y a-t-il plus de rationnels que d'irrationnels ?
- comment sont « mélangés » les rationnels et les irrationnels ?
- y a-t-il d'autres nombres encore que les réels ?

CC BY NC SA